01;03;04

Об одном возможном способе определения функций управления волновыми процессами в областях с подвижными границами (цилиндрическая симметрия)

© *В.С. Крутиков*

Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины, Николаев
E-mail: ipre@iipt.aip.mk.ua

Поступило в Редакцию 1 июля 2004 г.

Авторским методом обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [4,8] получены точные аналитические решения волнового уравнения цилиндрической симметрии в областях с подвижными границами для общего случая. Решения универсальны, пригодны для обратных и прямых задач. Предложен способ преодоления известных для цилиндрического случая симметрии логарифмических особенностей при количественном определении значений функций управления волновыми процессами в областях с подвижными границами.

Волновое уравнение служит математической моделью многих физических процессов, необходимость управлять которыми возникает, как правило, одновременно с изучением этих явлений. Возможности управления обусловливаются как наличием точных аналитических решений обратных волновых задач (задач управления), так и в большей степени — формулировкой математических моделей, позволяющих теоретически описать практически все возможное многообразие, все мыслимые волновые поля. Такой важной математической моделью является волновое уравнение, реализуемое в областях с подвижными и подвижными проницаемыми границами.

Как известно, управление есть в общем случае функция организованных систем различной природы (биологических, физических, технических, социальных и т. д.), обеспечивающих сохранение их определенной структуры, поддержание режима деятельности, реализацию программы, цели деятельности. Задачей управления является определение функции управления. В рамках рассматриваемой математической модели под управлением понимается: первое — функция скорости (движения и проницаемости подвижной границы) или второе — функция давления (на подвижной границе). Целью исследований по вопросам управления является определение функций управления первого и второго случаев, которые обеспечивают получение заранее заданных волновых полей скорости и давления в интересующих точках, включая ближнюю зону и подвижные поверхности границ (где экспериментальное определение затруднительно или невозможно), а также целенаправленное изменение их в течение времени.

Волновые процессы в областях с подвижными границами (ПГ) цилиндрической симметрии относятся к наиболее сложным для изучения [1,2]. До настоящего времени не было методов решения обратных волновых задач с ПГ, подобные задачи в математической физике не рассматривались. Впервые предложен и разработан авторский подход к решению проблемы подвижных границ для волнового уравнения — методы обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [3,4]. Получены точные аналитические зависимости, связывающие значения исследуемых функций давления и скорости в произвольной фиксированной точке волновой зоны с функциями управления, т. е. с давлением на ПГ и скоростью движения подвижной границы. Определение функций управления 1 и 2 случаев имеет большое научное и прикладное значение. Оно позволяет, например, в приложениях, используя уравнение баланса энергии [5,6], определить закон ввода мощности в расширяющийся плазменный поршень электрического разряда или лазерного импульса в жидкости для получения заранее заданной формы функции давления или скорости в сжимаемой среде. Однако точные соотношения для функций управления имеют особенности: в сложные аргументы этих функций входит закон изменения радиуса подвижной границы, который заранее неизвестен и подлежит определению и может быть нелинейным. В работе делается попытка разработки методики преодоления этих особенностей и количественного определения значений функций управления волновыми процессами.

Волновое уравнение цилиндрической симметрии имеет вид:

$$\varphi_{tt} - a^2\varphi_{rr} - a^2 r^{-1}\varphi_r = 0. \qquad (1)$$

Начальные условия полагаем нулевыми. Здесь φ — потенциал скорости, r — координата, t — время, a — скорость распространения возмущений в невозмущенной жидкости. Применяя одностороннее преобразование Лапласа, получаем операторное уравнение

$$r\overline{\varphi}_{rr}(r,s) + \overline{\varphi}_r(r,s) - \frac{s^2}{a^2} r\overline{\varphi}(r,s) = 0. \tag{2}$$

Производим замену переменных в (2) $x = \frac{s}{a} r$, получаем

$$\Phi_{xx} + \frac{1}{x}\Phi_x - \Phi = 0,$$

решением которого будет

$$\Phi = C_1 I_0\left(\frac{s}{a} r\right) + C_2 K_0\left(\frac{s}{a} r\right), \tag{3}$$

где I_0, K_0, K_1 — модифицированные функции Бесселя.

Для безграничной среды $C_1 = 0$, поскольку исследуемые функции при $r \to \infty$ должны быть ограниченными, получаем для случая задания в фиксированной точке волновой зоны произвольной функции давления $P(r_1, t) = f(r_1, t)$ (обратная задача) [3,4]:

$$\overline{\varphi} = -\frac{\overline{f}(r_1, s)K_0(\mu, r)}{s\rho K_0(\mu, r_1)}, \quad \overline{\varphi}_r = \frac{\overline{f}(r_1, s)K_1(\mu, r)}{a\rho K_0(\mu, r_1)},$$

$$s\overline{\varphi} = -\frac{\overline{f}(r_1, s)K_0(\mu, r)}{\rho K_0(\mu, r_1)}, \tag{4}$$

где $\mu = s/a$, s — параметр преобразования, $P = -\rho\varphi_t$, $v = -\varphi_r$, ρ — плотность. Переход к оригиналам в (4) может быть осуществлен рациональным способом в каждом конкретном случае в зависимости от формы функции f. Для общего случая имеем следующие функции управления 1 и 2 $P(R(t), t)$, $v(R(t), t)$:

$$\left|\int_0^t P(r, t-\tau)X(r_1)d\tau = \int_0^t f(r, \xi-\tau)X(r)d\tau\right|_{r=R(t)}, \tag{5}$$

$$\left|\rho\int_0^t v(r, t-\tau)X(r_1)d\tau = \int_0^t \frac{1}{r} f(r, \xi-\tau)X(r)\left(\tau + \frac{r}{a}\right)d\tau\right|_{r=R(t)}, \tag{6}$$

$$\left|\frac{\rho}{2}\int\limits_0^t \left[r^2(t-\tau)-r_0^2\right]X(r_1)d\tau = \int\limits_0^t f^*(r,\xi-\tau)X(r)\left(\tau+\frac{r}{a}\right)d\tau\right|_{r=R(t)}, \tag{7}$$

$$X(r)=\left(\tau^2+2\frac{r}{a}\tau\right)^{-1/2}, \quad X(r_1)=\left(\tau^2+2\frac{r_1}{a}\tau\right)^{-1/2},$$

$$\xi=t-\frac{r-r_0}{a}, \quad f^*=\int\limits_0^t f(r,\xi)dt.$$

Если функции в (5)–(7) аппроксимировать полиномами Лагранжа степени m, то интегралы становятся табличными (2.261)–(2.262) [9].

Представим вид изображения $P(r_1,t)=A\cdot\left((t+\beta)^2-(r_1/a)^2\right)^{-1/2}$ в классе функций Бесселя [10], тогда функции управления 1 и 2 будут иметь вид:

$$P(R(t),t)=\frac{A}{\omega}-\frac{1}{2}\rho v^2(R(t),t), \quad v(R(t),t)=\frac{A(t+\beta)}{R(t)\rho\omega}, \tag{8}$$

$$R(t)=\left\{r_0^2+\frac{2A}{\rho}[\omega-\omega_1]+\frac{2A^2}{\rho^2a^2}\left[\ln\left|\omega-\frac{A}{\rho a^2}\right|-\ln\left|\omega_1-\frac{A}{a^2\rho}\right|\right]\right\}^{1/2}, \tag{9}$$

где

$$\omega=\sqrt{(t+\beta)^2-\frac{R^2(t)}{a^2}}, \qquad \omega_1=\sqrt{\beta^2-\frac{r_0^2}{a^2}}, \qquad \beta=\alpha+\frac{r_0}{a},$$

$A, a, \rho, r_0, \alpha=\mathrm{const}$, r_0 — начальный радиус.

При $\quad t\to 0 \quad P(R(t),t)=\dfrac{A}{\sqrt{\left(\alpha+\frac{r_0}{a}\right)^2-\frac{r_0^2}{a^2}}}-\dfrac{1}{2}\rho v^2(R(t),t), \quad (10)$

$$t\to 0 \qquad v(R(t),t)=\frac{A\left(\alpha+\frac{r_0}{a}\right)}{r_0\rho\sqrt{\left(\alpha+\frac{r_0}{a}\right)^2-\frac{r_0^2}{a^2}}}, \tag{11}$$

при $\quad a\to\infty \quad R(t)=\sqrt{r_0^2+\dfrac{2At}{\rho}}. \quad (12)$

Формулы (8)–(12) при α и $r_0\to 0$ переходят в полученные ранее (8)–(10) [8].

При определении функций управления 1 и 2 по (5), (6) необходимо знание закона изменения радиуса ПГ. Вычисления $R(t)$ по (7) связаны с трудностями: в аргументы функции справа входит искомая функция $R(t)$.

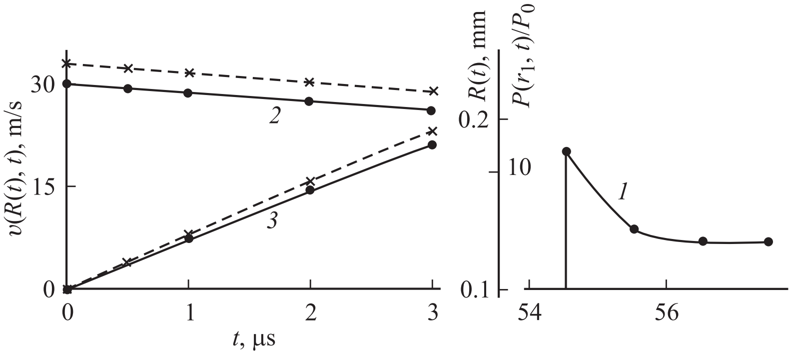
Решение проводим методом последовательных приближений.* Последовательность расчета следующая.

1. Определяем точку r_2. Выбор точки r_2 ясен из физического смысла. Это ближайшая точка, которой не коснется ПГ за рассматриваемый период времени. Поскольку $v(R(t), t)$ неизвестно и ее требуется определить в процессе решения, то r_2 ориентировочно можно определить с „запасом" в безопасную сторону: а) при $v(R(t), t) = \text{const} = 200\,\text{m/s}$ [12]; б) используя формулы (8)–(12), скачок давления $P(r_1(t), t)$ для обратной задачи известен. Величину r_0 необходимо выбрать. Следует учесть, что заданный закон изменения $P(r_1, t)$ можно обеспечить с различного начального радиуса r_0, но при этом закон движения границы будет существенно различным. Производим расчет первого приближения по формуле (6), справа приближенно принимая $r = R(t) \approx r_2$; определяем коэффициенты C_m полинома Лагранжа $v(R(t), t) = \sum\limits_0^\infty C_m t^m$, первого приближения, а значит $R^I(t)$ первого приближения.

2. Вторoе приближение: подставляя $R^I(t)$ в правую часть (6), получаем $v^{II}(R(t), t)$, а значит и $R^{II}(t)$ второго приближения и т. д. Описанный процесс обладает хорошей сходимостью и уже в первом приближении можно получить приемлемые для оценок результаты. По известным значениям $R(t)$ (A_m задано по условию) функции управления 1 и 2 для этого случая определяются по (5), (6). Решения (5)–(7), (8)–(12) являются точными, подстановка их в волновое уравнение превращает его левую часть в нуль, они пригодны для обратных и прямых задач. Границы применимости волнового уравнения и его точных решений в областях с ПГ и ППГ определены в [12], учет влияния проницаемости подвижных границ на волновые процессы произведен в [8].

На рисунке показаны результаты расчета методом характеристик [3,13] системы уравнений движения, сплошности и состояния для

* Следует отметить, что в работе [11] рассматривается другая разновидность обратных волновых задач методом последовательных приближений и без учета подвижных границ.



Восстановление функций управления $v(R(t), t)$, $R(t)$ — *2, 3* по заданному давлению в точке r_1 — *1*. Первое приближение обозначено $\times\times\times$. Сплошные линии — расчет методом характеристик полной системы (13).

изоэнтропических процессов в форме Тэта

$$v_t + v v_r + \rho^{-1} P_r = 0, \quad \rho_t + (\rho v)'_r + (\nu - 1) r^{-1} \rho v = 0,$$
$$(P + B)/\rho^n = (P_0 + B)/\rho_0^n, \tag{13}$$

где B, n — const, ν — показатель симметрии, при расширении цилиндра по закону $v(R(t), t) = A\exp(-\alpha_1 t)$ m/s, где $A = 30$, $\alpha_1 = 0.046 \cdot 10^6$ 1/s; $r_0 = 0.1$ mm, $a = 1460$ m/s, давление в точке $r_1 = 0.08$ m (кривая *1*) взято для реконструкции и аппроксимировано полиномом Лагранжа

$$P(r_1, t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a}\right)^m, \qquad m = 0, 1, 2, 3, \tag{14}$$

где $A_0 = 11.74998$, $A_1 = -11.2383 \cdot 10^6$, $A_2 = 5.3499 \cdot 10^{12}$, $A_3 = -0.8216 \cdot 10^{18}$.

Приближенно определяем точки $r_{2,3}$, которых не коснется ПГ при $t_{1,2} = 0.5$ и $1 \cdot 10^{-6}$ s, по формуле $r_{2,3} = r_0 + v^* t_{1,2}$, где $v^* = 24.5$ m/s $=$ const определено по формулам (8)–(12) при скачке $A = 11.75 \cdot 10^{-6}$ kgf $\cdot$ s/cm^2, $\rho = 102$ kgf $\cdot$ s^2/m^4, величина α определена из формулы [10]:

$$1 \cdot 10^{-6} = \sqrt{\left(t^0 + \alpha + \frac{r_0}{a}\right)^2 - \frac{r_1^2}{a^2}}, \qquad t^0 = \frac{r_1 - r_0}{a}.$$

Эти значения равны $r_2 = 0.1125$ mm, $r_3 = 0.125$ mm.

С учетом (6), (14) и разложения $\exp(\alpha_1\tau) = 1 + \alpha_1\tau + \ldots$ получаем:

$$\rho A \exp(-\alpha_1 t)\left\{\int_0^t \frac{d\tau}{X(r_1)} + \alpha_1 \int_0^t \frac{\tau\, d\tau}{X(r_1)}\right\} = A_0 \frac{1}{r_{2,3}}\left\{\sqrt{\xi^2 + 2\frac{r_{2,3}}{a}\xi}\right\}$$

$$+ A_1 \frac{1}{r_{2,3}}\left\{\left(\xi - \frac{r_{2,3}}{a}\right) Z_1 - Z_2 + \frac{r_{2,3}}{a}\xi Z_0\right\}$$

$$+ A_2 \frac{1}{r_{2,3}}\left\{\left(\xi^2 - 2\frac{r_{2,3}}{a}\xi\right) Z_1 - \left(2\xi - \frac{r_{2,3}}{a}\right) Z_2 + Z_3 + \left(\xi^2 \frac{r_{2,3}}{a}\right) Z_0\right\}$$

$$+ A_3 \frac{1}{r_2}\left\{\left(-3\xi^2 \frac{r_{2,3}}{a} + \xi^3\right) Z_1 + \left(-3\xi^2 + 3\frac{r_{2,3}}{a}\xi\right) Z_2\right.$$

$$\left. + \left(3\xi - \frac{r_{2,3}}{a}\right) Z_3 - Z_4 + \left(\xi^3 \frac{r_{2,3}}{a}\right) Z_0\right\} + \ldots, \tag{15}$$

где $X(r_1) = \sqrt{\tau^2 + 2\frac{r_1}{a}\tau}$; $\xi = t - \frac{r_{2,3} - r_0}{a}$; $Z_n = \int_0^t \frac{\tau^n d\tau}{\sqrt{t^2 + 2\frac{r_{2,3}}{a}\tau}}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$, интегралы Z_n табличные [9]. С учетом значений $r_{2,3}$ и $t_{1,2}$ из (15) получаем трансцендентные соотношения для определения A и $\alpha_1 = \alpha^* \cdot 10^6$, решаемые известными методами:

$$A \exp(-\alpha^*)\{0.19076036 + \alpha^* \cdot 0.06351\} = 6.32990393,$$

$$A \exp(-0.5\alpha^*)\{0.13499004 + \alpha^* \cdot 0.022485\} = 4.46464852,$$

из которого получаем значения первого приближения:

$$A = 33, \qquad \alpha_1 = 0.04462 \cdot 10^6\ 1/\mathrm{s}.$$

На рисунке обозначены $\times\times\times$ функции управления $v(R(t), t)$ и $R(t)$ первого приближения. По известным законам изменения скорости плазменного поршня и радиуса давление $P(R(t), t)$ (прямая задача) определялось ранее [7,8].

Анализ результатов показывает, что корректно управлять волновыми процессами возможно при достижении определенного уровня знания процесса, в данном случае знаний точных аналитических зависимостей функций управления 1 и 2 случаев. Без этого точного знания функций управления само управление превращается в серию попыток ощупью, с помощью проб и ошибок, чаще всего случайно определить желаемое (требуемое). Чаще всего это приводит к потерям времени и средств. Подобные результаты получить другими способами нельзя, метод [14,15] применить для обратных задач затруднительно.

Список литературы

[1] *Кедринский В.К.* // ПМТФ. 1987. № 4. С. 23–48.
[2] *Кедринский В.К.* // ФГВ. 1976. Т. 12. № 5. С. 768–773.
[3] *Крутиков В.С.* Одномерные задачи механики сплошной среды с подвижными границами. Киев: Наук. думка, 1985. 125 с.
[4] *Крутиков В.С.* // Докл. РАН. 1999. Т. 364. № 1. С. 17–20.
[5] *Лямшев Л.М.* // Успехи физических наук. 1987. Т. 151. № 3. С. 479–527.
[6] *Наугольных К.А., Рой Н.А.* Электрические разряды в воде. М.: Наука, 1971. 151 с.
[7] *Крутиков В.С.* // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. В. 6. С. 510–514.
[8] *Крутиков В.С.* // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 6. С. 755–758.
[9] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
[10] *Крутиков В.С.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. В. 24. С. 7–14.
[11] *Баев А.В.* // Докл. РАН. 1986. Т. 287. № 6. С. 1358–1361.
[12] *Крутиков В.С.* // Акуст. журн. 1999. Т. 42. № 4. С. 534–540.
[13] *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике. М.: Наука, 1968.
[14] *Гринберг Г.А.* // ПММ. 1967. Т. 31. № 2. С. 193–203.
[15] *Вопросы математической физики* / Под ред. В.М. Тучкевича. Л.: Наука, 1976. 296 с.