

01;03

## Термокапиллярная деформация неизотермической стекающей пленки жидкости

© Ю.О. Кабова

Институт гидродинамики им. М.Ю. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск  
E-mail: kabova@hydro.nsc.ru

Поступило в Редакцию 8 сентября 2003 г.

В окончательной редакции 11 декабря 2003 г.

Найден критерий, определяющий эффект возникновения возмущений перед термокапиллярным валом жидкости при локальном нагреве стекающей пленки. Получена формула для определения критического числа Рейнольдса.

**Введение.** В работе [1] экспериментально обнаружено и исследовано явление формирования пространственной самоорганизующейся структуры в тонкой движущейся под действием гравитации пленке жидкости при ее локальном нагреве со стороны подложки. В работах [2–4] различными методами измерены термокапиллярные деформации в неизотермической стекающей пленке жидкости. Общим для всех экспериментов является возникновение горизонтального термокапиллярного вала жидкости в области верхней кромки нагревателя. Перед термокапиллярным валом жидкости наблюдалась впадина. Численно форма термокапиллярного валика исследована в работах [3,5,6]. Целью данной работы является найти критерий возникновения возмущений перед термокапиллярным валом жидкости.

**Постановка задачи.** Рассматривается установившееся стекание под действием силы тяжести пленки вязкой несжимаемой жидкости по плоской поверхности, наклоненной к горизонту под углом  $\Theta$ . Выберем систему декартовых координат  $(x, y)$  так, что ось  $Oy$  ортогональна подложке, а ось  $Ox$  направлена по потоку жидкости. На подложке расположен нагреватель длиной  $L$ , с центром в начале координат. Динамический коэффициент вязкости  $\mu$  и коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  линейно зависят от температуры:  $\mu(T) = \mu_0 - \mu_T(T - T_0)$ ,  $\mu_0, \mu_T = \text{const} > 0$ ,  $\sigma(T) = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0)$ ,  $\sigma_0, \sigma_T = \text{const} > 0$ . Движение пленки жидкости описывается уравнениями

Навье–Стокса и переноса энергии, условия теплового баланса на подложке и на поверхности раздела газ–жидкость записываются в общем виде:  $kT_y - b_1(T - T_1(x)) = -q$  при  $y = 0$  и  $kT_y + b_2(T - T_2(x)) = 0$  при  $y = H$ . Здесь  $k$  — коэффициент теплопроводности;  $b_1, b_2$  — коэффициенты теплообмена;  $q$  — задаваемый тепловой поток;  $T_1(x)$  — температура подложки, а  $T_2(x)$  — температура внешней среды в некотором удалении от соответствующих поверхностей раздела;  $T_0$  — начальная температура жидкости,  $\rho$  — плотность жидкости. Постановка задачи, вывод уравнения тонкого слоя (1) и вывод обобщенной аналитической формулы для определения граничных значений толщины пленки  $h_{\pm}$  как функции заданного расхода  $\Gamma$ , переменной вязкости и температуры подробно описаны в [6].

Рассмотрим случай, когда  $T_1(x) = T_2(x) = T_0$ ,  $q(x) \neq 0$  только при  $x \in (-L/2, L/2)$ . Тогда получаем граничные значения для толщины пленки  $h_+ = h_- = 1$ , функции  $\gamma(x, h) \rightarrow 1/2$ ,  $\varphi(x, h) \rightarrow 1/3$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ , следовательно безразмерный расход  $G = C/3$ .

Линеаризуем безразмерное уравнение для толщины пленки  $h$

$$\varphi h^3 (h''' - Ah' + C) - h^2 \gamma \text{Ma} \tilde{\theta}' = G, \quad (1)$$

где  $\tilde{\theta} = \theta|_{y=h}$  и безразмерные критерии подобия  $A, C$ , число Маранго-ни  $\text{Ma}$  задаются формулами

$$A = \frac{gH_0^2 \cos \Theta}{lU^2} = \frac{\cos \Theta}{Fr} \geq 0, \quad C = \frac{gH_0 \sin \Theta}{U^2} = \frac{\sin \Theta}{\varepsilon Fr} > 0,$$

$$\text{Ma} = \frac{\sigma_T [T] H_0}{Ul\mu_0}.$$

Здесь масштабы размерных величин — толщины пленки  $H_0$ , скорости жидкости  $U$ , продольной длины  $l$  и порядка отклонения температуры от среднего значения  $[T]$  имеют вид

$$H_0 = \left( \frac{3\Gamma\mu_0}{\rho g \sin \Theta} \right)^{1/3}, \quad U = \frac{\mu_0}{\rho H_0}, \quad l = \left( \frac{\sigma_0 H_0^2}{\rho U^2} \right)^{1/3},$$

$$[T] = \text{Sup}_x |T_1 - T_2| + \text{Sup}_x \frac{q(x)H_0}{k}.$$

Положим,  $h(x) = 1 + z(x)$ ,  $z(x)$  — новая искомая функция. Пусть интенсивность нагрева пленки достаточно мала, т.е.  $\text{Ma} \ll 1$ , тогда

полагаем  $|z|, |z'|, |z'''| \ll 1$  и получаем линейное приближение уравнения (1)

$$z''' - Az' + 3Cz = \Pi(x, z) = \text{Ma} \tilde{\theta}' \left( \frac{\gamma}{\varphi} \right) \Big|_{z=0} - C \left( 1 - \frac{1}{3\varphi} \Big|_{z=0} \right). \quad (2)$$

Граничные условия для уравнения (2) имеют вид

$$z \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (3)$$

Задачу (2), (3) можно решить точно. Решение дается формулой

$$z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\xi) F(x - \xi) d\xi,$$

где  $F(x)$  — фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения, удовлетворяющее условию  $F(x) \rightarrow 0$ , при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — корни характеристического полинома этого уравнения, легко проверить, что среди них найдется  $\lambda_1 = -a < 0$ . Тогда по теореме Виета  $\lambda_{2,3} = a/2 \pm \sqrt{a^2/4 - 3C/a}$ . Известно, что если неравенство

$$\frac{9C^2}{4} - \frac{A^3}{27} \leq 0 \quad (4)$$

является строгим, то  $\lambda_2, \lambda_3$  вещественны и положительны, и их величины определяются через  $|\lambda_1| = a$ . Тогда фундаментальное решение  $F(x)$  имеет вид

$$F(x) = \frac{a}{8a^3 + 3C} \left\{ \chi(x) e^{-ax} - \chi(-x) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^3 - 12C}} \left[ (\lambda_3 + a) e^{\lambda_2 x} - (\lambda_2 + a) e^{\lambda_3 x} \right] \right\}. \quad (5)$$

Если (4) обращается в равенство, то  $\lambda_{2,3} = a/2$  и

$$F(x) = \frac{4}{9a^2} \left\{ \chi(x) e^{-ax} - \chi(-x) e^{ax/2} \left[ \frac{2x}{3a} - 1 \right] \right\}. \quad (6)$$

Здесь  $\chi(x)$  — функция Хевисайда. Если (4) не выполняется, то имеем два комплексных корня  $\lambda_{2,3} = a/2 \pm ib$ , где  $b = \sqrt{12C - a^3}/2\sqrt{a}$ ,

и фундаментальное решение имеет вид

$$F(x) = \frac{4}{9a^2 + 4b^2} \left\{ \chi(x)e^{-ax} - \chi(-x)e^{ax/2} \left[ \cos(bx) - \frac{3a}{2b} \sin(bx) \right] \right\}. \quad (7)$$

Заметим, что если  $C = 0$ , что соответствует  $\Theta = 0$ , то решение линейного уравнения, соответствующего условию (3), построить невозможно. Это связано с тем, что построение приближения тонкого слоя здесь основано на использовании масштаба поперечной длины  $H_0$ , связанного с величиной расхода  $\Gamma$ . При нулевом угле наклона  $\Theta = 0$ , получим, что  $\Gamma = 0$  и все построения теряют смысл. Легко показать, что в этом случае не будет ограниченного решения, удовлетворяющего граничному условию и у нелинейной задачи. А именно, в случае  $C = 0$  уравнение (2) имеет вид

$$z''' - Az' = \frac{\text{Ma}}{1+z} \frac{\tilde{\theta}' \gamma(x, 1+z(x))}{\varphi(x, 1+z(x))},$$

а любое его решение удовлетворяет интегральному уравнению

$$z(x) = \text{Ma} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\tilde{\theta}'(x-\xi)}{1+z(x-\xi)} \right) \frac{\gamma(x-\xi, 1+z(x-\xi))}{\varphi(x-\xi, 1+z(x-\xi))} F_2(\xi) d\xi.$$

Здесь

$$F_2(x) = \frac{1}{A} \left( -1 + \frac{e^{-\sqrt{A}x}}{2} + \frac{e^{\sqrt{A}x}}{2} \right) \chi(x) + C_1 + C_2 e^{-\sqrt{A}x} + C_3 e^{\sqrt{A}x}$$

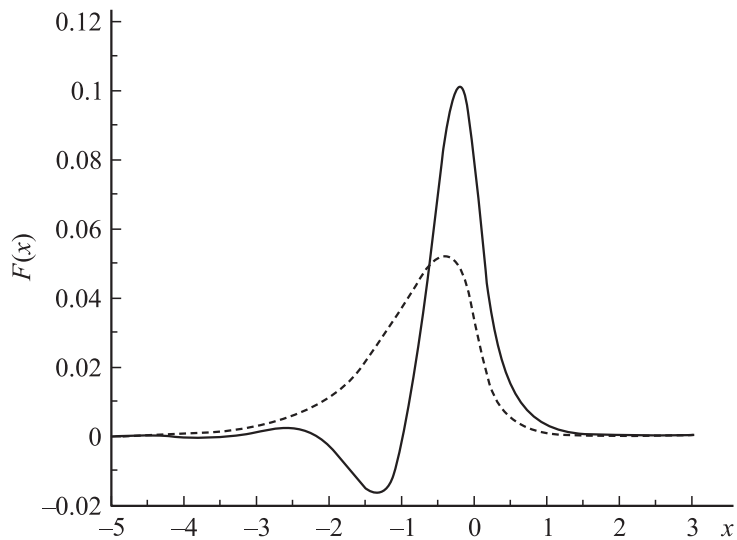
с некоторым набором констант  $C_1, C_2, C_3$ . Ищем ограниченное решение  $e \leq h \leq E$ , и так как по физическому смыслу имеем  $e_1 \leq \gamma/\varphi \leq E_1$ , то  $z(x)$  удовлетворяет неравенству

$$|z(x)| \geq \frac{\text{Ma} e_1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\theta}'(x-\xi)| |F_2(\xi)| d\xi.$$

Поэтому для выполнения условий (3) необходимо, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\theta}'(x-\xi)| |F_2(\xi)| d\xi \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0,$$

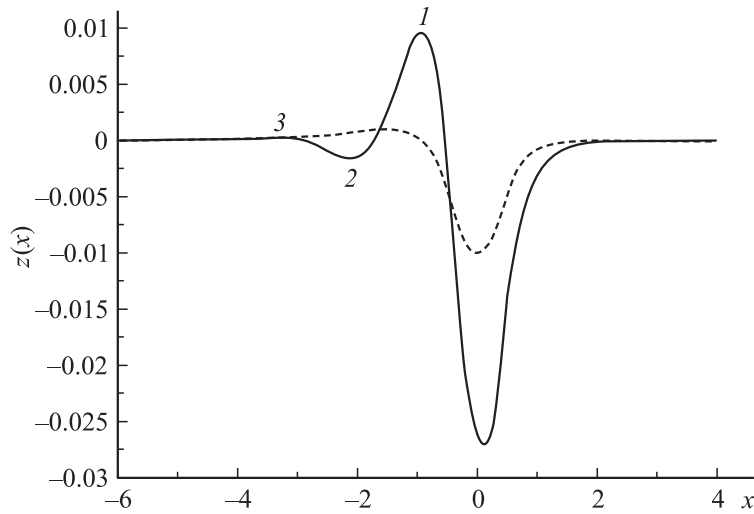
что, в свою очередь, может быть, только если  $F_2(x) \rightarrow 0$ , при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Последнее условие не может быть выполнено ни при каких значениях



**Рис. 1.** Фундаментальные решения  $F(x)$ . Пунктирная линия — случай  $9C^2/4 - A^3/27 < 0$ ,  $A = 10$ ,  $C = 3.8$ ,  $Ma = 0.1$ . Сплошная линия — случай  $9C^2/4 - A^3/27 > 0$ ,  $A = 0$ ,  $C = 10$ ,  $Ma = 0.1$ .

констант  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ . Следовательно, в этом случае у нелинейной задачи не будет ограниченного решения, удовлетворяющего граничному условию (3).

Фундаментальные решения, задаваемые формулами (5), (6), порождают два типа решений, не имеющих качественных отличий. В случае (7) при  $x < 0$  функция  $F(x)$  является затухающей периодической функцией с периодом  $b$ . При этом на графике функции  $z(x)$  перед основным термокапиллярным валом появляется углубление. А выше углубления по потоку появляется слабозаметный валик, и затем возмущения затухают (рис. 1, 2). Основной термокапиллярный вал, углубление перед ним и слабозаметный валик отмечены цифрами 1, 2, 3 соответственно на рис. 2. В случае же различных действительных корней функция  $F(x)$ , задаваемая формулой (5), будет монотонной при  $x < 0$ , и решение  $z(x)$  не будет иметь отмеченных выше особенностей. Построив решение  $z_0(x)$  линеаризованной задачи с правой частью  $\Pi(x, z)$ , можно последовательно вычислять приближения  $z_i(x)$   $i = 1, \dots$  с правыми



**Рис. 2.** Решения граничной задачи (2), (3), порождаемые фундаментальными решениями  $F(x)$ . Пунктирная линия — случай  $9C^2/4 - A^3/27 < 0$ ,  $A = 10$ ,  $C = 3.8$ ,  $Ma = 0.1$ . Сплошная линия — случай  $9C^2/4 - A^3/27 > 0$ ,  $A = 0$ ,  $C = 10$ ,  $Ma = 0.1$ . Цифрами обозначено: 1 — основной термокапиллярный вал, 2 — углубление перед основным валом, 3 — слабозаметный валик.

частями вида  $\Pi_i(x, z) = \Pi_{i-1}(x, z_{i-1})$  соответственно. Таким образом, получаем итерационный алгоритм решения нелинейной задачи. При этом получается, что и решение нелинейной задачи на самом деле тоже является сверткой фундаментального решения и некоторой правой части, несколько отличающейся от линейного случая. Поэтому есть основания предполагать, что условие (4), разделяющее типы решений линейной задачи, сохраняется и в нелинейном случае для некоторой области значений параметров.

Итак, условием отсутствия впадины перед термокапиллярным валом жидкости является условие (4), которое эквивалентно условию

$$60.75 \frac{\sin^2 \Theta}{\cos^3 \Theta} \leq \frac{\rho g H_0^2}{\sigma_0},$$

фактически это означает, что впадина перед валом отсутствует, пока угол наклона не превышает некоторое критическое значение. Другими

словами, условием отсутствия впадины перед термокапиллярным валом жидкости является  $Re \geq Re_*$ , где критическое число Рейнольдса  $Re_*$  является функцией угла наклона пластины и свойств жидкости и определяется формулой

$$Re_* = \frac{(60.75)^{3/2}}{3} \left[ \frac{\rho \sigma_0^3}{g \mu_0^4} \right]^{1/2} \frac{\sin^4 \Theta}{\cos^{9/2} \Theta}.$$

Следовательно, для вертикального положения пластины возмущения перед термокапиллярным валом жидкости возникают при любых достаточно малых числах Рейнольдса, так как условие их отсутствия эквивалентно условию  $Re \rightarrow \infty$ . В работах [2,3,4] измерения выполнены для вертикального положения пластины в широком диапазоне чисел Рейнольдса ( $Re = 0.09-2$ ), появление впадины перед термокапиллярным валом жидкости при всех  $Re$  подтверждает выводы данной работы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-02-16478), а также гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ № НШ-902.2003.1.

## Список литературы

- [1] Кабов О.А. // Теплофизика и аэромеханика. 1998. Т. 5. № 4. С. 597-602.
- [2] Scheid B., Kabov O.A., Minetti C. et al. // Proc. 3rd European Thermal Sciences Conference. 10-13 September 2000. Heidelberg, Germany. V. 1. P. 651-657.
- [3] Кабов О.А., Легро Ж.К., Марчук И.В. и др. // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2001. № 3. С. 200-208.
- [4] Zaitsev D.V., Kabov O.A., Evseev A.R. // Experiments in Fluids. 2003. V. 34. P. 748-754.
- [5] Kuznetsov V.V. // Russ. J. Eng. Thermophys. 2000. V. 10. N 2. P. 107-120.
- [6] Кабова Ю.О., Кузнецов В.В. // Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т. 43. № 6. С. 134-141.