

01

## Активационный закон для одномерных отображений

© И.А. Хованов, Д.В. Думский, Н.А. Хованова

Саратовский государственный университет  
E-mail: igor@chaos.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 20 ноября 2003 г.

Рассматривается активационная динамика одномерных отображений. Показано, что активационный закон, описывающий среднее время достижения данной границы, имеет вид функции ошибок  $\operatorname{erfc}$ ; использование экспоненциального закона дает худшие результаты аппроксимации. Дополнительно продемонстрировано, что линейный анализ может применяться для принципиально нелинейной задачи.

Изучение распада метастабильных состояний является одной из фундаментальных задач, встречающихся во многих областях науки [1]. Под метастабильным состоянием в данном случае понимается устойчивое состояние при наличии флуктуаций, которые могут индуцировать флуктуационные отклонения от устойчивого состояния. С этой задачей тесно связан вопрос о первом времени достижения заданной границы траекторией системы [1]. Ответ на этот вопрос формулируется, как правило, в виде активационных законов, определяющих зависимости скорости распада метастабильного состояния (среднего времени выхода на границу бассейна притяжения устойчивого состояния) и среднего времени достижения границы от интенсивности шума (температуры).

Архетипичным активационным законом является закон Арениуса, или экспоненциальный закон [1]:

$$\langle \tau \rangle \propto \exp\left(\frac{E}{D}\right); \quad (1)$$

здесь  $\langle \tau \rangle$  — среднее время активационного процесса,  $E$  — величина, определяющая энергию активации и часто называемая высотой потенциального барьера для потенциальных систем и высотой квазипотенциала для непотенциальных систем [2,3],  $D$  — интенсивность шума

или температура. Закон Арениуса наблюдается для большого числа активационных процессов, и отклонение от него считается аномалией, свидетельствующей о сложной активационной динамике. Данный закон является базовым для построения многих теорий, описывающих индуцированную шумом динамику.

В настоящей работе численно изучается активационное поведение одномерного отображения и показывается, что активационный закон хорошо аппроксимируется функцией ошибок  $\text{erfc}$ , тогда как экспоненциальная аппроксимация является намного худшей. Дополнительно обсуждается возможность анализа активационной динамики на основе линеаризованного отображения.

Для отображений, как и для потоковых систем, экспоненциальный закон активации можно вывести в рамках приближения малого шума. Различные схемы получения экспоненциального закона можно найти в работах [4]. Наиболее общий подход базируется на построении квазипотенциала системы и, по сути, использует идею минимального действия или, другими словами, теорию больших флуктуаций [3,4]. Именно этот подход мы будем использовать в данной работе. Основная идея работы состоит в сравнительном анализе энергии активации  $S$ , полученной в рамках теории больших флуктуаций на основе рассмотрения расширенных отображений (см. ниже), и энергии  $E$ , полученной на основе численного расчета среднего времени достижения границы в отображении с шумом.

Рассмотрим флуктуационную динамику двух одномерных отображений, которые возникают при решении проблемы стабилизации неустойчивых орбит хаотического аттрактора в логистическом отображении [5].

Первое отображение описывает процедуру стабилизации неподвижной точки  $x^*$  периода 1 с помощью метода Отта–Гребюги–Йорка (ОГИ) [6] в присутствии гауссовых случайных сил  $\xi_n$ :

$$x_{n+1} = (r + \Delta r_n)x_n(1 - x_n) + D\xi_n, \quad (2)$$

$$\Delta r_n = r \frac{(2x^* - 1)(x_n - x^*)}{x^*(1 - x^*)}, \quad x^* = 1 - \frac{1}{r}.$$

Здесь  $D$  — интенсивность флуктуаций;  $\xi_n$  — гауссовый случайный процесс с нулевым средним значением  $\langle \xi_n \rangle = 0$ , дельта-коррелированной автокорреляционной функцией  $\langle \xi_n \xi_{n+k} \rangle = \delta(k)$  и единичной дисперсией  $\langle \xi_n^2 \rangle = 1$ ;  $\Delta r$  — управляющее возмущение параметра  $r$ .

Второе отображение описывает стабилизацию точки  $x^*$  с помощью адаптивного метода (АДП) [7]:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= rx_n(1 - x_n) + \Delta x_n + D\xi_n, \\ \Delta x_n &= (x_n - x^*), \quad x^* = 1 - \frac{1}{r}.\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь  $\Delta x$  — управляющее возмущение координаты  $x$ .

Зафиксируем параметр  $r = 3.8$ . В дальнейшем систему (2) будем называть отображением ОГИ, и систему (3) — АДП отображением. Особенности детерминированной динамики этих систем обсуждаются в работе [5]. Отметим, что аттракторами отображений (2) и (3) являются неподвижные точки  $x^*$ . Структура их бассейнов притяжения различна: бассейн точки  $x^*$  в отображении ОГИ фрактальный, а в АДП — гладкий. В АДП отображении имеется единственный флуктуационный оптимальный путь выхода из области притяжения неподвижной точки, а в отображении ОГИ — несколько практически равновероятных путей выхода [5]. Таким образом, мы выбрали для исследований два отображения, структуры фазовых пространств которых и флуктуационные динамики различны.

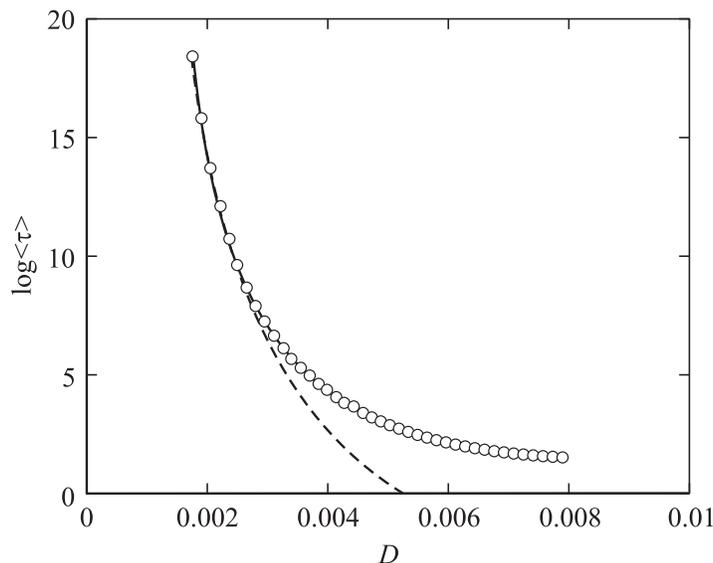
Рассмотрим сначала случай, для которого активационный закон в виде функции ошибок может быть легко получен. Такая ситуация соответствует задаче о выходе траектории системы за пределы малой  $\epsilon$ -окрестности неподвижной точки отображения ОГИ,  $\epsilon \ll 1$ . Поскольку окрестность мала, то формально взамен (2) можно рассмотреть линеаризованное отображение:

$$x_{n+1} = ax_n + D\xi_n; \quad (4)$$

здесь  $a = \left. \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} \right|_{x_n=x^*}$  — производная правой части отображения по переменной. Для отображения ОГИ производная  $a$  равна нулю; среднее время достижения границы полностью определяется временем достижения границы гауссовым дельта-коррелированным шумом и, следовательно, может быть записано в виде:

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{\operatorname{erfc}(\epsilon/\sqrt{2D})}; \quad (5)$$

здесь  $\operatorname{erfc}(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_x^\infty \exp(-y^2) dy$ . Выражение (5) соответствует величине, обратной вероятности того, что отображение находится вне



**Рис. 1.** Зависимости средних времен  $\langle \tau \rangle$  достижения границ  $x^* \pm \epsilon$  от величины интенсивности шума  $D$  для отображения ОГИ;  $\epsilon = 0.01$ . Кругами показаны результаты численного моделирования отображения (2); сплошной кривой — зависимости, рассчитанные по формуле (5); пунктирная кривая соответствует экспоненциальной аппроксимации (1).

интервала  $x^* \pm \epsilon$ ; вероятность определяется на основе стационарного гауссова распределения случайного процесса  $\xi_n$ . На рис. 1 показаны зависимости  $\langle \tau \rangle$  от  $D$ , рассчитанные по формуле (5) и на основе численного моделирования отображения (2). При численном моделировании начальные условия выбирались в точке  $x^*$  и определялся интервал времени, в течение которого отображение покидает  $\epsilon$ -окрестность этой точки. Затем отображение опять помещалось в начальную точку  $x^*$  и снова определялся интервал времени достижения границы и т.д. В результате набирался ансамбль временных интервалов и с целью определения  $\langle \tau \rangle$  проводилось их усреднение. Видно (рис. 1), что теоретические и численные кривые совпадают. На рис. 1 также представлена аппроксимация (пунктирная линия) с помощью формулы (1). Видно, что для малых интенсивностей шума аппроксимация является удовлетвори-

тельной, но далее ошибка аппроксимации резко увеличивается. Таким образом, аппроксимация с помощью функции ошибок  $\operatorname{erfc}$  является лучшей; вместо энергии аргументом функции  $\operatorname{erfc}$  является величина, пропорциональная амплитуде. Отметим, что вычисление дисперсии ошибки между данными численного счета и аппроксимацией (5) дали значения, близкие к нулю.

Формула (5) была получена при линеаризации отображения в окрестности неподвижной точки. Известно, что ошибка процедуры линеаризации мала, если вид функции близок к прямой линии. Однако для рассматриваемой системы (2) вид функции  $x_{n+1} = f(x_n)$  отличается от прямой линии в окрестности точки  $x^*$  для  $\epsilon$  любой малости, поскольку точка  $x^*$  является максимумом параболы. Таким образом, процедура линеаризации оказалась успешной для принципиально нелинейной функции. Дополнительно возникает вопрос о размере области „линейности“. К этому вопросу мы вернемся ниже.

Теперь выйдем за рамки линейного приближения и заменим  $\epsilon$  в формуле (5) на величину  $\sqrt{E}$ , где  $E$  — энергия активации:

$$\langle \tau \rangle = \frac{C}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{2D}}\right)}. \quad (6)$$

Исследуем возможность аппроксимации среднего времени достижения границы с помощью закона (6), в котором  $C$  — некий префактор.

Исследование состоит в определении энергии активации по численной зависимости среднего времени достижения границы  $\langle \tau \rangle$  от интенсивности шума  $D$  и сравнении этого значения с величиной, полученной в рамках расчета квазипотенциала  $S(x)$  отображения. Последний может быть определен на основе решения граничной задачи для расширения отображения следующего вида [2,3,5]:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) + y_n/g(x_n), \\ y_{n+1} &= y_n/g(x_n) \end{aligned} \quad (7)$$

с начальным условием в точке  $(x_0 = x^*, y_0 = 0)$  и граничными условиями  $x_k = x^* \pm \epsilon$ , где  $k$  в общем случае стремится к бесконечности, но может быть конечным. Отображение (7) определяет флуктуационные траектории, начинающиеся в неподвижной точке  $x^*$  и заканчивающиеся на границе  $x^* \pm \epsilon$ . Координата  $y_n$  соответствует флуктуационной силе.

Нахождение флуктуационных траекторий представляет собой краевую задачу, которая в общем случае может иметь бесконечное число решений или не иметь решений вообще. Оптимальные пути определяются минимумом функционала действия  $S$ , соответствующего активационной энергии:

$$S = \sum_{n=0}^k y_n^2, \quad (8)$$

здесь  $y_n$  вычисляются вдоль флуктуационных траекторий.

На рис. 2 представлены результаты вычислений энергии активации, полученной путем аппроксимации численной зависимости  $\langle \tau \rangle$  от  $D$  по формуле (6) и путем расчета квазипотенциала  $S$ . Видно (рис. 2), что как для ОГИ, так и для АДП отображений аппроксимация с помощью формулы (6) дает хороший результат. Активационная энергия увеличивается и достигает насыщения при некотором значении  $\epsilon$ , соответствующем расстоянию от точки  $x^*$  до границы бассейна притяжения. Отметим, что можно получить такое же хорошее соответствие, используя экспоненциальную аппроксимацию начального участка зависимости  $\langle \tau \rangle$  от  $D$ , поскольку в первом порядке разложения по малому параметру функция  $\text{erfc}$  аппроксимируется экспоненциальной функцией. Однако такая аппроксимация имеет вид, отличный от (1):

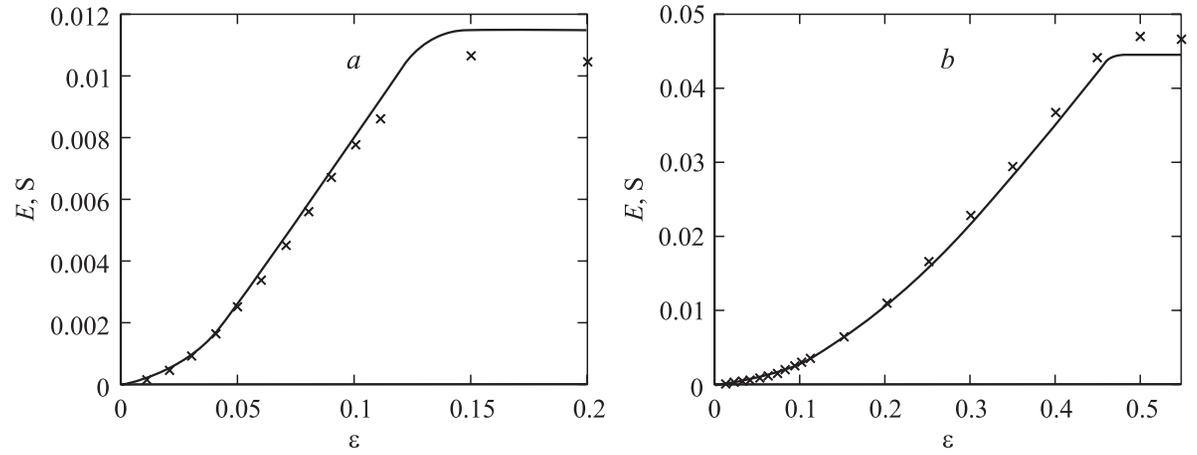
$$\langle \tau \rangle \propto \exp\left(\frac{C_1 \sqrt{E}}{D}\right); \quad (9)$$

здесь  $C_1$  — некая константа.

Аналогичные результаты были получены для хаотического аттрактора: среднее время достижения границы притяжения хаотического аттрактора аппроксимируется функцией ошибок  $\text{erfc}$ .

Таким образом, можно утверждать, что формула (6) описывает активационный закон для одномерных отображений.

Вернемся к сформулированному выше вопросу о максимальной величине  $\epsilon$ , для которой формула (5) остается справедливой. Максимальную величину можно определить на основе поведения префактора  $C$  в формуле (6): если префактор близок к единице, то формула (5) является справедливой. Анализ зависимости  $C(\epsilon)$  показал, что максимальная величина окрестности  $\epsilon$  приблизительно равна 0.09, т. е. является довольно значительной. Данный результат показывает, что



**Рис. 2.** Зависимости активационных энергий  $E$  и  $S$ , полученных на основе формулы (6) и решения граничной проблемы (7) соответственно, от расстояния до границы  $x^* \pm \epsilon$  для отображения ОГИ (a) и АДП отображения (b). Энергия  $E$  показана маркером „x“,  $S$  — сплошной кривой.

анализ в рамках линейного подхода может быть продуктивным для принципиально нелинейной проблемы.

В заключение отметим, что вопрос о теоретическом обосновании формулы (6) для описания активационного закона остается открытым. Также за рамками работы остается анализ поведения префактора  $C$  и его взаимосвязь с видом отображения. Представленные результаты могут быть использованы для классификации вида активационного движения по экспериментальным данным.

Работа поддержана грантом ИНТАС 01–867.

## Список литературы

- [1] *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986. 538 с.
- [2] *Graham R., Tel T.* // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. N 34. P. 3089–3092.
- [3] *Grassberger P.* // J. Phys. A. 1989. V. 22. N 16. P. 3283–3290.
- [4] *Beale P.D.* // Phys. Rev. A. 1989. V. 40. N 7. P. 3998–4003; *Reimann P., Talkner P.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. N 5. P. 4105–4113.
- [5] *Khovanov I.A., Khovanova N.A., McClintock P.V.E.* // Phys. Rev. E. 2003. V. 67. N 5. P. 051102 (11).
- [6] *Ott E., Grebogi C., Yorke J.* // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. N 11. P. 1196–1199.
- [7] *Boccaletti S., Grebogi C., Lai Y.-C. et al.* // Phys. Rep. 2000. V. 329. N 3. P. 103–197.