

03

Термокапиллярная деформация локально нагреваемой пленки жидкости, движущейся под действием газового потока

© Е.Я. Гатапова, О.А. Кабов, И.В. Марчук

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск
E-mail: gatarova@ngs.ru, marchuk@itp.nsc.ru, okabov@ulb.ac.be

Поступило в Редакцию 17 октября 2003 г.

Рассматривается двумерная модель установившегося ламинарного течения пленки жидкости и спутного потока газа в канале. Получено аналитическое решение задачи о распределении температуры для линейного профиля скорости. Решена линеаризованная задача о термокапиллярной деформации поверхности пленки, вызванной локальным источником тепла с постоянной плотностью теплового потока. Получено, что в области выхода теплового пограничного слоя на поверхность пленки формируется термокапиллярный валик жидкости. Перед валом могут присутствовать затухающие вверх по потоку возмущения свободной поверхности. Найден критерий, определяющий этот эффект.

1. Введение. Развитие электронных микросистем, в частности компьютеров, столкнулось в последние годы с проблемой термостабилизации. Перспективными считаются системы, в которых тепло передается от интегральных схем к тонкой пленке жидкости, движущейся в узких каналах под действием трения потока газа. Исследование теплообмена и гидродинамики в такой системе выполнено в работе [1] при движении азота и жидкости FC-72 в симметрично нагреваемом канале высотой 0.508 mm. Устойчивость совместного движения неизотермической пленки жидкости и газа является сложной, до конца не исследованной проблемой [2,3]. Касательные и нормальные напряжения на границе раздела газ–жидкость, вызываемые потоком газа, а также термокапиллярными силами, ответственны за нелинейные деформации, которые могут оказывать существенное влияние на интенсивность теплообмена и разрушение пленки. Целью данной работы является исследование гидродинамики и теплообмена в локально нагреваемой пленке жидко-

сти, движущейся в плоском канале в условиях определяющего влияния термокапиллярных сил.

2. Постановка задачи. Рассматривается канал прямоугольного сечения, в котором движется слой вязкой несжимаемой жидкости под действием касательного напряжения τ , вызванного потоком газа, а также силы тяжести в случае, когда канал наклонен на угол φ к горизонту. На нижней стенке канала расположен локальный источник тепла. Под локальностью нагрева подразумевается, что плотность теплового потока на нижней стенке является финитной функцией переменной x . Выберем систему декартовых координат (x, y) так, что ось Oy ортогональна подложке, а ось Ox направлена по потоку газа. Начало координат находится в начале нагревателя. Предполагается, что поверхностное натяжение зависит от температуры $\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0)$, $\sigma_0, \sigma_T > 0$.

Стационарное двумерное движение пленки жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса и уравнением энергии с граничными условиями: условие прилипания $u(x, 0) = v(x, 0) = 0$, локальный источник тепла с постоянной плотностью теплового потока $-\lambda T_y(x, 0) = q_0(\chi(x) - \chi(x - L))$, кинематическое условие $h_x = v(x, h(x))/u(x, h(x))$, баланс сил на поверхности раздела

$$p - p_a = -\sigma h_{xx}/(1 + h_x^2)^{3/2} + 2\mu(v_y - h_x(u_y + v_x) + h_x^2 u_x)/(1 + h_x^2),$$

$$\mu(2h_x(v_y - u_x) + (1 - h_x^2)(v_x + u_y))/(1 + h_x^2) + \sigma_T T_t - \tau = 0,$$

теплообмен на поверхности пленки $-\lambda T_n(x, h(x)) = \alpha(T(x, h(x)) - T_a)$, задана начальная температура изотермической пленки $T(-\infty, y) = T_0$. Здесь L – длина нагревателя, $\chi(x)$ – функция Хевисайда, h – толщина пленки, p – давление в жидкости, $p_a = \text{const}$ – давление в газе, α – коэффициент теплоотдачи на поверхности пленки, $T_a = \text{const}$ – температура в газе, $T_0 = \text{const}$ – начальная температура пленки, \mathbf{t}, \mathbf{n} – орты нормального и касательного векторов.

Пусть заданы постоянное касательное напряжение τ и начальная толщина пленки h_0 . Будем считать, что имеет место приближение тонкого слоя, т. е. $\varepsilon = h_0/L \ll 1$. Перейдем к безразмерным переменным по формулам:

$$X = x/L, \quad Y = y/h_0, \quad U = u/\bar{u}, \quad V = v/\bar{v}, \quad \theta = (T - T_0)/\Delta T,$$

$$\theta_a = (T_a - T_0)/\Delta T, \quad \bar{\theta} = (T(x, h(x)) - T_0)/\Delta T, \quad P = (p - p_a)/p_0,$$

$$T = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad \bar{h} = \frac{h}{h_0}, \quad \Delta T = \frac{q_0 L}{c_p \Gamma}, \quad p_0 = \frac{\mu \bar{u}}{\varepsilon h_0}, \quad \tau_0 = \frac{\mu \bar{u}}{h_0}, \quad Ma = \frac{\varepsilon \sigma_T \Delta T}{\mu \bar{u}}$$

— число Марангони,

$$\bar{u} = \frac{1}{h_0} \int_0^{h_0} u(y) dy, \quad \bar{v} = \varepsilon \bar{u}, \quad C = \frac{\bar{u} \mu}{\sigma_0} \varepsilon^{-3}$$

— аналог капиллярного числа, $C = 0(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, Γ — удельный расход жидкости. Для линейного профиля скорости в пленке средняя скорость выразится через касательное напряжение $\bar{u} = \tau h_0 / 2\mu$, тогда безразмерное касательное напряжение $T = \tau / \tau_0 = 2$.

3. Распределение температуры в локально нагреваемой пленке.

Рассмотрим задачу переноса тепла для недеформируемой пленки, т.е. $h = h_0 = \text{const}$, когда профиль скорости в пленке линейный и $v = 0$. Введем обозначение $\eta(X) = \chi(X) - \chi(X - 1)$. Используя метод, указанный в [4], находим решение задачи о распределении тепла:

$$\begin{aligned} \theta(X, Y) = & \left(1 + \frac{1}{Bi} - Y\right) \varepsilon \frac{c_p \Gamma}{\lambda} \eta(X) + \theta_a \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} G_i \psi_i(Y) \exp(-\xi_i^2 X) \frac{1}{\xi_i^2} \left[Bi \theta_a \psi_i(1) \right. \\ & \left. - \varepsilon \frac{c_p \Gamma}{\lambda} \psi_i(0) \left(\eta(0) + \int_0^X \exp(\xi_i^2 X) \frac{\partial \eta(X)}{\partial X} dX \right) \right], \quad (1) \end{aligned}$$

где $Bi = \alpha h_0 / \lambda$ — число Био, $\psi_i(Y) = \sqrt{Y} J_{-1/3}(\frac{2}{3} \sqrt{2\varepsilon Pe} \xi_i Y^{3/2})$, ξ_i , $i = 1, \dots, \infty$, собственные функции и собственные значения задачи Штурма–Лиувилля, $J_\nu(\xi)$ — функция Бесселя первого рода. Коэффициенты G_i определяются из условия ортогональности собственных функций. Заметим, что решение (1) имеет место для любых функций η , имеющих интегрируемую обобщенную производную.

4. Решение линеаризованного уравнения для толщины пленки.

Ненулевой градиент температуры на поверхности пленки приводит к возникновению термокапиллярного эффекта, и касательное напряжение деформирует пленку. Если распределение температуры на поверхности жидкости известно, например, из аналитического представления (1) или из эксперимента, то можно найти величину этих деформаций. Из

уравнений Навье–Стокса, неразрывности и граничных условий можно получить уравнение для толщины пленки в безразмерном виде

$$\frac{\bar{h}^3}{3} \left(\varepsilon C^{-1} \bar{h}_{XXX} - \varepsilon \frac{\rho g h_0}{p_0} \cos \varphi \bar{h}_X + \frac{\rho g h_0}{p_0} \sin \varphi \right) + \frac{\bar{h}^2}{2} \varepsilon (T - Ma \bar{\theta}_X) = \varepsilon \gamma, \quad (2)$$

где γ — безразмерный расход.

Пусть $\bar{h}(X) = 1 + h_1(X)$, где $|h_1| \ll 1$. Линеаризуя уравнение (2) и пренебрегая членом $\varepsilon h_1 Ma \bar{\theta}_X = O(\varepsilon^3)$ в левой части, т. е. предполагая, что термокапиллярное касательное напряжение существенно меньше, чем касательное напряжение ($Ma \ll 1$), вызванное газовым потоком, приходим к следующему линеаризованному уравнению

$$h_{1XXX} - C \frac{\rho g h_0}{p_0} \cos \varphi h_{1X} + 3C \left(T + \frac{\rho g h_0}{\varepsilon p_0} \sin \varphi \right) h_1 = f(X). \quad (3)$$

Здесь $f(X) = 3C(\gamma - T/2 + Ma \bar{\theta}_X/2) - \rho g h_0 C \sin \varphi / \varepsilon p_0$. В правой части термокапиллярными силами пренебречь нельзя, так как этот член имеет меньший порядок $\varepsilon Ma \bar{\theta}_X/2 = O(\varepsilon^2)$. Для горизонтально расположенного канала $\gamma = 1$ и $T = 2$ и уравнение (3) принимает вид

$$h_{1XXX} - C \rho g h_0 h_{1X} / p_0 + 3CT h_1 = 3C Ma \bar{\theta}_X / 2.$$

Решение уравнения (3) представляется в виде свертки функций $F(X)$ и f [5]:

$$h_1(X) = \int_{-\infty}^{\infty} F(X - \xi) f(\xi) d\xi,$$

где $F(X)$ есть фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения. Вид фундаментального решения зависит от знака дискриминанта характеристического полинома D . Если дискриминант $D > 0$, то характеристический полином имеет один действительный и два сопряженных комплексных корня, следовательно, фундаментальное решение слева от начала координат — периодическая функция. Если $D = 0$, то все корни действительны и два из них совпадают; если $D < 0$, то все корни действительны и различны. Фундаментальное решение в этих двух случаях не периодическая функция. При $D > 0$ получаем

$$\tau + \rho g h_0 \sin \varphi > \rho g h_0 \frac{2}{3} \frac{h_0}{l_\sigma} \left(\frac{\cos \varphi}{3} \right)^{3/2}, \quad (4)$$

где $l_\sigma = \sqrt{\sigma_0 / \rho g}$ — капиллярная длина. В этом случае перед валом присутствуют затухающие вверх по потоку возмущения свободной по-

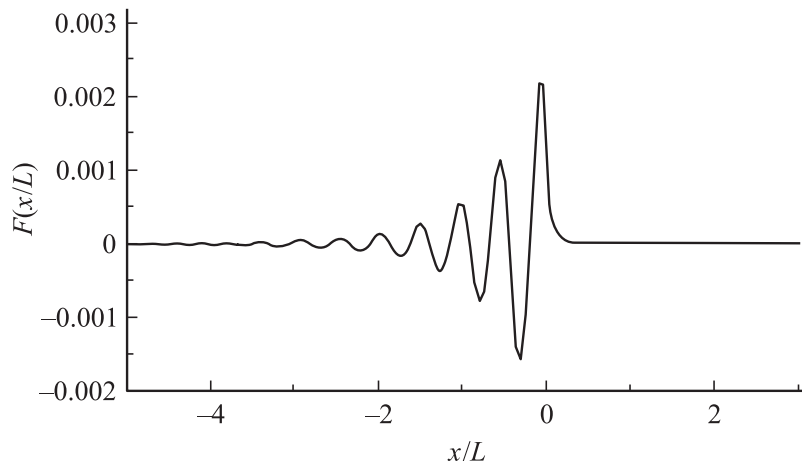


Рис. 1. Вид фундаментального решения для FC-72, $T_0 = 17^\circ\text{C}$, $\text{Re} = 0.04$, $\varphi = 5^\circ$, $\tau = 0.024 \text{ kg/s}^2 \cdot \text{m}$.

верхности. Затухающие возмущения на свободной поверхности присутствуют, если силы, движущие пленку, перевешивают гидростатические. Возмущения всегда существуют при больших углах наклона ($\varphi = 90^\circ$). При малых числах Рейнольдса ($\text{Re} = 0.04$) и относительно сильном влиянии потока газа капиллярные возмущения заметны сильнее (рис. 1). В условиях отсутствия гравитации дискриминант характеристического полинома положителен и фундаментальное решение имеет вид

$$F(X) = (\chi(X) \exp(-AX) + 2\chi(-X) \exp(AX/2) \cos(\pi/3 + \sqrt{3}AX/2)) / 3A^2,$$

$A = (3CT)^{1/3}$, затухающие вверх по потоку возмущения свободной поверхности имеют место при любых $\tau > 0$.

Рассчитанные относительные толщины пленки вдоль канала при различных коэффициентах теплоотдачи и при различных касательных напряжениях представлены на рис. 2, *a*, *b*. Положительный градиент температуры в области нагревателя вызывает термокапиллярное касательное напряжение, направленное навстречу основному потоку жидкости. Толщина пленки в области нагревательного элемента увеличивается. Температура поверхности жидкости за нагревателем, вдоль по потоку, убывает. В этой области термокапиллярная сила

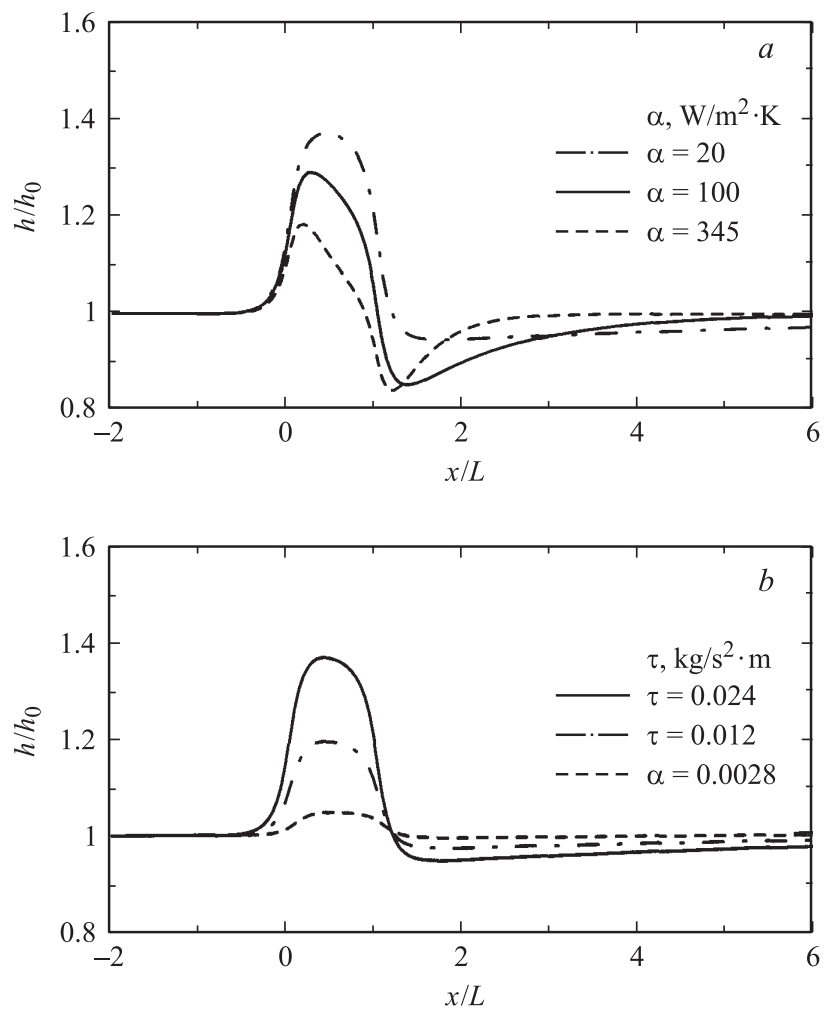


Рис. 2. Термокапиллярная деформация пленки FC-72, $T_a = T_0 = 17^\circ\text{C}$, $L = 6.7 \text{ mm}$, $\text{Re} = 1$, $q = 1000 \text{ W/m}^2$, $\varphi = 0^\circ$, нагреватель расположен от 0 до 1 по оси абсцисс, *a* — для различных коэффициентов теплоотдачи, $h_0 = 0.00017 \text{ m}$, $\tau = 0.024 \text{ kg/s}^2 \cdot \text{m}$; *b* — для различных касательных напряжений, $\alpha = 20 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$.

направлена вдоль потока, наблюдается уменьшение толщины пленки относительно начальной. Минимальная толщина пленки имеет место при максимальном коэффициенте теплоотдачи. Данная область является наиболее опасной для разрушения пленки. Затухающие вверх по потоку возмущения свободной поверхности на рис. 2, *a, b* отсутствуют, так как условие (4) не выполняется.

При постоянном числе Re с увеличением касательного напряжения, что соответствует увеличению расхода газа, начальная толщина пленки уменьшается и это приводит к усилению термокапиллярного эффекта. При относительно высокой плотности теплового потока на нагревателе и слабом теплоотводе в газовую фазу расчет предсказывает формирование термокапиллярного утолщения пленки до 30–50% от начальной толщины. Термокапиллярный валик аналогичных размеров по порядку величины наблюдался в экспериментальных [6] и теоретических исследованиях [7] при локальном нагреве гравитационно стекающей пленки жидкости по вертикальной пластине.

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы „Интеграция науки и высшего образования России на 2002–2006 годы“ (ИО734, Я0114), а также РФФИ (грант 02–02–16478).

Список литературы

- [1] *Bar-Cohen A., Sherwood G., Hodes M., Solbreken G.L.* // IEEE Transactions on CPMT. 1995. Part A. V. 18. N 3. P. 502–509.
- [2] *Aktershev S.P., Alekseenko S.V.* // Russ. J. Eng. Thermophys. 1996. V. 6. N 4. P. 307–320.
- [3] *Кабов О.А., Кузнецов В.В., Марчук И.В.* и др. // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2001. № 9. С. 84–90.
- [4] *Mikhailov M.D.* // Int. J. Engng. Sci. 1972. V. 10. N 7-A. P. 577–591.
- [5] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. С. 512.
- [6] *Кабов О.А., Лезро Ж.К., Марчук И.В., Шейд Б.* // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 200–208.
- [7] *Marchuk I.V., Kabov O.A.* // Russ. J. Eng. Thermophys. 1998. V. 8. N 1–4. P. 17–46.