

09

О времени установления синхронного режима колебаний в двух связанных идентичных подсистемах

© А.А. Короновский, А.Е. Храмов, И.А. Хромова

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
ГосУНЦ „Колледж“
E-mail: alkor@cas.ssu.runnet.ru, aeh@cas.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 6 августа 2003 г.

Изучается механизм установления синхронного режима колебаний в двух идентичных связанных потоковых системах. Показано, что время (прошедшее с момента включения связи), за которое устанавливается синхронный колебательный режим, зависит от разности фаз колебаний в подсистемах. При варьировании параметра связи происходит изменение характера зависимости длительности установления синхронного режима от разности фаз колебаний, а также выявлены несколько типов установления синхронного режима, реализующихся при различных значениях параметра связи.

Синхронизация нелинейных динамических систем, особенно синхронизация хаотических колебаний, в настоящее время привлекает к себе широкое внимание исследователей. После опубликования статей Ресога и Carroll [1,2] появилось много работ по данному направлению, и их число стремительно растет. Это обусловлено тем, что явление синхронизации связано с широким кругом задач, имеющих как фундаментальное, так и прикладное значение: секретная передача информации [3–6], биологические [7,8], химические [9], экологические [10], астрономические [11] задачи и т. п.

В последнее время наряду с задачами нахождения значений управляющих параметров, при которых реализуется режим синхронизации, определения условий разрушения синхронизации [12], установления факта слабой связи нескольких подсистем [13] внимание исследователей привлекает также время установления синхронного режима колебаний [14,15]. Внимание к этой проблеме обусловлено как теоретическими, так и практическими аспектами: например, при скрытой

передаче информации с использованием хаотической синхронизации знание интервала времени, в течение которого происходит синхронизация, позволяет корректно выделить полезную информацию [14]. В частности, в работах [14,15] на примере двух связанных идентичных генераторов Ван-дер-Поля (выбранных в качестве объекта исследования, как наиболее простых систем) было показано, что зависимость времени установления режима полной синхронизации от параметра связи подчиняется степенному закону, а также приведены некоторые количественные оценки.

Целью настоящей работы является изучение вопроса о том, как сильно зависит (и зависит ли вообще) время установления режима полной синхронизации [16] в двух связанных одинаковых системах от начальной разницы фаз в этих системах. Ранее [17] было показано, что для автоколебательных динамических систем (генератор Ван-дер-Поля и распределенная активная среда „винтовой электронный поток — встречная электромагнитная волна“), находящихся под внешним периодическим воздействием, время установления синхронных колебаний на частоте внешней вынуждающей силы существенным образом зависит от разности фаз собственных колебаний системы и внешнего воздействия.

В качестве объекта исследования, так же как и в [14,15], выбраны два генератора Ван-дер-Поля с однонаправленной связью

$$\ddot{x} + d(1 - x^2)\dot{x} + x = 0,$$

$$\ddot{u} + d(1 - u^2)\dot{u} + u = K(u - x)\delta(t - t_0), \quad (1)$$

где x, u — динамические переменные, характеризующие состояние первого (ведущего) и второго (ведомого) генератора соответственно; $d = 0.3$ — параметр нелинейности, K — параметр связи, $\delta(\xi)$ — функция Хевисайда, t_0 — момент времени, в который осуществляется включение однонаправленной связи. До этого момента времени t_0 обе системы эволюционируют независимо друг от друга, причем значение t_0 выбирается достаточно большим, чтобы в обеих системах переходные процессы завершились, и изображающие точки в фазовых пространствах вышли на предельные циклы.

Численное моделирование системы (1) осуществлялось методом Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом по времени $h = 0.001$. Интервал времени T_s , в течение которого устанавливается режим

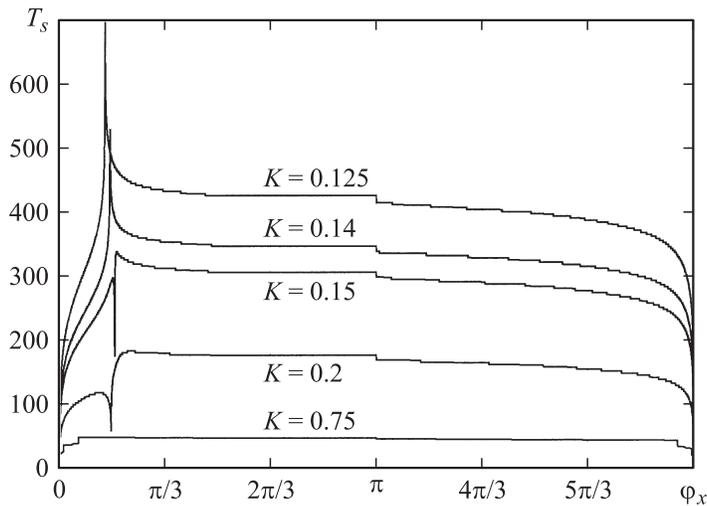


Рис. 1. Зависимости интервала времени T_s , за который устанавливается режим полной синхронизации после включения связи между автогенераторами, от начальной фазы колебаний первого (ведущего) генератора $\varphi_x(t_0)$ для различных значений параметра связи K .

полной синхронизации, определялся как

$$T_s = t_s - t_0, \quad (2)$$

где t_s — момент времени, когда связанные подсистемы синхронизируются. В качестве критерия полной синхронизации выбиралось условие

$$\sqrt{(x - u)^2 + (\dot{x} - \dot{u})^2} \leq 10^{-3}. \quad (3)$$

На рис. 1 приведены характерные зависимости интервала времени T_s , за который в системе (1) устанавливается режим полной синхронизации после включения связи между автогенераторами, от начальной фазы колебаний первого (ведущего) генератора $\varphi_x(t_0)$. Момент времени t_0 , когда осуществляется включение однонаправленной связи, выбирается таким образом, чтобы фаза колебаний второго (ведомого) генератора $\varphi_u(t_0)$ была равна нулю. Фактически, изучается зависимость

времени установления режима полной синхронизации от начальной разности фаз $\varphi_x(t_0) - \varphi_u(t_0)$ в ведущем и ведомом генераторах в момент включения связи. Исследования показали, что при выборе другого значения начальной фазы ведомого генератора $\varphi_u(t_0)$ зависимость времени T_s установления синхронного режима от начальной фазы ведущего генератора $\varphi_x(t_0)$ сдвигается вдоль оси $\varphi_x(t_0)$, при этом никаких качественных изменений характера зависимости не происходит.

Из рис. 1 видно, что время, за которое устанавливается синхронный режим, зависит от начальной разности фаз колебаний ведущего и ведомого автогенераторов. Очевидно, что в том случае, когда первоначальная разность фаз колебаний генераторов $\varphi_x(t_0) - \varphi_0(t_0)$ в момент включения связи равняется нулю, колебания изначально являются синхронными, а следовательно время синхронизации также равно нулю (рис. 1).

При начальной разности фаз, отличной от нуля, время синхронизации системы (1) отлично от нуля, при этом время синхронизации слабо изменяется в достаточно широком диапазоне изменения начальной фазы ведущего генератора $\varphi_x(t_0)$. В то же самое время из приведенных зависимостей отчетливо видно, что для малых значений параметра связи K существуют такие значения фазы $\varphi_x(t_0)$, при которых длительность интервала времени синхронизации существенно отличается от типичного значения T_s . В этом случае при величине параметра связи K меньше некоторого критического значения K_c (для указанных значений управляющих параметров $K_c \approx 0.145$) существует такая начальная фаза ведущего генератора $\varphi_x(t_0) = \varphi_c$, для которой длительность времени синхронизации значительно возрастает. С увеличением значения параметра связи K и превышением им некоторого критического значения происходит качественное изменение характера зависимости длительности интервала времени синхронизации T_s от начальной разности фаз автогенераторов (рис. 1, кривые, соответствующие $K = 0.14$ и $K = 0.15$) — примерно при том же значении фазы ведущего генератора φ_c на графике зависимости наблюдается резкий минимум,¹ что свидетельствует о том, что режим полной синхронизации устанавливается существенно быстрее, нежели в типичном случае. С дальнейшим увеличением значения параметра связи K длительность

¹ Следует заметить, что с изменением параметра связи K значение фазы φ_c , при которой длительность установления синхронного режима существенно отличается от типичного случая, слегка изменяется.

интервала времени, в течение которого устанавливается режим полной синхронизации, уменьшается, а все различия в зависимости от начальной разности фаз автогенераторов практически исчезают (рис. 1, кривая, соответствующая $K = 0.75$).

Рассмотрим особенности установления режима полной синхронизации в системе (1) для значения параметра связи $K = 0.15$. При данном значении параметра связи на зависимости длительности T_s установления синхронного режима от значения начальной фазы $\varphi_x(t_0)$ ведущего генератора (рис. 1) имеется особенность (минимум длительности) при $\varphi_c = 0.547$.

При начальных фазах ведущего генератора $\varphi_x(t_0) \in (0, \varphi_c)$ ведомая система ведет себя следующим образом (рис. 2, *a*): амплитуда колебаний резко уменьшается, а затем с течением времени снова приближается к величине, соответствующей установившемуся режиму. Этот механизм позволяет ликвидировать несоответствие в фазах колебаний ведущей $\varphi_x(t)$ и ведомой $\varphi_u(t)$ подсистем. Фазовая траектория, соответствующая поведению ведомой подсистемы, „накручивается“ на предельный цикл изнутри; при этом значительная часть времени после того, как амплитуда в ведомой системе вышла на первоначальное значение, тратится на тонкую подстройку фазового соотношения между двумя генераторами.

При начальных фазах ведущего генератора $\varphi_x(t_0) \in (\varphi_c, 2\pi)$ ведомая система ведет себя несколько иначе (рис. 2, *c*): снова, как и в предыдущем случае, амплитуда колебаний резко уменьшается, а затем приближается к величине, соответствующей установившемуся режиму. Но теперь фазовая траектория, соответствующая поведению ведомой подсистемы, „накручивается“ на предельный цикл снаружи. Случай $\varphi_x(t_0) = \varphi_c$ соответствует „пограничной“ ситуации, когда осуществляется переход от первого сценария поведения ведомого генератора ко второму (рис. 2, *b*). В этом случае реализуется оптимальная с точки зрения установления синхронного режима ситуация: после того как амплитуда колебаний в системе достигает значения, соответствующего установившемуся режиму, фазы колебаний в обеих системах оказываются одинаковыми и на тонкую подстройку фазы время уже не тратится.

При меньших значениях параметра связи K воздействие первого генератора на второй оказывается уже недостаточным для того, чтобы реализовался вышеописанный механизм подстройки фазы, связанный с резким уменьшением амплитуды колебаний в ведомой подсистеме и последующим выходом амплитуды на первоначальное значение, после

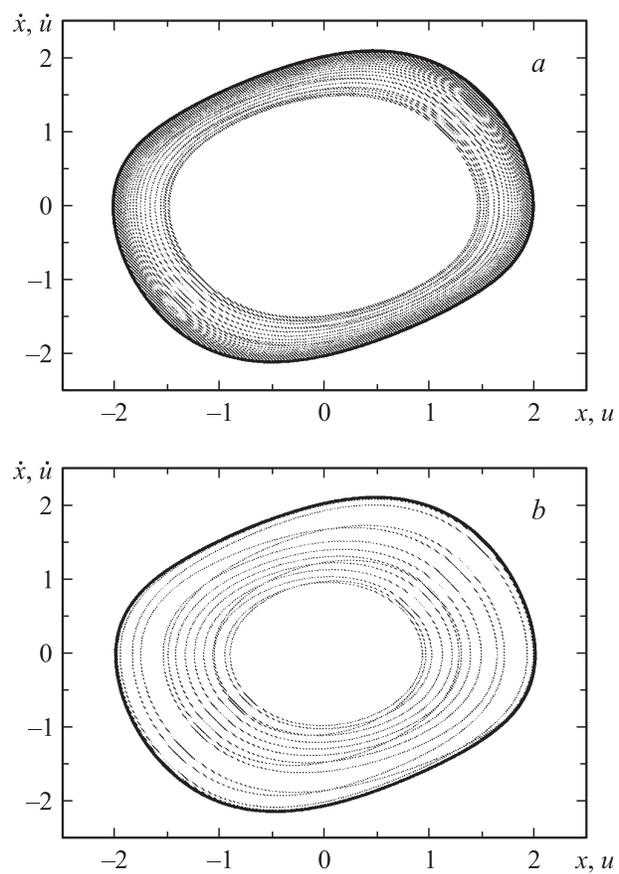


Рис. 2. Фазовые портреты поведения системы (1) при значении параметра связи $K = 0.15$. Предельный цикл, показанный черным цветом, соответствует поведению первого ведущего генератора (переменные x и \dot{x}), светло-серая фазовая траектория соответствует поведению второго (ведомого) генератора (переменные u и \dot{u}), начиная с момента времени t_0 и заканчивая t_s . Начальная фаза ведомого генератора $\varphi_u(t_0)$ равна нулю, а начальная фаза ведущего генератора равна: $a - \varphi_x(t_0) = 0.5$; $b - \varphi_x(t_0) = \varphi_c = 0.547$; $c - \varphi_x(t_0) = 0.55$.

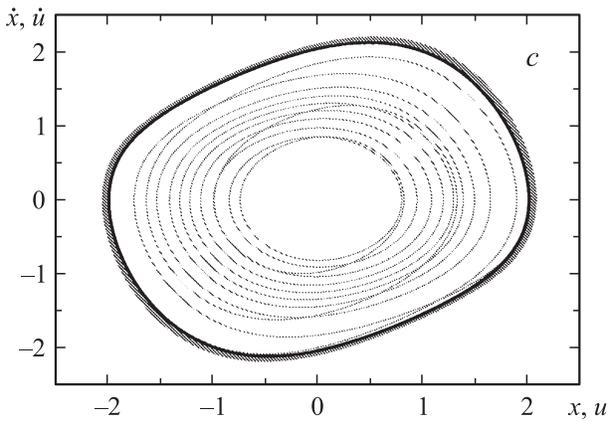


Рис. 2 (продолжение).

чего уже реализуется тонкая подстройка фазы. При малых значениях параметра связи K амплитуда колебаний в ведомой подсистеме меняется незначительно, а расстройка фаз колебаний в двух подсистемах ликвидируется постепенно, что приводит к общему возрастанию длительности интервала времени T_s , за который осуществляется синхронизация, а также смене характера особенности (с минимума на максимум) зависимости времени синхронизации от фазы для φ_c .

Наконец, при больших значениях параметра связи K (рис. 1, кривая, соответствующая $K = 0.75$) механизм установления синхронного режима следующий: при включении связи воздействие ведущей подсистемы приводит к тому, что в ведомой подсистеме происходит резкое изменение амплитуды колебаний (сначала резкое уменьшение, затем возрастание), за счет которого ликвидируется несоответствие между фазами колебаний в обеих подсистемах. При этом никакой тонкой подстройки фазы уже не требуется. В силу этого время установления синхронного режима при больших величинах параметра связи K практически не зависит от соотношения фаз в ведущем и ведомом генераторах.

Таким образом, в настоящей работе показано, что в двух одинаковых подсистемах время установления режима полной синхронизации

зависит от разности фаз колебаний в этих подсистемах. Показано, что существует несколько механизмов установления синхронного режима, реализующихся при различных значениях параметра связи K .

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы „Интеграция“ (проект Б0057), Программы поддержки ведущих научных школ РФ, а также научно-образовательного центра „Нелинейная динамика и биофизика“ при Саратовском госуниверситете им. Н.Г. Чернышевского (грант REC-006 of U.S. Civilian Research and development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)).

Список литературы

- [1] Pecora L.M., Carroll T.L. // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64 (8). P. 821–824.
- [2] Pecora L.M., Carroll T.L. // Phys. Rev. A. 1991. V. 44 (4). P. 2374–2383.
- [3] Pyragas K. // Phys. Rev. E. 1998. V. 58 (3). P. 3067–3071.
- [4] Murali K., Lakshmanan M. // Phys. Rev. E. 1994. V. 49 (6). P. 4882–4885.
- [5] Murali K., Lakshmanan M. // Phys. Rev. E. 1994. V. 48 (3). P. R1624–R1626.
- [6] Cuomo K.M., Oppenheim A.V. // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71 (1). P. 65–68.
- [7] Постнов Д.Э., Хан С.К. // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25 (4). С. 11–18.
- [8] Anishchenko V.S., Balanov A.G., Janson N.B., Igosheva N.B., Bordyugov C.V. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10 (10). P. 2339–2348.
- [9] Parmananda P. // Phys. Rev. E. 1997. V. 56 (2). P. 1595–1598.
- [10] Blasius B., Stone L. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10 (10). P. 2361–2380.
- [11] Palus M., Kurths J., Schwarz U., Novotna D., Charvatova I. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10 (11). P. 2519–2526.
- [12] Corron N.J. // Phys. Rev. E. 2001. V. 63. P. 055203.
- [13] Rosenblum M.G., Pikovsky A., Kurths J. // IEEE Trans. Circuits and Syst. 1997. V. 44 (10). P. 874–881.
- [14] Wojfo P., Kraenkel R.A. // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 036225.
- [15] Leung H.K. // Phys. Rev. E. 1998. V. 58 (5). P. 5704–5709.
- [16] Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999.
- [17] Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е. // Докл. РАН. 2003. Т. 389 (6). С. 749–752.