

09

К вопросу об управлении динамическими режимами в системе, демонстрирующей мультистабильность

© Е.Н. Егоров, А.А. Короновский

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
ГосУНЦ „Колледж“
E-mail: Egorov@cas.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 5 августа 2003 г.

Рассматривается возможность управления колебательными режимами динамической системы, в которой при определенных значениях управляющих параметров наблюдается мультистабильность. В качестве такой системы изучается отображение Эно. Показано, что при таком параметрическом воздействии при подавлении нежелательного динамического режима в системе может установиться другой режим, а также возможно неограниченное нарастание значения динамической переменной, характеризующей состояние системы. Выявлена чувствительная зависимость установившегося режима от малых флуктуаций фазы параметрического воздействия.

Системы, демонстрирующие мультистабильность, достаточно часто встречаются исследователям. Природа таких систем весьма разнообразна [1–6]. Явление мультистабильности можно наблюдать как в реальных физических системах, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений (например, в лазерах [4] или радиофизических системах [6–8], так и в эталонных системах с дискретным временем (отображение Эно [9] и т.д.). Это явление обуславливает возможность сосуществования в фазовом пространстве системы различных колебательных режимов при одних и тех же значениях управляющих параметров. Мультистабильное поведение системы приводит к тому, что асимптотическое состояние, на которое выйдет система при $t \rightarrow \infty$ при данных начальных условиях, зачастую очень трудно предсказать. В частности, границы бассейнов притяжения в фазовом пространстве системы могут иметь фрактальную структуру [10–12], что ведет к увеличению фактора непредсказуемости при работе с системой. Как правило, подобная особенность может стать помехой для работы

системы и потому нежелательна, а в некоторых случаях вредна. В связи с этим возникает вопрос об управлении динамическим состоянием системы.

Решение этой проблемы заключается в возможности тем или иным способом воздействовать на систему для выделения какого-либо одного динамического режима и подавления остальных. Одним из способов управления состоянием динамической системы является параметрическое воздействие [7,8,13]. При таком воздействии происходит периодическая модуляция одного из управляющих параметров системы:

$$p = p_0 + F(t), \quad (1)$$

где p — управляющий параметр, а $F(t)$ — некоторая периодическая функция, зависящая от времени. Механизм параметрического воздействия может носить как резонансный, так и нерезонансный характер (чуть подробнее о них будет сказано ниже). Выбор того или иного метода воздействия, как правило, диктуется изучаемой системой. При этом для эффективного управления колебательными режимами необходимо подобрать оптимальные значения частоты и амплитуды модуляции.

Параметрический метод воздействия в англоязычных изданиях называется „управление без обратной связи“ (nonfeedback control). Это название подчеркивает и противопоставляет данный метод другим методам, которые для управления динамикой системы используют цепь обратной связи. Преимуществом этого метода по сравнению с остальными является то, что в данном случае не требуется априорного подробного знания поведения системы в фазовом пространстве, а также не требуется цепи обратной связи. Последнее является положительным моментом для изучения систем, в которые трудно или невозможно ввести обратную связь.

В работах, посвященных тематике управления без обратной связи, как правило, изучается возможность стабилизации неустойчивых орбит, „защитых“ в странном аттракторе, который соответствует хаотическому режиму в фазовом пространстве [13,14]. Однако в случае, когда существует мультистабильность, требуется решить обратную задачу. Необходимо выделить в динамике системы некоторый режим, подавив другие, сосуществующие с ним. Для решения этой проблемы [15,16] было предложено использовать тот же самый метод — метод „управления без обратной связи“ (другими словами, параметрическое воздействие) на примере отображения Эно [17].

В то же самое время известно, что при внешнем воздействии на систему важную роль играет также соотношение между фазами колебаний в системе и внешнего воздействия [18]. Целью настоящей работы является изучение вопроса о том, какую роль играет начальная фаза при параметрическом воздействии на систему. В качестве объекта исследований, как и в работах [15,16], было выбрано отображение Эно:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \mu x_n^2 + y_n, \\y_{n+1} &= -Jx_n.\end{aligned}\tag{2}$$

При значениях управляющих параметров ($\mu = 1.083$, $J = 0.9$) данная система является мультистабильной. В фазовом пространстве системы в этом случае сосуществуют три цикла — цикл периода 1, периода 3 и периода 9. Подобное поведение сохраняется в очень узком диапазоне значений параметра: $1.077 < \mu < 1.089$. За пределами этого диапазона сосуществуют два режима — режим периода 3 и периода 1. При этом бассейны притяжения аттракторов в фазовом пространстве системы имеют сложное фрактальное строение (рис. 1, *a*).

Параметрическое воздействие в данную систему вводилось следующим образом: при значениях параметров, когда в системе сосуществуют несколько колебательных режимов, выбирался переходный процесс, достаточный для выхода системы на некоторый цикл. В момент дискретного времени n_0 включалось параметрическое воздействие в виде осциллирующей добавки к величине управляющего параметра μ . Координаты изображающей точки в фазовом пространстве и параметр J при этом оставались прежними. Следуя работе [16], параметр μ в соответствии с (1) модулировался периодическим сигналом следующим образом:

$$\mu = \mu_0 + \mu_c \sin(2\pi f_c n + \psi_0),\tag{3}$$

где μ_0 — некоторое постоянное значение управляющего параметра, вокруг которого вводилось малое периодическое колебание с амплитудой μ_c и частотой f_c . Отличием данной работы является то, что параметрическая модуляция рассматривалась с некоторой начальной фазой ψ_0 , в то время как в других работах авторы, как правило, оставляют в стороне вопрос зависимости колебательного режима от фазы и рассматривают случай нулевой начальной фазы.

Для того чтобы подобное параметрическое воздействие повлияло на устойчивость притягивающей точки (цикла), необходимо, чтобы

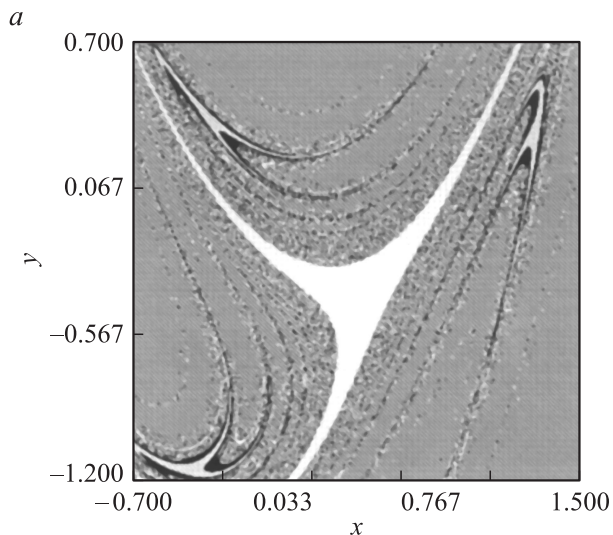


Рис. 1. Строение бассейнов притяжения в фазовом пространстве отображения Эно для значения управляющих параметров $\mu = 1.083$, $J = 0.9$: *a* — без параметрического воздействия, цветами обозначены бассейны притяжения аттракторов: белым цветом — цикл периода 1; светло-серым — цикл периода 3; более темным оттенком серого — область разбегания фазовых траекторий; цикл периода 9 — обозначен черным цветом; *b* — с параметрическим воздействием, начальная фаза параметрического воздействия $\psi_0 = 0.31$: светлым изображен бассейн притяжения режима периода 1, параметры воздействия $\mu_c = 0.05$, $f_c = 0.11$; *c* — при наличии параметрического воздействия с теми же значениями параметров, начальная фаза воздействия $\psi_0 = 1.51$. *b*, *c* — черными кружками обозначены точки цикла периода 3.

точка (цикл) характеризовалась комплексно-сопряженными мультипликаторами. Частота собственных колебаний f_r может быть определена численно, точно так же как частота колебательного движения осциллятора с затуханием, после выведения его из состояния равновесия [16]. Таким образом, подбирая частоту f_c близкой к частоте f_r и варьируя величину амплитуды μ_c параметрического воздействия, можно добиться того, что устойчивое ранее состояние потеряет свою устойчивость и в системе установится иной динамический режим [16]. Амплитуда

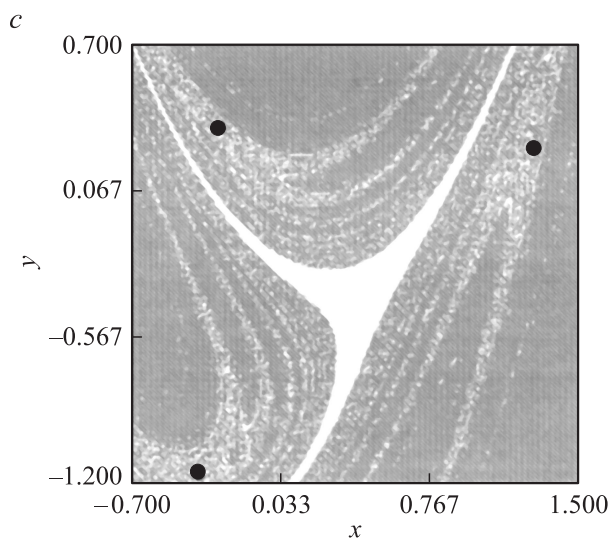
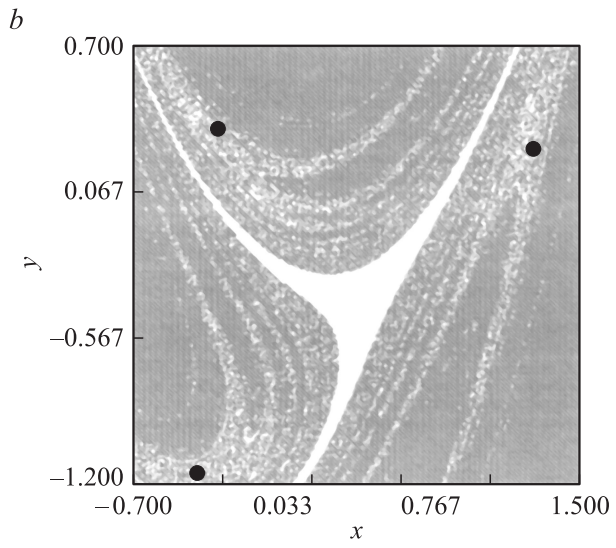


Рис. 1 (продолжение).

параметрического воздействия при этом такова, что изменение параметра μ на величину μ_c в отсутствие гармонической добавки не приводит ни к каким качественным изменениям в поведении системы. В этом случае параметрическое воздействие является резонансным. В случае нерезонансного воздействия частота f_c не обязательно должна совпадать с частотой f_r . Этот метод также называется низкочастотным параметрическим воздействием, имея в виду условие $f_c \ll f_r$. Однако в этом случае амплитуда воздействия должна быть достаточной для того, чтобы система могла без резонансного взаимодействия пере-сесть границы бассейна притяжения аттрактора подавляемого режима [14].

Удобнее всего проследить изменения динамики системы при параметрическом воздействии на системы с помощью изучения строения бассейнов притяжения в фазовом пространстве (рис. 1, *b, c*). На приведенном рисунке изображены бассейны притяжения аттракторов, реализующихся в фазовом пространстве системы (2), для различных значений фаз параметрического воздействия, которое имело следующие характеристики: $f_c = 0.11$, $\mu_c = 0.05$. Видно, что в случае когда на систему оказывалось параметрическое воздействие, бассейны притяжения для циклов периода 3 и 9 были подавлены.

Надо отметить, что амплитуда параметрического воздействия, выбранная в работе, по своей величине значительно превышает величину параметра μ , необходимую для подавления цикла периода 9 [16]. То есть при значениях параметра $\mu_1 = \mu_0 + \mu_c$ и $\mu_2 = \mu_0 - \mu_c$ в системе уже не наблюдается колебательного режима периода 9, в то время как цикл периода 3 сохраняется. При таком воздействии в системе наблюдается стационарное состояние.¹ Области карты режимов, ранее занимаемые бассейнами притяжения циклов периода 3 и 9, на рисунке (рис. 1, *b, c*) заняты бассейнами притяжения цикла периода 1 и аттрактором, расположенным на бесконечности. В то же самое время никаких существенных различий в структуре бассейнов притяжения аттракторов, построенных для различных значений начальной фазы параметрического воздействия, не наблюдается.

¹ Отметим также, что результирующие колебания модулированы с частотой, соответствующей частоте параметрического воздействия, однако глубина модуляции гораздо меньше величины самого сигнала и имеет величину порядка 10^{-3} . Колебания такой амплитуды можно не принимать во внимание на фоне основных колебаний, характерные масштабы которых составляют величину порядка единицы.

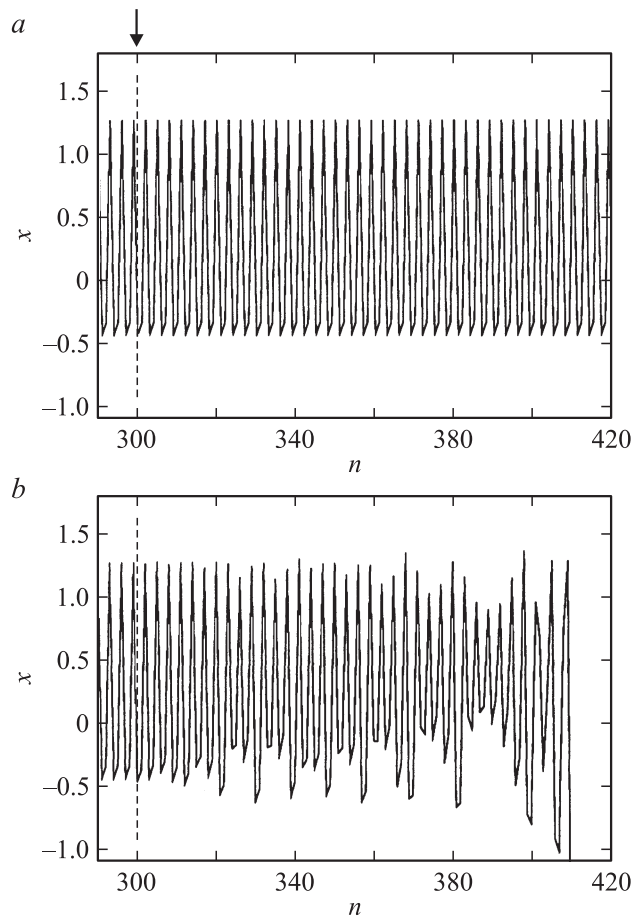


Рис. 2. Временные реализации $x(t)$ для отображения Эно: a — без параметрического воздействия; b, c — при наличии параметрического воздействия, где $\psi_0 = 0.31$ (b) и $\psi_0 = 1.51$ (c); штриховой линией и стрелкой обозначен момент дискретного времени n_0 , в который включалось параметрическое воздействие.

Следует отметить, что бассейны притяжения обоих аттракторов в точках, где ранее располагались элементы цикла периода 3, оказываются „изрешеченными“, иными словами, малые возмущения (в качестве

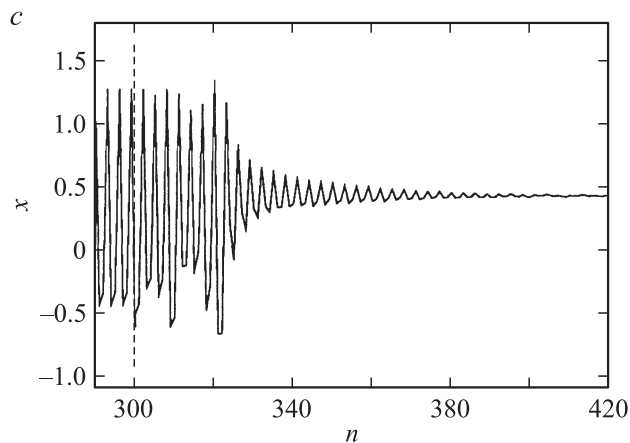


Рис. 2 (продолжение).

которых могут выступать как шумы, так и изменение начальной фазы параметрического воздействия ψ_0) играют ключевую роль в том, к какому из оставшихся аттракторов будет притянута в конечном итоге изображающая точка. Сказанное иллюстрирует рис. 2, *a*, на котором приведена временная реализация, соответствующая поведению системы без параметрического воздействия, когда в системе реализуется цикл периода 3, и рис. 2, *b, c*, на которых показано поведение системы, стартующей с тех же начальных условий, что и раньше, при условии параметрического воздействия. Момент включения параметрического воздействия показан на рисунке стрелкой. Отчетливо видно, что параметрическое воздействие, включаемое в одну и ту же фазу колебаний системы, но с разной начальной фазой, может привести к совершенно противоположным результатам. После включения параметрического воздействия, приводящего к подавлению цикла периода 3, динамическая переменная может достичь стационарного значения (рис. 2, *c*), но может и начать неограниченно расти (рис. 2, *b*). При попытке управления с помощью параметрического воздействия поведением какой-либо реальной физической (биологической, химической и т. п.) системы подобное явление может оказаться крайне нежелательным и приводить к разрушению системы в целом.

Таким образом, в данной работе рассматривается метод параметрического воздействия применительно к задаче управления колебательными режимами системы, демонстрирующей мультистабильность. В работе рассматривалась система с дискретным временем — отображение Эно. Было изучено параметрическое воздействие на данную систему и показано, что режим, который установится в результате такого воздействия, существенным образом может зависеть от малых изменений фазы параметрического воздействия и шумов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-02-16351), программы „Университеты России. Фундаментальные исследования“ (проект УР.01.01.065), а также научно-образовательного центра „Нелинейная динамика и биофизика“ при Саратовском госуниверситете им. Н.Г. Чернышевского (грант REC-006 of U.S. Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)).

Список литературы

- [1] *Arecchi F.T., Meucci R., Puccioni G., Tredicce J.* // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 1217.
- [2] *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. N 13. P. 935–938.
- [3] *Grebogi C., Kostelich E., Ott E., Yorke J.A.* // Physica D. 1987. V. 25. P. 347.
- [4] *Arecchi F.T., Puccioni G., Poggi A., Gadomski W.* // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 1217.
- [5] *Андрушкевич А.В.* и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. XXXVIII. № 11. P. 1195–1203.
- [6] *Егоров Е.Н., Короновский А.А.* // Изв. вузов. ПНД. 2002. Т. 10. № 1–2. С. 104–112.
- [7] *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. литер., 1984. 432 с.
- [8] *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999. 368 с.
- [9] *Curry J.* // Commun. Math. Phys. 1979. V. 68. P. 129.
- [10] *Eschenazi E., Solari H.G., Gilmore R.* // Phys. Rev. A. 1989. V. 39. N 5. P. 2609–2627.
- [11] *Feudel U., Witt A., Lai Y.-C., Grebogi C.* // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. N 3. P. 3060–3066.
- [12] *Schmick M., Goles E., Markus M.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. N 1. P. 397–401.

- [13] *Lima R., Pettini M.* // Phys. Rev. A. 1990. V. 41. N 2. P. 726–733.
- [14] *Pisarchik A.N., Chizevsky V.N., Corbalan R., Vilaseca R.* // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. N 3. P. 2455–2461.
- [15] *Pisarchik A.N., Goswami B.K.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 1423–1426.
- [16] *Pisarchik A.N.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 46203.
- [17] *Henon M.* // Commun. Math. Phys. 1976. V. 50. P. 69.
- [18] *Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* // ДАН. 2003. Т. 389. № 6. С. 749–752.