

01

## Смена характера модуляционной неустойчивости вблизи критической частоты

© А.А. Балякин, Н.М. Рыскин

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: RyskinNM@info.sgu.ru

BalyakinAA@info.sgu.ru

Поступило в Редакцию 18 июля 2003 г.

В окончательной редакции 10 сентября 2003 г.

Анализируется модуляционная неустойчивость при распространении квазигармонической волны в кубично-нелинейной среде вблизи критической частоты. Показано, что по мере увеличения амплитуды волны происходит смена характера неустойчивости с конвективной на абсолютную. Физически это объясняется расширением диапазона неустойчивых возмущений, которые захватывают область встречных волн, имеющих отрицательную групповую скорость. Представлены результаты компьютерного моделирования, подтверждающие развитую теорию.

Распространение плоской квазимонохроматической волны в кубично-нелинейной среде с дисперсией обычно описывается при помощи нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) [1–4]

$$i \left( \frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\omega_0''}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \beta |A|^2 A = 0. \quad (1)$$

Здесь  $A$  — медленно меняющаяся комплексная амплитуда волны с некоторой несущей частотой  $\omega$ ,  $V = \partial\omega/\partial k$  — групповая скорость,  $\omega_0'' = \partial^2\omega/\partial k^2$  — параметр дисперсии,  $\beta$  — параметр нелинейности. Простейшее решение уравнения (1) имеет вид монохроматической волны с постоянной амплитудой  $A(x, t) = A_0 \exp[i(kx - \omega t)]$ , где частота  $\omega$  и волновое число  $k$  связаны нелинейным дисперсионным соотношением

$$\omega = kV + \omega_0'' k^2/2 - \beta A_0^2. \quad (2)$$

Хорошо известно, что при выполнении условия  $\omega_0''\beta > 0$  эти решения неустойчивы относительно медленных модуляций с частотами, лежа-

шими в некотором интервале вблизи частоты несущей волны, т.е. имеет место модуляционная неустойчивость (МН) [1–4]. Далее без ограничения общности будем считать  $\omega_0'' > 0$ ,  $\beta > 0$ . Как и всякая неустойчивость, МН может быть либо абсолютной, либо конвективной. Понятно, что процессы распространения волны будут определяться характером неустойчивости. Если рассмотреть среду конечной протяженности, возбуждаемую на левой границе гармоническим сигналом,  $A(0, t) = A_0 \exp(-i\omega t)$ , то в случае конвективной неустойчивости нарастающие возмущения будут сноситься вправо и покидать систему через правую границу, так что в конце концов по окончании переходного процесса установится одночастотное состояние. Если же неустойчивость абсолютная, то возмущения будут непрерывно генерироваться по всей длине системы, и в результате установится режим многочастотных колебаний. Более того, в ряде работ, посвященных распространению нелинейных магнитостатических волн, в результате натуральных и численных экспериментов было обнаружено, что при достаточно большой интенсивности входного сигнала могут устанавливаться нерегулярные режимы хаотических колебаний со сплошным спектром [5–7]. Подчеркнем, что эти явления носят автоколебательный характер и не могут быть объяснены усилением флуктуаций.

Получим простой критерий, позволяющий определить характер неустойчивости. Как обычно поступают при анализе устойчивости [1–4], зададим малое возмущение монохроматического решения в виде двух саттелитов, симметрично отстоящих от несущей частоты. Дисперсионное соотношение для частоты  $\Omega$  и волнового числа  $K$  этих возмущений имеет вид

$$(\Omega - K v_g(\omega))^2 = (\omega_0'' K^2 / 2)^2 - \beta \omega_0'' |A_0|^2 K^2, \quad (3)$$

где  $v_g(\omega) = V + \omega_0'' k$  — групповая скорость на частоте  $\omega$ . Обычно при анализе МН считают  $K$  вещественным, что позволяет записать (3) в виде  $\Omega = K v_g(\omega) \pm i\lambda(K)$ , где  $\lambda(K) = (\beta \omega_0'' |A_0|^2 K^2 - (\omega_0'' K^2 / 2)^2)^{1/2}$  — инкремент неустойчивости [1–4]. Неустойчивыми являются возмущения, волновые числа которых лежат в интервале  $K^2 < K_0^2 = 4\beta |A_0|^2 / \omega_0''$ . Максимальное значение инкремента имеет возмущение с волновым числом  $K_m = K_0 / \sqrt{2}$ .

Однако для того чтобы выяснить характер неустойчивости, этого недостаточно. Используем известный метод, основанный на анализе

асимптотического выражения для возмущения, вычисляемого при помощи метода перевала (см., например, [4], гл. 12). При этом  $\Omega$  и  $K$  в (3) считаются комплексными. После не представляющих принципиальной сложности, хотя несколько громоздких вычислений, которые будут представлены в отдельной работе, можно получить критерий абсолютной неустойчивости, т.е. условие того, что возмущение нарастает со временем в фиксированной точке пространства:

$$\beta|A_0|^2 > V^2/2\omega_0'' + \omega. \quad (4)$$

Из этого выражения следует, что если частота внешнего сигнала фиксирована, по мере увеличения интенсивности будет наблюдаться нелинейный эффект смены характера неустойчивости с конвективной на абсолютную.

Физически смена характера неустойчивости объясняется следующим. Закон дисперсии (2) является параболическим и допускает распространение волн с частотами выше критической частоты  $\omega_c = -V^2/2\omega_0'' - \beta|A_0|^2$ , зависящей от амплитуды. Этой частоте соответствует критическое значение волнового числа  $k_c = -V/\omega_0''$ . Критерию (4) можно придать вид

$$k - K_0 < k_c. \quad (5)$$

Здесь  $k$  и  $K_0$  зависят от амплитуды. Мы считаем заданной частоту  $\omega$ , тогда из (2) можно найти несущее волновое число  $k(\omega, A_0)$ . При этом необходимо выбирать корень, соответствующий волне, распространяющейся вправо. Поскольку неустойчивыми являются возмущения, волновые числа которых лежат в диапазоне  $[k - K_0; k + K_0]$ , из (5) следует, что неустойчивость будет абсолютной, если существуют нарастающие возмущения, групповая скорость которых отрицательна. Это приводит к внутренней распределенной обратной связи, необходимой для возбуждения автоколебаний. В результате монохроматическое состояние теряет устойчивость и возникает автомодуляция, т.е. периодические осцилляции амплитуды волны. Частоту автомодуляции  $\omega_a$  можно найти, подставляя в выражение для критической частоты пороговое значение амплитуды, что дает

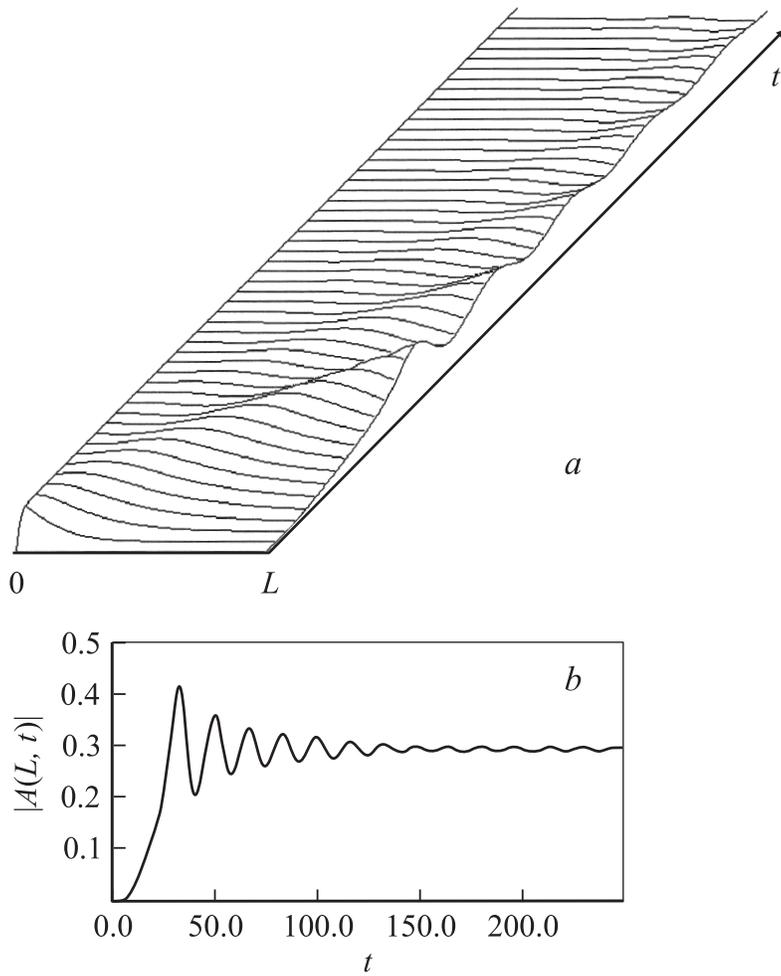
$$\omega_a = -\omega - V^2/\omega_0''. \quad (6)$$

Необходимо отметить, что принципиальную роль в данном случае играет наличие критической частоты и присутствие волн с отрицательной групповой скоростью. В то же время описание при помощи

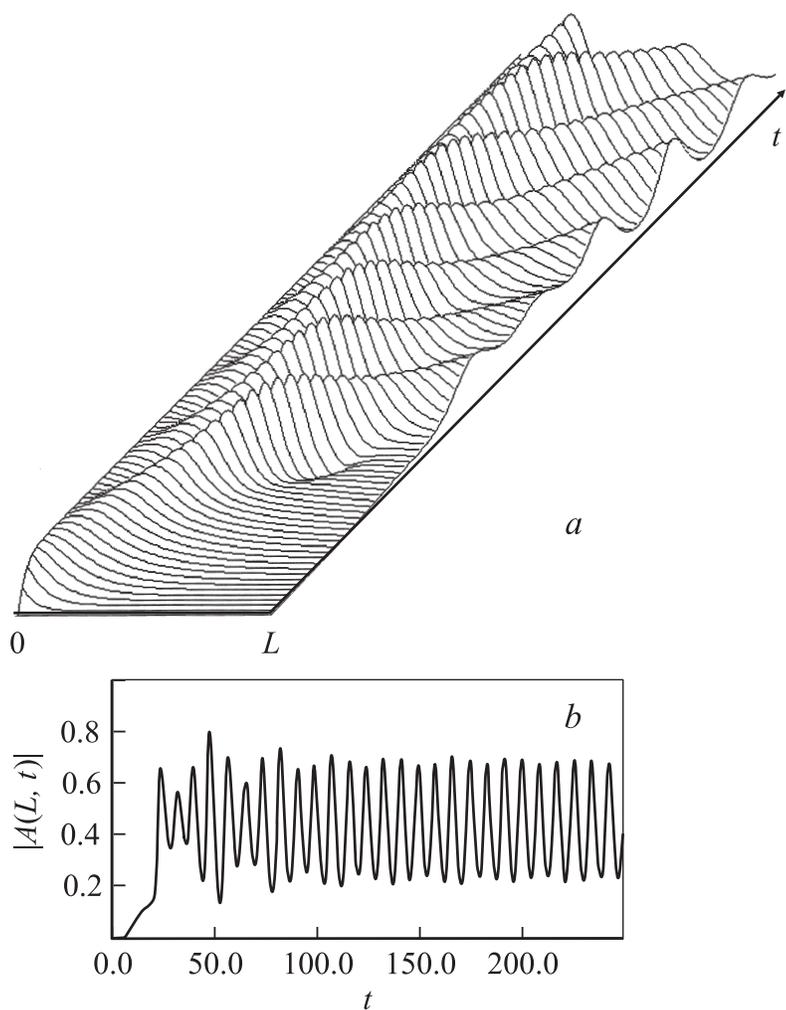
НУШ является приближенным и основано на аппроксимации дисперсионной характеристики реальной системы параболой, что справедливо лишь в некоторой окрестности несущей частоты [2,4]. Если исходный закон дисперсии не допускает встречного распространения, МН может быть только конвективной. В этом случае переход к абсолютной неустойчивости определяет границы применимости модели (1). Тем не менее рассматриваемая в настоящей работе ситуация характерна для многих важных задач, например связанных с распространением волн в различных периодических нелинейных структурах.

Сделанные выводы подтверждаются результатами численного решения уравнения (1). На левой границе задавалось граничное условие в виде  $A(0, t) = A_0 \text{th}(t) \exp(-i\omega t)$ , что обеспечивало плавное нарастание амплитуды входного сигнала. Начальное условие выбиралось в виде  $A(x, t = 0) = 0$ . Чтобы исключить эффекты отражения и реализовать режим однонаправленного распространения, граничное условие справа ставилось в виде так называемого поглощающего слоя, т.е. считалось, что интересующая нас область имеет некоторую конечную длину  $L$ , а при  $x > L$  в уравнение (1) вводится затухание с коэффициентом, плавно нарастающим вдоль координаты. Расчеты проводились в широком диапазоне управляющих параметров; для определенности все представленные ниже результаты приведены для случая  $\beta = 1$ ,  $\omega_0''/2 = 1$ ,  $\omega = 0$ , остальные значения указаны в подрисуночных подписях.

На рис. 1 и 2 приведены примеры пространственно-временной динамики и зависимостей амплитуды от времени в точке  $x = L$  в режимах конвективной и абсолютной неустойчивостей соответственно. Видно, что в первом случае на переднем фронте появляются нарастающие возмущения, которые сносятся вправо и покидают систему через правую границу. В фиксированной точке осцилляции амплитуды постепенно затухают, и в итоге устанавливается одночастотный режим распространения с постоянной амплитудой. При абсолютной неустойчивости нарастающие возмущения непрерывно генерируются вдоль всей длины системы и устанавливается режим автомодуляции, в котором амплитуда сигнала периодически осциллирует. Отметим, что рассчитанные численно порог и частота автомодуляции полностью согласуются с теоретическими значениями (4), (6). Поскольку основная частота и частота автомодуляции в общем случае не находятся в резонансном соотношении, возникают двухчастотные квазипериодические колебания. По мере увеличения интенсивности входного сигнала глубина авто-



**Рис. 1.** Распространение сигнала в случае конвективной неустойчивости ( $V = 1.2, A_0 = 0.3$ ): *a* — пространственно-временная динамика; *b* — временная реализация в точке  $L = 10$ .



**Рис. 2.** Распространение сигнала в случае абсолютной неустойчивости ( $V = 1.4, A_0 = 0.6$ ):  $a$  — пространственно-временная динамика;  $b$  — временная реализация в точке  $L = 10$ .

модуляции увеличивается, и сигнал в точке  $x = L$  приобретает вид последовательности солитоноподобных импульсов.

При достаточно большом превышении порога абсолютной неустойчивости колебания становятся хаотическими. Основным сценарием перехода к хаосу является разрушение квазипериодического движения (сценарий Рюэля–Тakens). Мы не приводим здесь результатов расчетов, иллюстрирующих переход к хаосу, так как они качественно аналогичны представленным в [6,7]. Однако в этих работах не была выявлена связь с переходом от конвективной неустойчивости к абсолютной и с близостью к критической частоте. Непосредственное количественное сопоставление провести затруднительно, так как в [6,7] рассматривался случай сильной диссипации. Поскольку НУШ играет роль универсальной модели, описывающей распространение огибающей волнового пакета в диспергирующих средах [1–4], полученные результаты представляют интерес с точки зрения объяснения природы пространственно-временного хаоса (турбулентности).

Режимы периодической автомодуляции, в которых генерируется последовательность солитонов, также представляют интерес для генерации ультракоротких импульсов. Здесь можно отметить очевидную аналогию с работой [8], в которой сообщалось об экспериментальном наблюдении подобных режимов в так называемом „активном кольце“, когда выход нелинейной системы соединяется с входом при помощи цепи обратной связи, в которую включен широкополосный усилитель. В данном случае преимущество заключается в том, что отпадает необходимость в каких-либо дополнительных элементах, так как абсолютная неустойчивость обеспечивает внутреннюю обратную связь. Причем ввиду малости групповой скорости формирование солитона происходит уже на небольших расстояниях, так что протяженность нелинейной среды может быть невелика.

Работа выполнена при поддержке грантов CRDF REC-006 и РФФИ (проекты № 03-02-06257 и 03-02-16192).

## Список литературы

- [1] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
- [2] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 696 с.
- [3] Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989. 328 с.

- [4] Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: Наука, Физматлит, 2000. 272 с.
- [5] Калиникос Б.А., Ковшиков Н.Г., Славин А.Н. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 2. С. 159–176.
- [6] Дудко Г.М., Казаков Г.Т., Кожевников А.В., Филимонов Ю.А. // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. В. 12. С. 736–740.
- [7] Дудко Г.М., Филимонов Ю.А. // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. В. 2. С. 55–59.
- [8] Калиникос Б.А., Ковшиков Н.Г., Костылев М.П., Беннер Х. // Письма в ЖЭТФ. 2002. Т. 76. № 5. С. 310–315.