01;05

О применимости классического анализа опытов с разрезным стержнем Гопкинсона

© С.Л. Лопатников, Б.А. Гама, К. Краутхаузер, Дж. Джиллеспи Мл.

Центр Композиционных материалов,
Дэлаварский Университет, Ньюарк, Дэлавар, 19716, США

Поступило в Редакцию 10 апреля 2003 г.

Показано, что классический метод обработки данных разрезного стержня Гопкинсона применим только к акустически „мягким“ материалам, акустический импеданс которых мал по сравнению с акустическим импедансом материала измерительных стрежней. Некритическое применение классического метода к материалам с высоким акустическим импедансом, таким, например, как керамика, или к материалам с высокой вязкостью может приводить к неприемлемо большим ошибкам. Предложена физически последовательная теория обработки данных разрезного стержня Гопкинсона.

Дан критический анализ классического метода обработки данных разрезного стержня Гопкинсона — Split-Hopkinson Pressure Bar (SHPB) (рис. 1). Этот метод получения реологических данных при скоростях нагружения $100-10^4\,\mathrm{s}^{-1}$ имеет более чем 50-летнюю историю и стал практическим стандартом реологических исследований [1–9]. Самые разнообразные материалы исследовались с помощью этого метода.

1. Классический анализ SHPB и природа проблемы. Классическая теория (см., например, [8]) рассматривает образец, зажатый между двумя идентичными упругими стержнями. Эффективная деформация образца ε_s может быть выражена через смещения поверхностей „образец–стержни“ (рис. 2) следующим образом:

$$\overline{\varepsilon}_s = \big(U_T(t) - U_I(t)\big)/H. \tag{1}$$

В свою очередь, смещения (в силу непрерывности смещений на границах) могут быть выражены с помощью деформаций в падающей $\varepsilon_I(t, 0)$, отраженной $\varepsilon_R(t, 0)$ и прошедшей $\varepsilon_T(t, H)$ волнах, приведенных

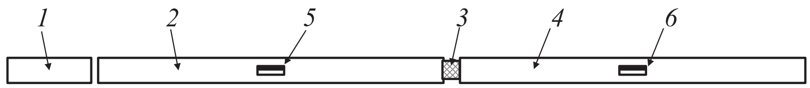

Рис. 1. Схема установки Гопкинсона: *1* — ударник, *2* — входной стержень, *3* — образец, *4* — выходной стержень, *5, 6* — сенсоры.

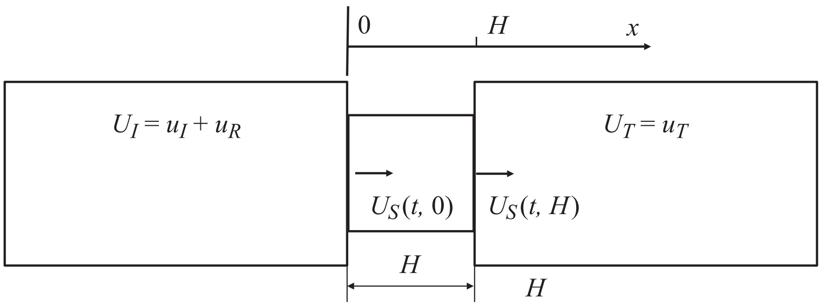

Рис. 2. Граничные условия для одномерной задачи: U_I — смещение границы входной стержень–образец, u_I — смещение частиц в падающей волне на границе входной стержень–образец, u_R — смещение частиц в отраженной волне на границе входной стержень–образец, U_T — смещение границы образец–выходной стержень, u_T — смещение частиц в прошедшей волне на границе образец–входной стержень.

к поверхностям „образец–стержни“:

$$\frac{dU_I}{dt} = -c\big(\varepsilon_I(t,0) - \varepsilon_R(t,0)\big), \qquad \frac{dU_T}{dt} = -c\varepsilon_T(t,H). \tag{2}$$

Тогда

$$\frac{d\bar{\varepsilon}(t)}{dt} = \frac{c}{H}\big(\varepsilon_I(t,0) - \varepsilon_R(t,0) - \varepsilon_T(t,H)\big). \tag{3}$$

Здесь c — скорость звука в материале стержней, H — толщина образца, U_I — смещение поверхности входного (incident) стержня, U_T — смещение поверхности выходного (transmitter) стержня.

С другой стороны, силы, действующие на образец, могут быть представлены следующим образом:

$$F_I = AE\big(\varepsilon_I(t,0) + \varepsilon_R(t,0)\big), \qquad F_T = AE\varepsilon_T(t,H). \tag{4}$$

В классическом анализе предполагается, что эти силы находятся в равновесии, так что

$$F_I = F_T. \tag{5}$$

Следовательно, согласно классическому рассмотрению, используя (4), имеем

$$\varepsilon_I(t, 0) + \varepsilon_R(t, 0) - \varepsilon_T(t, H) = 0. \tag{6}$$

Исключая $\varepsilon_T(t, H)$ с помощью уравнения (6) из (3), получаем

$$\frac{d\bar{\varepsilon}(t)}{dt} = -\frac{2c}{H}\,\varepsilon_R(t, 0). \tag{7}$$

Эффективное напряжение в образце определяется следующим образом:

$$\bar{\sigma} = \frac{F_I + F_T}{2A_s} = \frac{AE}{2A_s}\big(\varepsilon_I(t, 0) + \varepsilon_R(t, 0) + \varepsilon_T(t, H)\big) = \frac{AE}{A_s}\,\varepsilon_T(t, H). \tag{8}$$

Здесь A и A_s — площади сечения соответственно стержней и образца, а E — упругий модуль стержней, который предполагается известным. Уравнения (7) и (8) выражают эффективные деформацию и напряжения образца через акустические данные, которые могут быть измерены в стержнях и представляют собой математическую модель классического метода обработки данных.

Несмотря на кажущуюся правдоподобность приведенной логики, уравнения (7) и (8) содержат математический и физический дефекты. Чтобы прояснить природу проблемы, предположим, что равенство (5) выполняется только приблизительно и, таким образом, имеется некоторое (пусть малое) отклонение сил от равновесия ΔF:

$$\Delta F = F_T - F_I. \tag{9}$$

Повторяя предыдущие выкладки, но учитывая наличие пусть малого, но конечного отклонения от равновесия, немедленно получаем:

$$\bar{\sigma} = \frac{F_I + F_T}{2A_s} = \frac{AE}{A_s}\left(\varepsilon_T(t, H) - \frac{\Delta F(t)}{2AE}\right), \tag{10}$$

$$\frac{d\bar{\varepsilon}(t)}{dt} = -\frac{2c}{H}\left(\varepsilon_R(t, 0) + \frac{\Delta F(t)}{2AE}\right). \tag{11}$$

Уравнение (10) эквивалентно классическому уравнению (8), если можно пренебречь величиной $\frac{\Delta F(t)}{2AE}$ по сравнению с $\varepsilon_T(t, H)$; Kolsky [5], Gray III [8] и Ravichandran и Subhash [10] обсуждали это условие. Однако уравнение (11) становится эквивалентным классическому уравнению (7), только если условие $|\varepsilon_{R(t,0)}| \gg \left|\frac{\Delta F(t)}{2AE}\right|$ также выполняется. Таким образом, наша главная цель теперь — найти величину $\frac{\Delta F(t)}{AE}$ и сравнить ее с $\varepsilon_R(t,0)$.

2. Одномерная модель распространения волн в SHPB. Для простоты обсудим только случай произвольного линейного образца. Этот случай перекрывает, однако, широкий спектр материалов, таких как линейно-упругие материалы, вязкие материалы, материалы с регулярной и сингулярной памятью [11–17] и т.д. Следуя классическому рассмотрению, обратимся к одномерной модели SHPB. В этом случае естественно использовать разложение полей в стержнях и образце по гармоникам. Мы будем при анализе использовать положительный знак в экспоненциальном факторе $i\omega t$. Граничные условия между образцом и стержнями могут быть представлены в виде

$$x=0:\left\{\begin{matrix} u_I(t,0)+u_R(t,0)=u_S(t,0) \\ A(\sigma_I(t,0)+\sigma_R(t,0))=A_S\sigma_S(t,0) \end{matrix}\right\}$$

$$x=H:\left\{\begin{matrix} u_S(t,H)=u_T(t,H) \\ A_S\sigma_S(t,H)=A\sigma_T(t,H) \end{matrix}\right\}. \tag{12}$$

После довольно громоздких, но простых вычислений, по сути повторяющих рассмотрение распространения волн в трехслойной системе, которое можно найти, например в [17] (в этой монографии Л. Бреховских использует обратный знак в экспоненциальном факторе $(-i\omega t)$, что приводит к обратному знаку коэффициента отражения) средние напряжение и деформации образца могут быть представлены в следующем виде:

$$\bar{\sigma}(\omega)=\frac{1}{2}\frac{A}{A_s}\frac{(1-r^2)+(1-r^2f^-)e^{i\omega\tau_s}-r(f^--1)e^{i\omega\tau_s}}{(1-r^2)}\,\sigma_T(\omega,H), \tag{13}$$

$$\bar{\varepsilon}(\omega)=-\frac{c}{H}\left(\frac{(1-r^2)e^{-i\omega\tau_s}-r(f^--1)-1+r^2f^-}{r(f^--1)}\right)\frac{\varepsilon_R(\omega,0)}{i\omega}, \tag{14}$$

где

$$f^-(\omega)=e^{-2i\omega\tau_s};\ \tau_s=\frac{H}{c_s(\omega)};\ \tau=\frac{H}{c};\ r(\omega)=\frac{A_s\rho_s c_s(\omega)-A\rho c}{A_s\rho_s c_c(\omega)+A\rho c}. \tag{15}$$

Величина $r(\omega)$ — это обычный коэффициент отражения от границы стержень–образец. В общем случае „скорость волн“ может быть комплексной величиной.

3. Квазистатическое приближение. Фронты распространяющихся импульсов нагрузки обычно размазаны геометрической и/или физической дисперсией волн в стержнях. В результате характерное время нагружения обычно заметно больше, чем время прохождения сигнала через образец, $\tau_s(\omega)$. Тогда для наших целей можно использовать только низкочастотную асимптотику точных выражений (13), (14). Мы будем именовать эту асимптотику „квазистатическим приближением“.

Разлагая $f^-(\omega)$ и $e^{\pm i\omega\tau_s}$ в ряды по степеням $\omega\tau_s$ и подставляя результат в уравнения (13) и (14), сохраняя только первые неисчезающие члены и возвращаясь назад от частотного к временнóму представлению, имеем:

$$\bar{\sigma}(\omega) \approx \frac{A}{A_s}\,\sigma_T(\omega, H), \qquad \frac{d\bar{\varepsilon}(t)}{dt} \approx -\frac{2c}{H}\big(1+\hat{K}_\varepsilon^{(0)}\big)\varepsilon_R(t,0), \tag{16a,b}$$

где

$$\begin{aligned}\hat{K}_\varepsilon^{(0)} &\equiv -\mathbf{F}^{-1}\left(1+\frac{(1-r(\omega))^2}{4r(\omega)}\right)\\ &= -\mathbf{F}^{-1}\left(1+\frac{1}{\gamma^2(\omega)-1}\right) = -\mathbf{F}^{-1}\left(\frac{\gamma^2(\omega)}{\gamma^2(\omega)-1}\right).\end{aligned} \tag{17}$$

Здесь $\mathbf{F}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье и $\gamma(\omega) \equiv \frac{A_s\rho_s c_s(\omega)}{A\rho c}$ — отношение полных импедансов образца и стержней. Обратим внимание на то, что в частном случае линейно-упругого образца оператор $\hat{K}_\varepsilon^{(0)}$ есть просто умножение на число, так как в этом случае γ не зависит от частоты и, как нетрудно видеть, ядро оператора $\hat{K}_\varepsilon^{(0)}$ есть дельта-функция Дирака.

Уравнение (16a) для среднего напряжения полностью идентично соответствующему классическому уравнению (8). Однако уравнение (16b) для средней деформации существенно отличается от уравнения (7). Оно содержит дополнительный операторный множитель $(1+\hat{K}_\varepsilon^{(0)})$. Очевидно, что классическое уравнение (7) для эффективной деформации справедливо только, если оператор $\hat{K}_\varepsilon^{(0)}$ мал и, следовательно, согласно уравнению (17), только если импеданс образца мал по сравнению с импедансом стержней.

Нетрудно проверить, что уравнение (9) может быть представлено в квазистатическом приближении как:

$$\varepsilon_I(t,0)+\varepsilon_R(t,0)-\varepsilon_T(t,H)=\hat{K}_\varepsilon^{(0)}\cdot\varepsilon_R(t,0). \tag{18}$$

Сопоставление уравнений (18) и (6) полностью проясняет природу математической ошибки классического анализа стержня Гопкинсона, представленного во многих учебниках и статьях. При классическом подходе пренебрегается членом $\hat{K}_\varepsilon^{(0)}\varepsilon_R(t,0)$, который в общем случае имеет тот же порядок величины, что и оставленный член $\varepsilon_R(t,0)$. На деле, если предполагать, что силовое равновесие существует в форме уравнения (5), необходимо с той же точностью полагать, что в уравнении (6) $\varepsilon_R(t,0)=0$! Это утверждение имеет ясный физический смысл: тело в состоянии полного равновесия не может производить работу и, в частности, генерировать отраженный сигнал.

4. Сравнение с классическим методом для линейно-упругого образца. Рассматривая частный случай линейно-упругого образца, можно определить эффективный упругий модуль материала следующим образом:

$$E_s=\frac{\overline{\sigma}}{\overline{\varepsilon}}=-(1-\gamma^2)\,\frac{A}{A_s}\,E\,\frac{\varepsilon_T(t,H)}{\frac{2c}{H}\int\limits_0^t\varepsilon_R(t,0)dt}=(1-\gamma^2)E_s^{(cl)}, \tag{19}$$

где

$$E_s^{(cl)}=-\frac{A}{A_s}E\frac{\varepsilon_T(t,H)}{\frac{2c}{H}\int\limits_0^t\varepsilon_R(t,0)dt} \tag{20}$$

— эффективный модуль, определенный с помощью классических выражений (7) и (8). Рассмотрим случай стальных стержней ($c\sim 5.13\,\mathrm{km/s}$, $\rho\sim 7.85\,\mathrm{g/cm^3}$) и керамического образца ($c\sim 9.74\,\mathrm{km/s}$, $\rho\sim 3.90\,\mathrm{g/cm^3}$) равного диаметра. В этом случае $\gamma=\frac{\rho_s c_s}{\rho c}=1.061$. Тогда эффективная деформация образца равна $\overline{\varepsilon}=8.98\overline{\varepsilon}_{cl}$, что почти в девять раз (!) больше, чем предсказывается классическим методом. Соответственно эффективный упругий модуль, рассчитанный классическим методом, будет почти в девять раз больше, чем модуль, рассчитанный по представленному методу. Формально можно произвольно уменьшить импеданс образца, используя образцы достаточно малого размера. Однако эта возможность сильно ограничена из-за возникновения паразитных отражений от ненагруженной части поверхности стержней. Практически площадь образца не может быть сделана меньше 0.6–0.7 площади сечения баров. Детальное обсуждение этого факта может быть найдено в [8], а теоретический анализ влияния отклонений от одномерной модели — в [18].

В принципе, из (20) можно немедленно убедиться, что классический метод приводит в некоторых случаях к физически абсурдным результатам. Так, например, в соответствии с (20) этот метод предсказывает бесконечный модуль для образца (того же диаметра), выполненного из того же материала, что и стержни (в этом случае $\varepsilon_T(t,H) \neq 0$, $\varepsilon_R(t,H) \equiv 0$), и даже отрицательный модуль для образцов, акустически более жестких, чем стержни (в этом случае для падающего импульса сжатия $\varepsilon_T(t,H) < 0$, $\int\limits_0^t \varepsilon_R(t,H)dt < 0$). В то же время наше выражение (19) предсказывает правильный знак во всех случаях, поскольку величина $(1-\gamma^2)$ меняет знак для жестких образцов и влечет к неопределенному (0/0) выражению, если $\gamma = 1$. В последнем случае это неопределенное выражение может быть легко вычислено с помощью правила Лопиталя и дает в пределе $\gamma \to 1$ и $\rho_s = \rho$ правильный результат: $E_s = E$ (в этом можно немедленно убедиться, к примеру, с помощью уравнения (21) следующего раздела, поскольку в этом случае $\varepsilon_R(\omega, 0) \to 0$ и величина $\xi(\omega)$ стремится к бесконечности).

5. Обработка данных SHPB в общем случае. В общем случае реологическое уравнение для линейных материалов имеет вид $\bar{\sigma}(t) = \hat{E}_s \cdot \bar{\varepsilon}(t)$, где $\hat{E}_s$ — некоторый линейный (интегродифференциальный) оператор. В частотном представлении этот оператор может быть представлен как $\hat{E}(\omega) = \frac{\bar{\sigma}(\omega)}{\bar{\varepsilon}(\omega)}$. Используя уравнение (19) и учитывая, что $\gamma(\omega) = \frac{\sqrt{\rho_s E_s(\omega)}}{\sqrt{\rho E}}$, во временнóм представлении можно найти операторный модуль среды:

$$\hat{E}_s = -\mathbf{F}^{-1}\left(\frac{i\omega\tau\frac{A}{2A_s}\xi(\omega)}{\left(1 - i\omega\tau\frac{A}{2A_s}\frac{\rho_s}{\rho E}\xi(\omega)\right)}\right), \qquad \xi(\omega) = \frac{\sigma_T(\omega, H)}{\varepsilon_R(\omega, 0)}. \tag{21}$$

Однако поскольку Фурье-спектры измеряемых величин $\sigma_T(\omega, H)$ и $\varepsilon_R(\omega, 0)$ ограничены в частотной области, величина $\xi(\omega)$ плохо определена в области высоких частот и для практических применений необходимо использовать некоторые регуляризующие процедуры.

6. Заключение. Мы показали, что классический метод обработки данных разрезного стержня Гопкинсона содержит существенные дефекты и в результате может применяться только к исследованию реологических свойств материалов с акустическим импедансом, существенно более низким, чем акустический импеданс материала стержней. Мы предложили также универсальную процедуру обработки данных разрезного стержня Гопкинсона.

Список литературы

[1] *Davies R.M.* // Philosophical Transactions of the Royal Society of London A. 1948. V. 240 (821). P. 375–457.

[2] *Kolsky H.* // Proc. Phys. Soc. Lond. 1949. V. 62 (II-B). P. 676–700.

[3] *Harding J., Wood E.D., Campbell J.D.* // J. Mech. Eng. Sci. 1960. V. 2. P. 88–96.

[4] *Lindholm U.S., Yeakley L.M.* // Exp. Mech. 1968.V. 8. P. 1–9.

[5] *Nemat-Nasser Sia, Issacs J.B, Starrett J.E.* // Proc. R. Soc. Lond. A. 1991. V. 453. P. 371–391.

[6] *Meyers M.A.* Dynamic Behavior of Materials. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1994. P. 54–59, 81–82, 305–310.

[7] *Bragov A.M., Lumonov A.K.* // Int. J. Imp. Eng. 1995. V. 16 (2). P. 321–330.

[8] *Gray III, G.T.* // ASM. Handbook. V. 8. Materials Park: ASM International, 2000. P. 462–476.

[9] *Albertini C., Montagnani M.* // Journal De Physique. 1994. V. 4 (8). P. C8–113–C8–118.

[10] *Ravichandran G., Subhash G.* // J. Am. Ceram. Soc. 1994. V. 77. P. 263–267.

[11] *Fabrizio M., Moro A.* Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity. Philadelphia: SIAM, 1992.

[12] *Hanyga A.* // Mathematics and Computer Modelling. 2001. V. 34. P. 1399–1421.

[13] *Giona M., Gerbelly S., Roman H.E.* // Physica A. 1992. V. 191. P. 449–453.

[14] *Лопатников С., Гуревич Б.* // ДАН СССР. 1985. Т. 281 (2). С. 47–50 (USSR Academy of Science Reports (Doklady Academii nauk SSSR); 1985. V. 281 (2). P. 47–50).

[15] *Hanyga A., Rock V.* // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 107 (6). P. 2965–2972.

[16] *Gurevich B., Lopatnikov S.* // Geoph. J. Int. 1995. V. 121 (3). P. 933–947.

[17] *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. Brekhovskikh L.M. Acoustics of layered media I: plane and quasi-plane waves. Springer series on wave phenomena. Berlin, New York: Springer, 1998.

[18] *Samsonov A.M.* Strain solitons in solids and how to construct them. Chapman & Hall/CRC, 2001.