

01;09

## Основная особенность направляющих структур, описываемых несамосопряженными электродинамическими операторами

© А.С. Раевский, С.Б. Раевский, А.А. Титаренко

Нижегородский государственный технический университет, Н. Новгород  
E-mail: raevsky@nntu.sci-nnov.ru

Поступило в Редакцию 18 июня 2003 г.

На основе результатов решения краевой задачи для круглого двухслойного экранированного волновода делается вывод, что основной особенностью направляющих структур, описываемых несамосопряженными операторами, является обязательное присутствие в их спектре комплексных волн, парное возбуждение которых приводит к возникновению явления комплексного резонанса.

Однородная краевая задача образуется дифференциальным уравнением

$$L(u) = \sum_{v=0}^n f_v u^{(v)} = 0, \quad (1)$$

где  $n$  — его порядок, и системой граничных условий

$$U_m = 0; \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

Сопряженная ей краевая задача образуется [1] дифференциальным уравнением

$$L^*(u) = \sum_{v=0}^n (-1)^v (f_v u)^{(v)} = 0 \quad (3)$$

и системой граничных условий

$$U_k = 0; \quad k = 1, 2, \dots, N^*, \quad N^* = 2qn - N, \quad (4)$$

где  $q$  — число интервалов, на которое разбивается область определения функции  $U$  [2].

Однородную краевую задачу, описывающую направляющую структуру, отождествляем [2] с электродинамическим оператором. Задачи типа (1), (2) обычно получаются из общей краевой задачи на уравнении Гельмгольца после разделения в нем переменных. Согласно [1], оператор является самосопряженным тогда и только тогда, когда он порождается самосопряженным дифференциальным уравнением и самосопряженными граничными условиями. Таким образом, краевая задача является самосопряженной лишь при обязательном выполнении двух условий: 1)  $L(u) = L^*(u)$ ; 2) граничные условия (2) и (4) эквивалентны.

Когда в направляющих структурах без диссипации энергии поле описывается однородным уравнением Гельмгольца (уравнением четного порядка), первое условие самосопряженности, как правило, выполняется. Для выполнения второго условия необходимо [2,3], чтобы имело место равенство  $N^* = N$ . Таким образом, неравенство

$$N^* \neq N \quad (5)$$

можно рассматривать как достаточное условие несамосопряженности электродинамического оператора.

Как известно [1], собственные значения несамосопряженных краевых задач в общем случае являются комплексными величинами. Вследствие этого направляющие структуры, описываемые несамосопряженными краевыми задачами, в своем спектре содержат [2–4] комплексные волны (КВ) — волны с комплексными волновыми числами, несмотря на отсутствие в средах, образующих эти структуры, диссипации энергии. Достаточно давно было показано [5], что такие волны существуют в двухслойном круглом экранированном волноводе, у которого  $\varepsilon_1/\varepsilon_2 > 1$ , где  $\varepsilon_{1,2}$  — диэлектрические проницаемости внутреннего и наружного слоев. До настоящего времени считалось [2], что характер дифракционных явлений, в результате которых в двухслойном волноводе образуются встречные потоки мощности, обеспечивающие существование КВ, таков, что при  $\varepsilon_1/\varepsilon_2 < 1$  комплексные волны существовать не могут. Это, вообще говоря, противоречило положению: собственные значения несамосопряженных краевых задач (а в данном случае краевые задачи для гибридных волн при любом соотношении  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  являются несамосопряженными) в общем случае являются комплексными величинами.

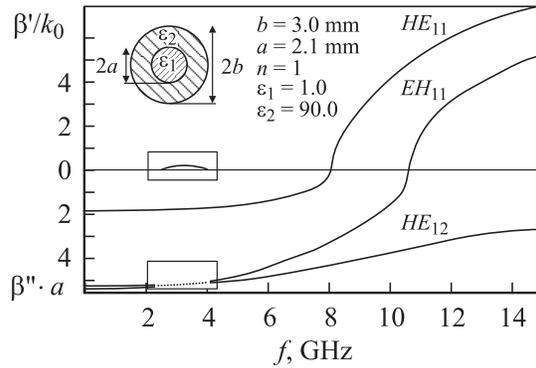


Рис. 1.

Как показали более подробные численные исследования, проведенные в последнее время, КВ в двухслойном круглом экранированном волноводе могут существовать и при  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ , что полностью согласуется с общими положениями теории линейных дифференциальных операторов [1].

На рис. 1 представлены дисперсионные характеристики волн  $HE_{11}$ ,  $EH_{11}$ ,  $HE_{12}$  в волноводе с относительной диэлектрической проницаемостью  $\tilde{\epsilon} = \epsilon_2/\epsilon_1 = 90$ , полученные как решения дисперсионного уравнения волн круглого двухслойного экранированного волновода [5]. Видно, что в точке жордановой кратности нормальных волн [6] образуются ветви комплексных решений вышеуказанного дисперсионного уравнения, соответствующие КВ. При этом, когда  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  (волновод с диэлектрической втулкой), ветвь комплексных решений образуется не в точке соединения дисперсионных характеристик первых двух волн  $HE_{11}$  и  $EH_{11}$ , как при  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  (волновод с диэлектрическим стержнем [7]), а в точке, где объединяются характеристики волн  $EH_{11}$  и  $HE_{12}$ , что в определенной мере и затруднило поиск КВ в волноводе с  $\tilde{\epsilon} = \epsilon_2/\epsilon_1 > 1$ .

В табл. 1, 2 приведены значения коэффициентов заполнения  $a/b$  ( $a$  — радиус внутреннего слоя,  $b$  — наружного), при которых в волноводах со стержнем (табл. 1) и со втулкой (табл. 2) появляются и исчезают комплексные волны  $HE_{nm}$ ,  $EH_{nm}$  соответствующих азимутальных индексов  $n$ . Рис. 2, 3 дают наглядную интерпретацию результатов,

Таблица 1.

N	$a/b$ , при котором появляются КВ	$a/b$ , при котором исчезают КВ
1	0.38910301	0.77800264
2	0.29828910	0.91853133
3	0.28233333	0.94941078
4	0.27708631	0.96250251
5	0.27463791	0.97052311
6	0.27133333	0.97551344
7	0.26966667	0.97955086
8	0.26845031	0.98266667
9	0.26666667	0.98433333

Таблица 2.

N	$a/b$ , при котором появляются КВ	$a/b$ , при котором исчезают КВ
1	0.67501047	0.84607483
2	0.73566667	0.87000000
3	0.77266667	0.88566667
4	0.79833333	0.89666667
5	0.81802031	0.90533333
6	0.83233333	0.91203762
7	0.84533333	0.91766667
8	0.85500725	0.92266667
9	0.86333333	0.92666667

приведенных в таблицах. Рис. 2 соответствует табл. 1, рис. 3 — табл. 2. Как видно из рис. 2, 3, интервал значений коэффициента заполнения, в котором могут существовать КВ, с ростом азимутального индекса волн  $n$  в волноводе со стержнем расширяется, а в волноводе со втулкой сужается.

В целом, результаты, приведенные в табл. 2 и на рис. 3, свидетельствуют о том, что чем выше азимутальный индекс КВ (при фиксированном радиальном индексе), тем тоньше должна быть диэлектрическая втулка, чтобы существовала эта комплексная волна. Собственные

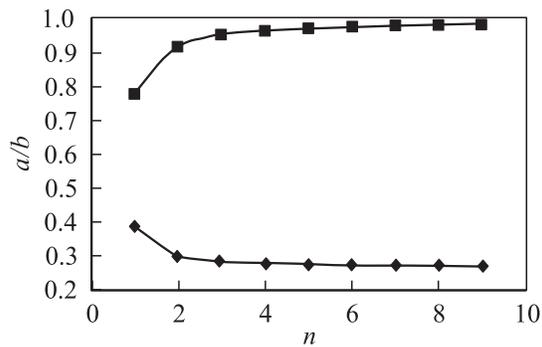


Рис. 2.

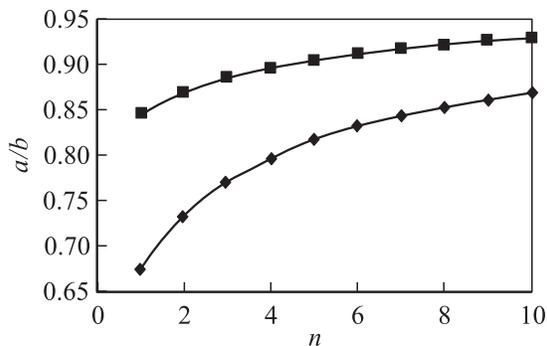


Рис. 3.

КВ существуют [2] за счет образования в направляющих структурах встречных потоков мощности. На рис. 4 приведено распределение по поперечному сечению двухслойного экранированного волновода реальной части комплексного вектора Умова–Пойнтинга, демонстрирующее разнонаправленность потоков мощности в центральной и периферийной областях поперечного сечения, приводящую к равенству нулю [2] суммарного потока.

Решения дисперсионного уравнения, соответствующие КВ, располагаются [2] на комплексных плоскостях поперечных волновых чисел комплексно-сопряженными парами, что указывает на существование

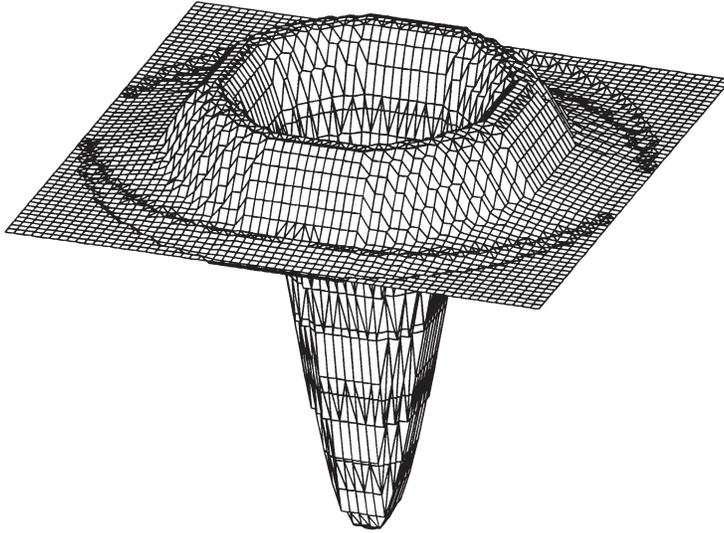


Рис. 4.

слева и справа от источника двух пар комплексных волн с противоположно направленными фазовыми скоростями. Продольные зависимости их полей имеют [2] вид

$$e^{-i(\beta' - i\beta'')z}; \quad e^{i(\beta' + i\beta'')z} \quad (\text{волны I, II});$$

$$e^{-i(\beta' + i\beta'')z}; \quad e^{i(\beta' - i\beta'')z} \quad (\text{волны III, IV}).$$

Волны I, II распространяются справа от источника, условно расположенного при  $z = 0$ , волны III, IV — слева. В [2] показано, что источники, описываемые действительными функциями координат, возбуждают волны I и II, III и IV с комплексно-сопряженными амплитудами. Совместное существование указанных пар волн приводит к образованию в бесконечном двухслойном волноводе (в отрезке двухслойного волновода, согласованном на концах) поля стоячей волны, локализованного вблизи источника [2]. При этом в указанных структурах возникает явление, называемое [2,8] комплексным резонансом (КР), поскольку они (структуры) действуют как резонатор при включении их

по схемам „на проход“ и „на отражение“. Особенностью КР является то, что в отличие от обычного резонанса он проявляется во всем диапазоне существования КВ, благодаря чему структура проявляет себя как полосовой фильтр [9].

Реальная конструкция такого полосового фильтра представляет собой отрезок двухслойного круглого экранированного волновода, нагруженного на концах  $z = \pm l$  однородно заполненными волноводами. С учетом неполного согласования на концах поле в отрезке двухслойного круглого экранированного волновода может быть представлено в области  $z \in [0 \div l]$  продольными компонентами векторов Герца вида

$$\begin{aligned} \Pi_{z_1}^e &= \psi_1^e(r, \varphi) e^{-i(\beta' - i\beta'')z} + \bar{\psi}_1^e(r, \varphi) e^{i(\beta' + i\beta'')z} + \psi_{-1}^e(r, \varphi) e^{i(\beta' - i\beta'')(z-1)} \\ &+ \bar{\psi}_{-1}^e(r, \varphi) e^{-i(\beta' + i\beta'')(z-1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m^e(r, \varphi) e^{i\beta_m(z-1)}, \\ \Pi_z^h &= \psi_1^h(r, \varphi) e^{-i(\beta' - i\beta'')z} + \bar{\psi}_1^h(r, \varphi) e^{i(\beta' + i\beta'')z} + \psi_{-1}^h(r, \varphi) e^{i(\beta' - i\beta'')(z-1)} \\ &+ \bar{\psi}_{-1}^h(r, \varphi) e^{-i(\beta' + i\beta'')(z-1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m^h(r, \varphi) e^{i\beta_m(z-1)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Первые слагаемые в (6) с мембранными функциями  $\psi_{\pm 1}^e(r, \varphi)$ ;  $\psi_{\pm 1}^h(r, \varphi)$  и  $\bar{\psi}_{\pm 1}^e(r, \varphi)$ ;  $\bar{\psi}_{\pm 1}^h(r, \varphi)$  описывают при знаке (+) комплексные волны I и II соответственно, при знаке (–) — волны III и IV. Суммы в (6) соответствуют обычным волнам, являющимся в области существования основной КВ реактивно-затухающими. Поле в области  $z \in [-l \div 0]$  представляется аналогичным образом. В областях однородно заполненных волноводов поле представляется бесконечными наборами обычных распространяющихся и реактивно затухающих волн.

Реализация граничных условий в плоскостях  $z = 0; \pm l$  при неучете слабого взаимодействия в плоскости  $z = 0$  реактивно затухающих запредельных волн, возникающих на стыках  $z = \pm l$  (отрезок двухслойного волновода полагаем достаточно протяженным), приводит с использованием условия ортогональности собственных функций к характеристическому уравнению (уравнению относительно резонансных частот рассматриваемой структуры) в общем случае в виде определителя бесконечно высокого порядка:

$$\det[a_{ik}] = 0. \quad (7)$$

Поскольку запись компонент полей КВ в плоскостях  $z = 0; \pm l$  при указанной выше комплексной сопряженности их амплитуд имеет вид

$$\begin{aligned} E_{r_k} &= [\xi_1(r)A_1' - \xi_1(r)A_1'' - \xi_1(r)C_1' + \xi_1(r)C_1''] \cos n\varphi, \\ E_{\varphi_k} &= [\xi_2(r)A_1' - \xi_2(r)A_1'' - \xi_2(r)C_1' + \xi_2(r)C_1''] \sin n\varphi, \\ H_{r_k} &= [\xi_3(r)A_1' - \xi_3(r)A_1'' - \xi_3(r)C_1' + \xi_3(r)C_1''] \sin n\varphi, \\ H_{\varphi_k} &= [\xi_4(r)A_1' - \xi_4(r)A_1'' - \xi_4(r)C_1' + \xi_4(r)C_1''] \cos n\varphi, \end{aligned} \quad (8)$$

(индекс „ $k$ “ указывает на принадлежность комплексной волне). В области существования комплексных волн 1-й столбец определителя (7) совпадает с 3-м, а 2-й с 4-м, т.е.  $a_{1i} = a_{3i}$ ,  $a_{2i} = a_{4i}$ . В результате матрица характеристического уравнения (7) оказывается вырожденной во всем частотном диапазоне КВ. Следствием этого оказывается проявление резонансных свойств у отрезка двухслойного экранированного волновода, нагруженного на концах на бесконечно протяженные (согласованные) однородно заполненные волноводы, во всей полосе существования КВ, а не на отдельных частотах, как это имеет место при обычном резонансе.

Таким образом, показали, что основной особенностью направляющих структур, описываемых несамосопряженными операторами, является существование в них комплексных волн, парное возбуждение которых одним источником приводит к вырождению матрицы характеристического уравнения, следствием чего является возникновение КР во всем диапазоне существования КВ. Необходимым и достаточным условием существования в направляющей структуре КВ является несамосопряженность краевой задачи, описывающей структуру.

## Список литературы

- [1] *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
- [2] *Веселов Г.И., Раевский С.Б.* Слоистые металло-диэлектрические волноводы. М.: Радио и связь, 1988. 247 с.
- [3] *Веселов Г.И., Раевский С.Б.* // Радиотехника. 1987. Т. 42. № 8. С. 64–67.
- [4] *Неганов В.А., Раевский С.Б., Яровой Г.П.* Линейная макроскопическая электродинамика. Т. 2. М.: Радио и связь, 2001. 575 с.
- [5] *Раевский С.Б.* // Изв. вузов СССР. Радиофизика, 1972. Т. 15. № 1. С. 112–116.

- [6] *Краснушкин П.Е., Федоров Е.Н.* // Радиотехника и электроника. 1972. Т. 17. № 6. С. 1129–1140.
- [7] *Веселов Г.И., Любимов Л.А.* // Радиотехника и электроника. 1963. Т. 8. № 9. С. 1530–1541.
- [8] *Веселов Г.И., Раевский С.Б., Калмык В.А.* // Радиотехника. 1980. Т. 36. № 9. С. 59–62.
- [9] *Веселов Г.И., Калмык В.А., Раевский С.Б.* // Изв. вузов СССР. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 7. С. 900–903.