01;03

Анализ равновесных конфигураций заряженных цилиндрических струй проводящей жидкости

© *Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева*

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: nick@ami.uran.ru

Поступило в Редакцию 2 июня 2003 г.

Установлена область физических параметров, в которой возможно существование равновесных конфигураций заряженных цилиндрических струй проводящей жидкости, соответствующих азимутальной моде $n = 2$ деформаций поверхности струи круглого сечения. Определено критическое значение погонного заряда струи, при достижении которого струя делится на две отдельные. Обнаружено, что режим возбуждения подобной неустойчивости — мягкий.

Известно, что струи неустойчивы по отношению к малым возмущениям поверхности — может развиваться рэлеевская неустойчивость, обусловленная влиянием капиллярных эффектов. Для заряженных струй дополнительным фактором, определяющим поведение системы, являются электростатические силы. Для азимутальных мод возмущений поверхности струи, рассмотрением которых в настоящей работе мы ограничимся, неустойчивость индуцируется кулоновскими силами, а капиллярные силы играют стабилизирующую роль. Для понимания основных закономерностей поведения заряженных струй необходимо иметь представление о том, при каких условиях возможна и при каких принципиально невозможна взаимная компенсация этих сил. Иными словами, необходимо определить область существования устойчивых решений задачи о равновесных конфигурациях заряженных струй проводящей жидкости.

Точные решения этой задачи для произвольных азимутальных чисел n были выявлены в работах [1,2], где рассматривались возможные стационарные профили заряженной поверхности проводящей жидкости в плоской геометрии. Следует отметить, что решения аналогичной с математической точки зрения проблемы, связанной с анализом стационарного профиля поверхности двухмерного воздушного пузыря в идеальной жидкости, были независимо построены для $n = 2$ в работе [3] и для $n = 3.4, 5\ldots$ в работе [4]. Во всех указанных работах выражения для формы поверхности были получены лишь в квадратурной форме, не позволяющей провести детального анализа решений и, в частности, сформулировать условия распада струй (пузырей для [3,4]). Для того чтобы можно было эффективно исследовать свойства решений, требуется преобразовать их к более удобному виду: выразить их через элементарные функции. В настоящей работе мы приведем и затем проанализируем соответствующие выражения для простейшего случая, когда деформация струи круглого сечения связана с возбуждением крупномасштабной азимутальной моды $n = 2$.

Выпишем уравнения электростатики, описывающие стационарный профиль поверхности заряженной струи проводящей жидкости для случая плоской симметрии задачи — поперечное сечение струи не меняется в направлении ее движения. Распределение потенциала электрического поля φ в плоскости поперечного сечения струи $\{x, y\}$ задается двухмерным уравнением Лапласа

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0.$$

Его следует решать совместно с условием эквипотенциальности поверхности проводника $\varphi = 0$, а также условием того, что на бесконечности поле заряженного проводника совпадает с полем, создаваемым равномерно заряженной прямой нитью:

$$\varphi \to -Q\ln(x^2 + y^2), \qquad x^2 + y^2 \to \infty,$$

где Q — электрический заряд, приходящийся на единицу длины проводника. Равновесный рельеф заряженной границы проводящей жидкости определяется условием баланса сил, действующих на поверхность:

$$(8\pi)^{-1}(\nabla\varphi)^2_{\varphi=0} + \alpha K + p = 0,$$

где первое слагаемое имеет смысл электростатического давления на границе жидкости, второе — поверхностного давления (α — коэффициент поверхностного натяжения, а K — локальная кривизна поверхности). Постоянная p выражается через скорость струи v, плотность жидкости ρ, а также через внешнее и внутреннее давления $p_{e,i}$:

$$p = p_i - p_e - \rho v^2/2.$$

Решение этих уравнений в элементарных функциях удается найти из интегральных соотношений работ [1,2]. Для наиболее важного случая, когда азимутальное число равняется двум (при $n = 2$ наименьшим оказывается значение заряда Q, необходимое для возникновения линейной неустойчивости струи круглого сечения), искомые конфигурации струи задаются следующими параметрическими выражениями:

$$y = \frac{Q^2}{2\pi\alpha} \cdot \frac{(9\sqrt{4-l^2} + 2\sqrt{3}(4-l))\cos\psi + \sqrt{4-l^2}\cos(3\psi)}{\sqrt{3}(l-1)(4+l+\sqrt{3(4-l^2)}\cos(2\psi))}, \qquad (1)$$

$$x = \frac{Q^2}{2\pi\alpha} \cdot \frac{(9\sqrt{4-l^2} - 2\sqrt{3}(4-l))\sin\psi - \sqrt{4-l^2}\sin(3\psi)}{\sqrt{3}(l-1)(4+l+\sqrt{3(4-l^2)}\cos(2\psi))}, \qquad (2)$$

где $l = (1 - 2Q^2 p/(\pi\alpha^2))^{1/2}$, а замкнутая поверхность соответствует изменению параметра ψ на 2π. Отметим, что нам неизвестны работы, в которых были бы получены и исследованы подобные решения.

Рассмотрим, при каких условиях заряженная струя будет распадаться на части. При $l = l_1 = 2$ выражения (1) и (2) задают окружности, что соответствует невозмущенному состоянию струи — струе круглого сечения. При уменьшении l струя деформируется, причем при некотором значении l_2 параметра l занимаемая жидкостью область теряет односвязность, т. е. струя распадается (см. рисунок). Величина l_2 находится из условия самопересечения поверхности: $x = 0$ при $\psi = \pi/2$. Из него следует, что $l_2 = 13/7$.

Определим, какой заряд струи с заданной площадью поперечного сечения S соответствует пороговым значениям вспомогательного параметра l (т. е. l_1 и l_2). С помощью формулы Грина находим для площади

$$S = \int\limits_0^\pi (y_\psi x - x_\psi y)d\psi = \frac{Q^4(l^2+2l-7)}{\pi\alpha^2(l^2-1)^2}.$$

Разрешая это выражение относительно Q, получаем зависимость заряда от коэффициента поверхностного натяжения α, площади S и параметра l:

$$Q = \left[\frac{\pi\alpha^2 S(l^2-1)^2}{l^2+2l-7}\right]^{1/4}. \qquad (3)$$

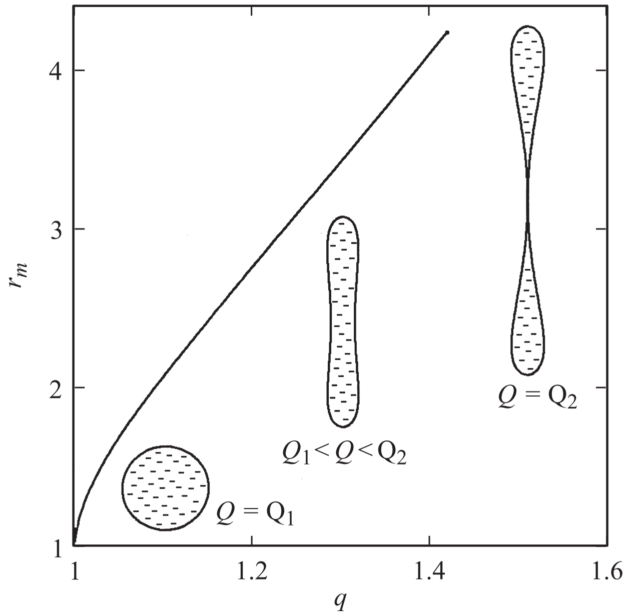

График зависимости максимального расстояния от оси струи до ее поверхности r_m (радиус струи в невозмущенном состоянии нормирован на единицу) от приведенного заряда $q = Q/Q_1$. Также изображены поперечные сечения заряженной струи проводящей жидкости при $l = l_1 = 2$, $l = 1.9$ и $l = l_2 \approx 1.86$.

В рассматриваемой задаче можно ввести два критических значения заряда. Первое критическое значение соответствует подстановке $l = l_1 = 2$ в выражение (3):

$$Q_1 = (9\pi\alpha^2 S)^{1/4} \approx 2.31\alpha^{1/2} S^{1/4}.$$

Если погонный заряд струи Q превышает это значение, то струя круглого сечения становится неустойчивой по отношению к возмущениям поверхности, соответствующим азимутальной моде $n = 2$. Второе критическое значение заряда соответствует $l = l_2 = 13/7$. Из (3) получим

$$Q_2 = (1800\pi\alpha^2 S/49)^{1/4} \approx 3.28\alpha^{1/2} S^{1/4}.$$

При этом значении заряда струя делится пополам. Это означает, что решения вида (1) и (2) существуют лишь при выполнении условия $Q_1 \leqslant Q \leqslant Q_2$.

Исследуем теперь режим возбуждения неустойчивости, приводящей к делению струи. Для этого построим зависимость амплитуды возмущения поверхности струи от величины ее заряда. Ввведем приведенный заряд струи q как отношение заряда Q к его первому критическому значению

$$q = \frac{Q}{Q_1} = \left[\frac{(l^2-1)^2}{9(l^2+2l-7)}\right]^{1/4}. \tag{4}$$

В качестве безразмерной амплитуды возмущения границы струи возьмем отношение максимального расстояния от оси струи до ее поверхности к радиусу струи в невозмущенном состоянии $\sqrt{S/\pi}$:

$$r_m = \frac{2\sqrt{4-l^2}+\sqrt{3}(l-1)}{\sqrt{3}(l^2+2l-7)}. \tag{5}$$

График зависимости r_m от приведенного заряда q, задаваемого в параметрической форме выражениями (4) и (5), приведен на рисунке. Видно, что с ростом заряда амплитуда возмущения монотонно нарастает. Подобный характер зависимости амплитуды возмущения от управляющего параметра — электрического заряда — свидетельствует о том, что режим возбуждения азимутальной моды $n = 2$ возмущения поверхности цилиндрической струи круглого сечения — мягкий, и, как следствие, рассмотренные нами решения могут быть устойчивыми по отношению к возмущениям, не нарушающим симметрию задачи.

Данная работа выполнена при поддержке УрО РАН, Фонда содействия отечественной науке, Фонда некоммерческих программ „Династия“ и Международного центра фундаментальной физики в Москве.

Список литературы

[1] *Зубарев Н.М.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 23. С. 55–60.
[2] *Зубарев Н.М.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. В. 6 (12). С. 1990–2005.
[3] *Crowdy D.* // Phys. Fluids. 1999. V. 11. N 10. P. 2836–2845.
[4] *Wegmann R., Crowdy D.* // Nonlinearity. 2000. V. 13. P. 2131–2141.