

03

Структура турбулентного пограничного слоя

© Л.Н. Пятницкий

Институт высоких температур РАН, Москва

E-mail: pyat7@mail.ru

Поступило в Редакцию 25 ноября 2002 г.

Согласно волновому механизму турбулентности, пульсации гидродинамических параметров являются следствием суперпозиции возмущений, которые возникают на стенке и распространяются в потоке в виде волновых пакетов сферического типа. На границе течения, в поле сильного градиента скорости, звуковые лучи этих волн искривляются и разворачиваются в направлении стенки, их траектории с разной начальной ориентацией переплетаются, и волновые пакеты разрушаются. Пульсации параметров в области разрушения волновых пакетов образуют турбулентный пограничный слой. При отражении волн пульсации скорости непосредственно у стенки исчезают, что соответствует ламинарному подслою турбулентного пограничного слоя.

Движение в пограничном слое турбулентного течения исследуется на основе уравнений Прандтля (см., например, [1]), которые дают хороший результат при описании осредненных значений гидродинамических параметров. При этом для получения замкнутой системы уравнений ламинарного пограничного слоя используется закон трения Ньютона, в котором коэффициент вязкости η определяется переносом импульса поперек потока при соударениях молекул. Так, в газах $\eta = \rho \lambda v / 3$, где λ и v — длина свободного пробега и тепловая скорость молекул.

Для описания пульсаций в турбулентном пограничном слое молекулярный механизм переноса импульса не подходит. Поэтому вместо коэффициента η вводят коэффициент A , турбулентного обмена, а вместо длины свободного пробега λ — длину пути перемешивания L [2]. В этом формальном подходе передача импульса, строго говоря, не связана с реальными физическими процессами. Но в жидкостях и газах импульс может передаваться при распространении волны в процессе эволюции возмущений. Заметим, что волновое уравнение, как и уравнения Прандтля, получается из уравнений Навье–Стокса и неразрывности.

В работах [3,4] дано экспериментальное обоснование „волнового“ механизма пульсаций и предложена концепция турбулентности. Согласно этой концепции, в области торможения потока стенкой канала образуются возмущения гидродинамических параметров. Возмущения распространяются в потоке как волновые пакеты, а их суперпозиция формирует пространственно-временное поле пульсаций параметров. Подобный процесс образования и суперпозиции волн наблюдается при движении тел по поверхности жидкости.

Задача об эволюции возмущения в покоящейся неограниченной среде известна. Следуя [6], представим его в виде шарика радиуса $r \leq a$ с избыточной плотностью $f(r)$. Возмущение распространяется со скоростью звука c как сферический волновой пакет толщиной $2a$. Пусть l — путь, пройденный волной за время t . Тогда в пределах пакета $|l - ct| \leq a$ скорость, давление, плотность и другие параметры (u , p , ρ и др.) пульсируют в соответствии с видом функции $f(r)$, и амплитуда пульсаций обратно пропорциональна пройденному волной расстоянию:

$$u, p, \rho \sim f\left(\frac{l - ct}{a}\right) \frac{1}{l}. \quad (1)$$

Движение среды в канале ограниченного сечения деформирует волновой фронт. Это связано, во-первых, с отражениями волны от стенок и, во-вторых, со сложным профилем скорости в сечении канала. Методы расчета пространственно-временного поля пульсаций в ядре течения, их структуры и свойств с учетом отражений описаны в работе [5].

Для сравнения на рис. 1 слева показаны конфигурации волны при ее распространении в полупространстве $z > 0$ и в плоском канале высотой d . В обоих случаях центр волны находится в точке $\mathbf{rp}(x_p, y_p, z_p)$, в нашем случае $y_p = z_p = 0$. В полупространстве положение волны относительно точки \mathbf{rp} определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}(\xi, \eta, \xi)$. При движении в канале волна неоднократно отражается от стенок, создавая в точке наблюдения $\mathbf{r}_0(x, y, z)$ постепенно затухающие пульсации, как видно из схемы рис. 1 справа. Картина суперпозиции таких волн создает впечатление хаотичности пульсаций, каковыми они в действительности не являются.

Далее проанализируем влияние на свойства пульсаций профиля скорости в сечении канала. Используем известное выражение для скорости волны $\mathbf{V} = (\partial\omega/\partial\mathbf{k})$, где \mathbf{k} — волновой вектор и $\omega(\mathbf{k})$ — закон

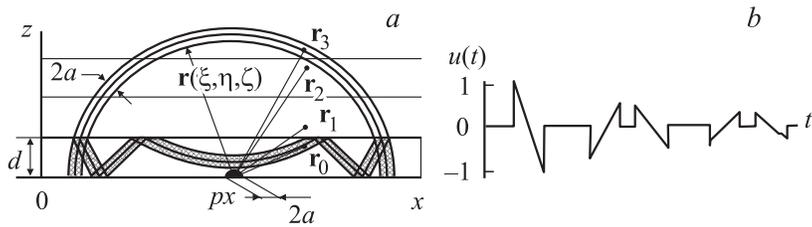


Рис. 1. Конфигурация волны в плоском канале (а) и пульсации скорости в точке наблюдения r_0 (b).

дисперсии. Для среды, движущейся со скоростью \mathbf{U} , применимо простое дисперсионное соотношение:

$$\omega = ck + \mathbf{U}\mathbf{k}. \quad (2)$$

Пусть \mathbf{s} — единичный вектор в направлении движения волны в точке \mathbf{r} , в геометрической акустике — звуковой луч. Луч изменяет направление в этой точке согласно уравнению [6]:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dl} = \frac{1}{c} [\text{rot } \mathbf{U}, \mathbf{s}], \quad (3)$$

где dl — элемент траектории луча.

Если среда покоится, $\mathbf{U} = 0$, то $\mathbf{V} = c\mathbf{k}/k$. Соответственно $\mathbf{s} = \mathbf{r}/r$, выбранная точка волны перемещается вдоль прямой и волна сохраняет сферическую симметрию. Если среда движется, но $\mathbf{U} = \text{const}$, то $\mathbf{V} = c\mathbf{k}/k + \mathbf{U}$, вектор \mathbf{s} не меняет направления, и волна сносится потоком целиком, сохраняя сферическую симметрию. Именно в этих условиях рассмотрен процесс распространения волн в ядре течения, где скорость в первом приближении можно считать постоянной. Однако у стенки изменением скорости \mathbf{U} пренебрегать нельзя. Согласно (3), звуковой луч в этой области меняет направление. Оценим суммарный угол поворота луча в поле $U(z)$.

Течение в плоском канале направим вдоль оси x . Считаем, что скорость зависит только от координаты z и нарастает с удалением от стенки: при $z = 0$ имеем $U = 0$ и $dU/dz > 0$. Обозначая начальную ориентацию звукового луча индексом „0“, после интегрирования (3) для

компонент вектора \mathbf{s} получим ($U \ll c$):

$$s_x = s_{x0} + M(z), \quad s_y = s_{y0}, \quad s_z = \sqrt{1 - s_x^2 - s_y^2}, \quad M(z) = \frac{U(z)}{c}. \quad (4)$$

Для упрощения формул ограничимся случаем эволюции звуковых лучей в вертикальном сечении канала с азимутальным углом $\varphi = 0$ и полярным углом $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Среднюю скорость в турбулентном потоке представим функцией

$$U(z) = U_0 [4z(1-z)]^{1/m} \quad \text{или} \quad M(z) = M_0 [4z(1-z)]^{1/m}, \quad (5)$$

где U_0 — скорость в середине канала между двумя стенками, M_0 — соответствующее число Маха, m — параметр, характеризующий режим течения. При ламинарном режиме $m = 1$, при турбулентном течении $m \gg 1$ ($m = 5, 10$), при постоянной по сечению скорости $m = \infty$. Учитывая выбор угла $\varphi = 0$ и выражая компоненты вектора \mathbf{s} через направляющий угол ϑ , из (4) и (5) находим:

$$\vartheta = \arcsin(\sin \vartheta_0 + M_0 [4z(1-z)]^{1/m}). \quad (6)$$

Соотношение (6) позволяет составить дифференциальное уравнение траектории луча в явном виде $z(x)$, а также параметрические дифференциальные уравнения для определения длины пути l , пройденного лучом до точки наблюдения с координатами $\{x, z\}$:

$$dz/dx = 1/\operatorname{tg} \vartheta(z, \vartheta_0, M_0, m), \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dl} = \sin \vartheta(z, \vartheta_0, M_0, m), \quad \frac{dz}{dl} = \cos \vartheta(z, \vartheta_0, M_0, m). \quad (8)$$

Граничные условия имеют вид $z(0) = 0$, $(dz/dx)|_{x=0} = 1/\operatorname{tg} \vartheta_0$ и соответственно $x(0) = z(0) = 0$, $(dx/dl)|_{l=0} = \sin \vartheta_0$, $(dz/dl)|_{l=0} = \cos \vartheta_0$.

Ориентация луча и направление пульсаций при прочих равных условиях зависят от начального угла ϑ_0 . Чем больше $|\vartheta_0|$, тем сильнее отклонение. При движении против течения $\vartheta_0 < 0$, траектория луча отклоняется от стенки. В противоположном случае $\vartheta_0 > 0$ она приближается к стенке и существует такое значение $\vartheta_0 = \vartheta_*$, при котором $\vartheta = \pi/2$, когда луч удаляется от стенки на расстояние, не превышающее некое конечное значение z_* . Пройдя максимум z_* , луч возвращается

к стенке, описывая дугообразную траекторию, своего рода цикл. Так как в цикле угол падения луча $-\vartheta$ равен углу отражения ϑ , он повторяется до затухания волны.

Из условия $\vartheta = \pi/2$ и формулы (6) найдем зависимость величины z_* от угла ϑ_* и параметров течения $z_*(m, M_0, \vartheta_*)$ (знак „минус“ перед корнем отвечает нижней стенке канала):

$$z_* = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \sin \vartheta_*}{M_0} \right)^m} \right). \quad (9)$$

Заметим, что скорость M_0 зависит от параметра m . Например, в потоке воздуха в плоском канале высотой $d = 1$ см число Рейнольдса достигает критической величины при $M_0 \approx 0.01$. Поэтому ламинарному течению $m = 1$ соответствует диапазон $M_0 \in [0, 0.01]$, для турбулентного режима $m \gg 1$ имеем $M_0 > 0.01$. При $m = 1$ циклическое движение луча происходит в пределах небольшого сектора $\vartheta_* > 85^\circ$, тогда как при $m \gg 1$ граница сектора может расширяться до $\vartheta_* > 60^\circ$. Кроме того, с увеличением m зависимость $z_*(m, M_0, \vartheta_*)$ становится все более резкой.

Каждое значение z_* имеет свой предельный угол ϑ_* , который зависит от m и M_0 . На рис. 2 построены траектории лучей для течения с параметрами $m = 5$ и $M_0 = 0.05$. Цифрами на графике обозначены предельные углы ϑ_* , которые относятся к траекториям, проходящим через максимальные значения $z_* = \{0.484, 0.463, 0.422, 0.341, 0.186, 0.075\}$.

Поверхность $z_*(m, M_0, \vartheta_*)$ выделяет область начальной ориентации лучей, $-\pi/2 \leq \vartheta_0 < \vartheta_*$, в которой действительных значений z_* не существует. В ней лучи беспрепятственно попадают в любую точку $z > z_*$, где суперпозиция формирует пространственно-временное поле пульсаций гидродинамических параметров. Это поле аналогично тому, которое образуется в ядре течения, но имеет свои особенности. Эти особенности иллюстрирует рис. 3 для потока $M_0 = 0.05$ и $m = 5$, где построены траектории лучей (без учета отраженных волн), проходящих через две точки наблюдения, удаленные на разные расстояния от стенки: $\{x, z\} = \{0, 0.5\}$ и $\{x, z\} = \{0, 0.1\}$.

Из графиков прежде всего видно, что область зарождения волн x, p , звуковые лучи которых вызывают возмущения в точке наблюдения, относительно невелика и к тому же асимметрично расположена

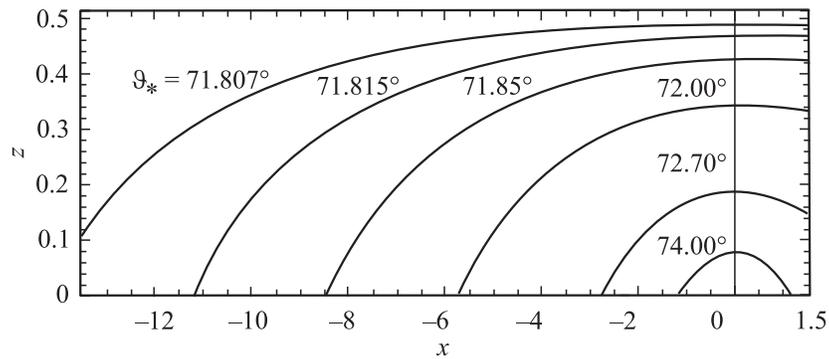


Рис. 2. Траектории лучей для предельных углов ϑ_* в потоке $m = 5$, $M_0 = 0.05$: углы ϑ_* соответствуют значениям $z_* = \{0.075, 0.186, 0.341, 0.422, 0.463, 0.484\}$.

относительно точки $x = 0$. Причем ее часть $x p^-$ вверх по течению ($x p < 0$) заметно превышает протяженность участка $x p^+$ вниз по течению ($x p > 0$). Влияние профиля $M(z)$ проявляется в том, что возмущения из точек $x p^+$ увеличивают компоненту пульсаций u_z , а из точек $x p^-$ усиливают компоненту u_x . Следовательно, учет профиля скорости течения приводит к преимущественной ориентации пульсаций в направлении потока.

Сравним процесс формирования пульсаций в точках наблюдения, расположенных на разной высоте. Область параметра $x p^+$ в обоих случаях ограничена одним и тем же предельным углом $\vartheta_0 = -\pi/2$. Различия возникают в области параметра $x p^-$. Для места наблюдения $\{x, z\} = \{0, 0.5\}$ значения $x p^-$ ограничены предельным углом $\vartheta_* = 71.8^\circ$ ($z = z_* = 0.5$). В точке $\{x, z\} = \{0, 0.1\}$, расположенной ближе к стенке ($z = z_* = 0.1$), тоже существует предельный угол, равный $\vartheta_* = 73.6^\circ$. Но в ней на пульсации влияют также возмущения, лучи которых проходят через точки, лежащие выше уровня $z_* = 0.1$. В диапазоне $z_* \in [0.1, 0.5]$ им соответствуют углы $\vartheta_* \in [73.6^\circ, 71.8^\circ]$. Поэтому с приближением к стенке компонента пульсаций u_x еще больше возрастет. Именно такой результат получен в экспериментах Г. Райхардта, а также П.С. Клебанова (см. [2, гл. 18, § 4]).

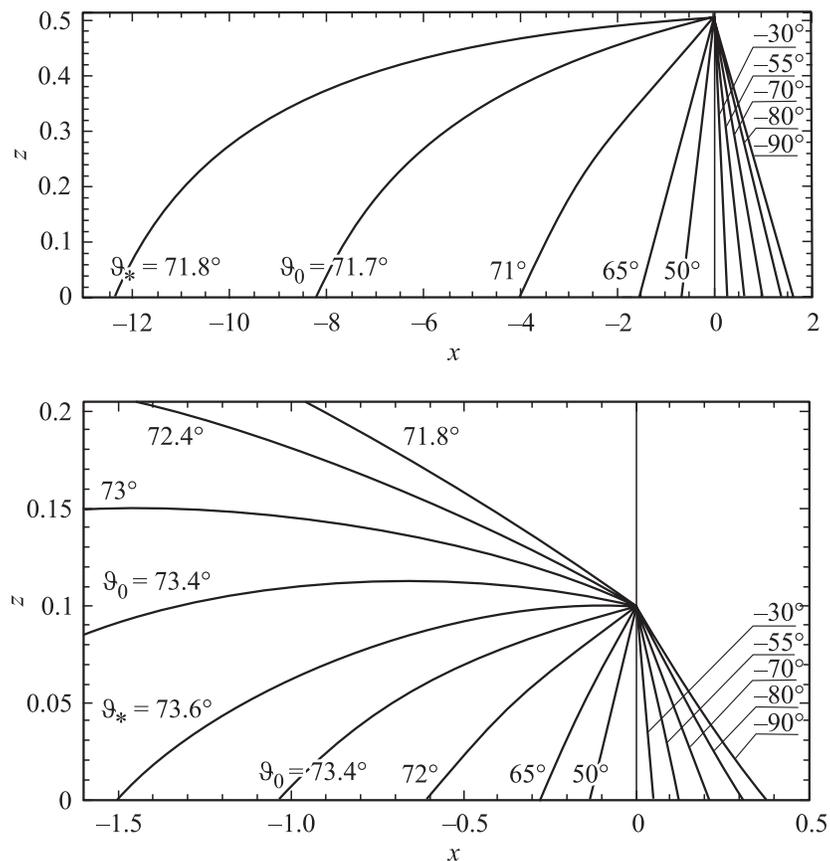


Рис. 3. Траектории лучей, проходящих через точки наблюдения $\{x, z\} = \{0, 0.5\}$ и $\{x, z\} = \{0, 0.1\}$.

Рассмотрим теперь распространение возмущений в узкой зоне $z \in [0, 0.1]$ на примере лучей с начальными направлениями $\vartheta_0 = \{70, 73, 75, 76, 77^\circ\}$. Их траектории показаны на рис. 4 в потоке с теми же параметрами ($m = 5$, $M_0 = 0.05$). Как ясно из предыдущего, луч $\vartheta_0 = 70^\circ$, сохраняя направление почти неизменным, уходит в ядро течения. Луч $\vartheta_0 = 73^\circ$ описывает циклическую траекторию высотой

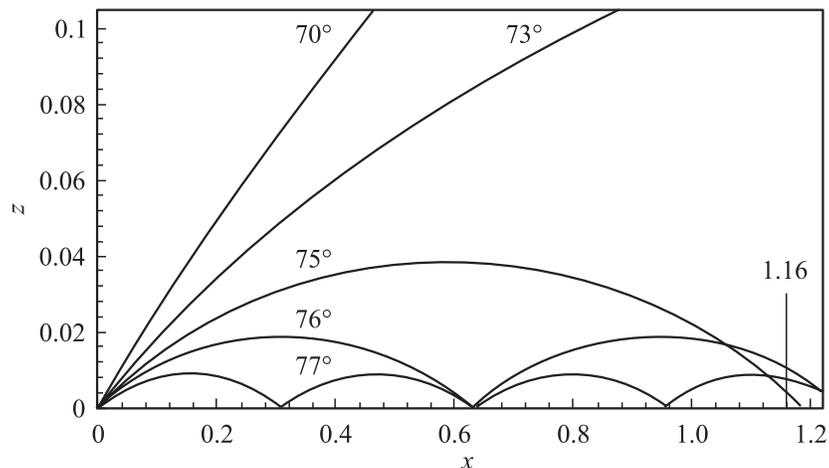


Рис. 4. Распространение звуковых лучей у стенки для углов $\vartheta_0 = 70, 73, 75, 76, \text{ и } 77^\circ$.

$z_* \approx 0.15$ и длиной $l \approx 4.5$. На такой длине возмущение практически затухает, и траектория луча выглядит как дуга вихреобразной формы. В выделенном слое остаются лучи с углами $\vartheta_0 = \{75, 76, 77^\circ\}$ и длиной пройденного волной пути $l \approx 1.2$.

В зависимости от наклона ϑ_0 траектория длиной $l \approx 1.2$ образует от двух до четырех циклов, и лучи одного возмущения переплетаются. Например, в сечении $x = 1.16$ вместо ожидаемого порядка $77-76-75^\circ$ наблюдается последовательность $75-77-76^\circ$. В волне, конечно, угол ϑ_0 меняется непрерывно, и в слое высотой $z_*(75^\circ) \approx 0.04$ (диапазон $\vartheta_0 \in [75, 90^\circ]$) происходит полное перемешивание лучей. В этом слое, как в ядре течения, взаимодействие волн сформирует свое пространственно-временное поле пульсаций, но механизм будет другим. Дело в том, что приближение геометрической акустики, понятие „звуковой луч“ становятся неприменимыми, и для вычисления пульсаций необходимо использовать интеграл Кирхгофа–Френеля. На этом основании слой высотой $z_*(75^\circ) \approx 0.04$ можно считать пограничным слоем.

С пульсациями скорости в волновом пакете связан удельный поток энергии ρu^2 . При отражении волны в узкой полосе у стенки скорость пульсаций обращается в нуль, и их энергия передается колебаниям давления и плотности. Ввиду отсутствия пульсаций скорости эту полосу можно рассматривать как ламинарный подслой турбулентного пограничного слоя. Очевидно, его высота δ зависит от вида функции $f(r)$ и для разных функций составляет $\delta \sim (0.1-0.2)a$.

Согласно волновому механизму турбулентности, пространственно-временное поле пульсаций гидродинамических параметров является следствием суперпозиции возмущений, которые возникают на стенке и распространяются как волновые пакеты. В ядре потока, где градиентами параметров можно пренебречь, поле пульсаций формируется при суперпозиции волновых пакетов сферического типа. В зоне значительных градиентов параметров траектории звуковых лучей замыкаются на стенку и переплетаются, сферический волновой фронт перестает существовать, а приближение геометрической акустики становится неприменимым. Смена механизма формирования пульсаций и их преимущественно продольная ориентация определяют область пограничного слоя. Ослабление пульсаций скорости в волне при ее отражении создает у стенки ламинарный подслой турбулентного пограничного слоя. Заметим, что основным параметром, влияющим на свойства пограничного слоя, является число Маха, несмотря на условие $M_0 \ll 1$.

Список литературы

- [1] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. (Пер. с нем. von H. Schlichting. Grenzschicht-Theorie. V.G. Braun. Karlsruhe, 1960).
- [2] Prandtl L. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandlg. III. Intern. Math. Kongr. Heidelberg, 1904. P. 484–491.
- [3] Пятницкий Л.Н. // ЖЭТФ. 1998. Т. 113. В. 1. С. 191–203.
- [4] Pyatnitsky L.N. // Physics of Vibrations. 2000. V. 8. N 3. P. 185–207.
- [5] Пятницкий Л.Н. // ЖЭТФ. 2001. Т. 119. В. 4. С. 665–684.
- [6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.