

09

## **Синхронизация в системе с неустойчивым циклом, инициированная внешним сигналом**

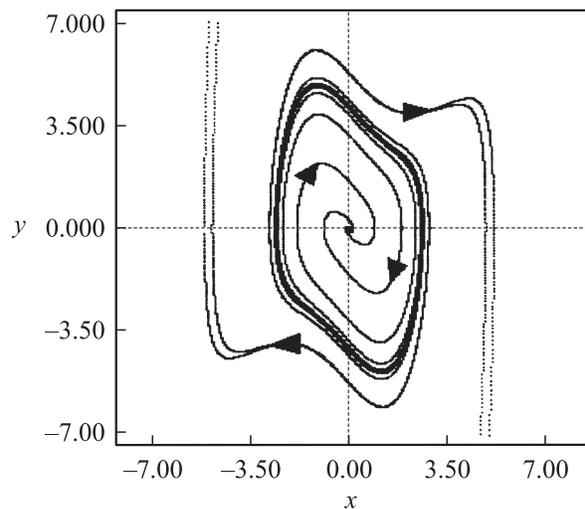
© А.П. Кузнецов, Л.В. Тюрюкина

Саратовское отделение Института радиотехники и электроники РАН  
E-mail: alkuz@sgu.ru

Поступило в Редакцию 10 ноября 2002 г.

Рассматриваются динамика системы с неустойчивым предельным циклом под действием периодической последовательности дельта-импульсов. Показано, что в узкой области значений параметров сигнала наблюдаются устойчивые квазипериодические режимы и режимы захвата фазы (синхронизация).

Явление синхронизации известно очень давно и тем не менее продолжает привлекать внимание исследователей. Классическая ситуация синхронизации состоит в том, что реализуется внешнее периодическое (обычно гармоническое) воздействие на автоколебательную систему с устойчивым предельным циклом [1,2]. В этом случае возможны режимы захвата частоты и квазипериодические режимы соответственно внутри и вне языка Арнольда на плоскости частота – амплитуда воздействия. В фазовом пространстве реализуются либо устойчивый тор, которому в сечении Пуанкаре отвечает замкнутая кривая, либо устойчивый и седловой предельные циклы, возникающие на этом торе при переходе через границу языка. Рассмотрим теперь альтернативный вариант, когда в автономной системе реализуется неустойчивый предельный цикл. На первый взгляд при наличии внешнего воздействия можно ожидать в фазовом пространстве неустойчивый тор или же неустойчивые циклы, отвечающие синхронизации на этом торе. В нелинейной динамике, однако, известен широкий круг явлений, связанный с так называемой проблемой управления хаосом [3]. В рамках этих представлений изучаются ситуации воздействия на систему, которые могут стабилизировать неустойчивость. Например, если в дискретной системе имеется неустойчивый цикл, то, воздействуя на него сигналом, определяемым элементами цикла, можно добиться его стабилизации. Возникает интересный вопрос: нельзя ли, используя импульсное воздействие,



**Рис. 1.** Фазовый портрет автономной системы.

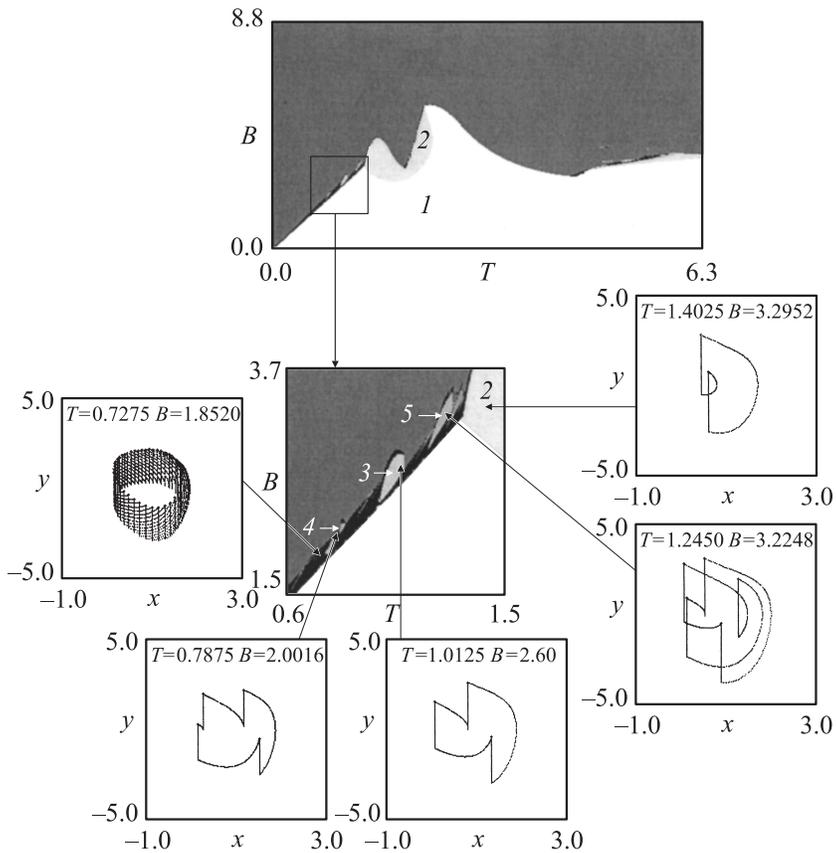
вызвать стабилизацию в системе с неустойчивым предельным циклом и инициировать устойчивые синхронные и квазипериодические режимы? Оказывается, что такая схема управления возможна.

С целью продемонстрировать такую инициированную синхронизацию рассмотрим систему типа уравнения Ван-дер-Поля–Дуффинга, но с неустойчивым предельным циклом, которая возбуждается периодической последовательностью  $\delta$ -импульсов:

$$\ddot{x} + (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = B \sum \delta(t - nT). \quad (1)$$

Здесь  $x$  — динамическая переменная,  $\lambda$  — управляющий параметр (при  $\lambda = 0$  в автономной системе имеет место обратная бифуркация Андронова–Хопфа, когда фокус в начале координат из неустойчивого становится устойчивым и от него отделяется неустойчивый предельный цикл),  $T$  — период следования импульсов,  $B$  — их амплитуда.

В автономном случае при положительных  $\lambda$  система (1) содержит устойчивую неподвижную точку и неустойчивый предельный цикл. Соответствующий фазовый портрет показан на рис. 1. Включим теперь



**Рис. 2.** Карта динамических режимов дифференциального уравнения (1) на плоскости параметров период внешнего воздействия  $T$  — амплитуда  $B$  для  $\lambda = 1.2$ ,  $\beta = 1.0$ , ее увеличенный фрагмент и портреты аттракторов.

внешний сигнал в соответствии с уравнением (1). На рис. 2 представлена карта динамических режимов на плоскости параметров период внешнего воздействия  $T$  — амплитуда  $B$  для этого дифференцированного уравнения. Значение управляющего параметра  $\lambda = 1.2$ , а параметр фазовой нелинейности (неизохронности)  $\beta = 1.0$ . На карте белый цвет соответствует режиму периода 1, светло-серый — режиму периода 2

и т.д., черный цвет отвечает квазипериодическим режимам и хаосу, а область убегания траекторий также обозначена одним из оттенков серого. (Период цикла определяется в сечениях Пуанкаре, которые проводятся через промежутки времени, равные периоду внешнего воздействия  $T$ ). На карте рис. 2 можно видеть две обширные области — устойчивого движения с периодом 1 и убегания траекторий. Это физически совершенно естественно — при малых амплитудах воздействия изображающая точка приближается к устойчивому фокусу, при больших — толчки „выбрасывают систему“ за границы устойчивого цикла и изображающая точка уходит на бесконечность. Однако можно видеть и очень узкую полосу устойчивых режимов синхронизации, которая разделяет эти области. Внизу дан увеличенный фрагмент карты, на котором область синхронизации показана более детально. Внутри этой полосы наблюдаются квазипериодические режимы и языки синхронизации периода 2, 3, 4, 5 и т.д. Для этих режимов также представлены портреты аттракторов. Можно видеть, что траектория движется в окрестности неустойчивого предельного цикла автономной системы, а внешний сигнал своими ударами возвращает траекторию в эту окрестность. Таким образом действительно реализуется ситуация управления, инициирующая устойчивые квазипериодические режимы и режимы синхронизации в окрестности неустойчивого предельного цикла.

Работа поддержана грантом CRDG REC-006, А.П.К. благодарен также Фонду содействия отечественной науки.

## Список литературы

- [1] Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
- [2] Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization. Cambridge, 2001. 411 p.
- [3] Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. С. 19.