

04

## Филаментация магнитного поля и квазиакустико-гравитационные волны в плазме с эффектом Холла при конечном $\beta$

© Л.М. Алексеева

Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ  
им. М.В. Ломоносова  
E-mail: a.getling@ru.net

Поступило в Редакцию 12 ноября 2002 г.

Эффект Холла в течениях плазмы, перпендикулярных магнитному полю и не меняющихся вдоль него, может „филаментировать“ (превращать в „нити“) магнитный поток, разбивая его на узкие силовые трубки. Процесс обусловлен особенностями генерации магнитного поля в холловской плазме. Результаты аналитического исследования резких возмущений плавно меняющихся потоков такой плазмы обобщены здесь на случай произвольного отношения  $\beta$  газового давления к магнитному. Отмеченные явления должны наблюдаться как в лабораторной плазме, так и в природных условиях (на Солнце).

Появление в холловской плазме резких градиентов физических величин и быстрое развитие мелкомасштабной неустойчивости было впервые обнаружено при численном моделировании течений в плазменных каналах путем решения магнитогидродинамических (МГД) уравнений с учетом эффекта Холла (см. обзор [1]):

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\mathcal{P} + \mathbf{j} \times \mathbf{H}, \quad \mathcal{P} = c^2\rho, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho\mathbf{v}),$$

$$\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{H}, \quad (\nabla \cdot \mathbf{H}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \nu\mathbf{j} - \mathbf{v} \times \mathbf{H} + \frac{\xi}{\rho} \left( \mathbf{j} \times \mathbf{H} - \frac{\nabla\mathcal{P}}{2} \right). \quad (2)$$

Здесь единицами измерения магнитного поля и плотности служат их значения  $\rho_*$  и  $H_*$  в некоторой отсчетной точке; скорости и давления плазмы — альвеновская скорость и магнитное давление в этой точке;

расстояния — характерный масштаб  $L$  изменения плотности плазмы (в случае канала — его длина). Уравнения содержат три константы: параметр обмена  $\xi = \hat{c} m_i / (eL\sqrt{4\pi\rho_*})$ , характеризующий эффект Холла, магнитную вязкость  $\nu = \hat{c}^2 / (4\pi\lambda_*Lv_*)$  и отношение  $\beta = 2c^2$  газового давления к магнитному (где  $c$  — газодинамическая скорость звука,  $m_i$  — масса иона,  $\hat{c}$  — скорость света,  $(-e)$  — заряд электрона); проводимость плазмы  $\lambda_*$  постоянна, поскольку плазма предполагается изотермической; заметим еще, что  $\xi/\nu = \omega_e \tau_e$ .

Примем, что плазма течет поперек магнитного поля  $\mathbf{H}$ , направленного вдоль оси  $z$  некоторой декартовой системы координат, и все физические величины постоянны по  $z$ . Уравнение динамики магнитного поля

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{H} + \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \xi \nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla \frac{H^2}{2}, \quad (3)$$

полученное из (2), вместе с (1) образует систему для отыскания вектора  $\Pi(x, y, t) = (\rho, \mathbf{v}, H)$ . Вид уравнения (3) показывает, что наряду с обычной генерацией магнитного поля движением проводящей среды поперек  $\mathbf{H}$  (член  $\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H})$ ) в холловской плазме есть еще дополнительная, обусловленная  $\xi$ , генерация  $\mathbf{H}$  перепадом плотности, поперечным градиенту  $\nabla H$  (последний член уравнения).<sup>1</sup> Очевидно, эта добавочная холловская генерация сильнее действует там, где больше изменения  $H$ .

<sup>1</sup> Так, двупричинно, генерация магнитного поля выглядит лишь при трактовке плазмы как одножидкостной среды с эффектом Холла; собственно такая среда и описывается системой уравнений (1), (2) для  $\Pi = (\rho, \mathbf{v}, H)$ . Эта система получается из уравнений для двухкомпонентной плазмы, состоящей из электронной и ионной проводящих „жидкостей“, благодаря весьма необременительным и естественным допущениям  $m_e/m_i \rightarrow 0$ ,  $n_i \rightarrow n_e$ . Средняя скорость ионов при этом оказывается скоростью среды  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}$ , а скорость электронной жидкости  $\mathbf{v}_e$  связывается с величинами, входящими в систему (1), (2), через соотношение  $\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - \xi \mathbf{J}/\rho$ . При использовании этого соотношения в (2) уравнение (3) динамики  $\mathbf{H}$  имеет вид  $\partial \mathbf{H}/\partial t = \nu \Delta \mathbf{H} + \text{rot}(\mathbf{v}_e \times \mathbf{H})$  (его часто приводят в литературе по холловской плазме при  $\nu = 0$  как свидетельство вмерзности силовых линий  $\mathbf{H}$  в электроны). Отсюда ясно, что реально единственной причиной генерации поля  $H$  служит движение проводника — электронной жидкости — поперек  $\mathbf{H}$ . Однако констатация этого факта не продвигает нас в получении конкретных выводов о поведении плазмы, так как добавление к  $(\rho, \mathbf{v}, H)$  еще одной неизвестной функции  $\mathbf{v}_e$  выводит нас за рамки замкнутой системы (1), (2) и требует решения более громоздкой системы МГД уравнений для двухкомпонентной плазмы. Мы будем продолжать работу с удобной и компактной системой (1), (2) и соответственно с уравнением генерации в виде (3). Отметим также, что роль неколлинеарных  $\nabla \mathcal{P}$  и  $\nabla H$  в связи с проблемой эволюционности уравнений обсуждалась в работе [1].

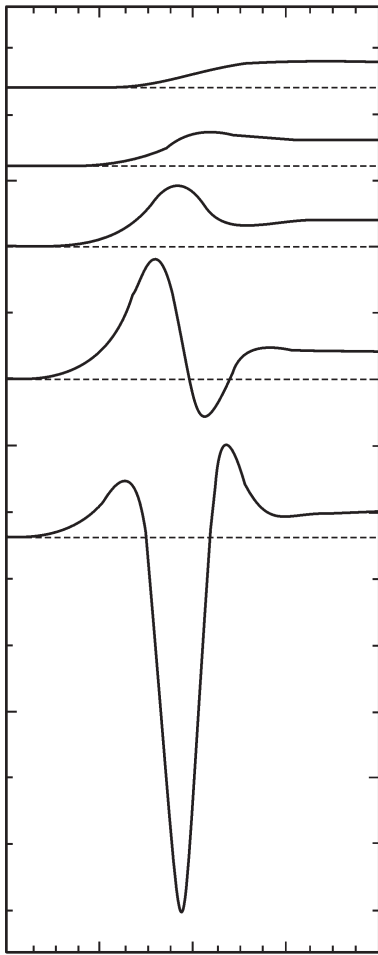
Интересна эволюция локализованного  $\nabla H$ . Ее удобно проиллюстрировать на случае, когда магнитное поле не влияет на газодинамические характеристики плазмы. (Такого рода кинематический подход часто использует теория МГД динамо, где рассматривается обычное самовозбуждение магнитного поля в ядрах планет и в звездах). Допустим, что известный вектор  $\nabla\rho$  постоянен в некоторой области течения. Введем локальную правую декартову систему координат  $(X, Y, z)$ , у которой ось  $X$  направлена вдоль  $\nabla\rho$ . Пусть в начальный момент  $\partial/\partial Y$  отлично от нуля лишь на некотором интервале  $Y$  (см. рисунок). Благодаря холловской генерации магнитного поля перепадом плотности (отвлечемся пока от влияния обычной генерации  $\mathbf{H}$  скоростью  $\mathbf{v}$ ) произойдет укручение профиля  $H$ . Процесс генерации идет тем более бурно, чем больше  $|\nabla H|$ . В итоге в области локализации затравки  $\nabla H$  самовозбудится мелкомасштабно-структурированное и при этом интенсивное магнитное поле. Иными словами, магнитный поток здесь будет приобретать все более „филаментированный“ вид, разбиваясь на мелкомасштабные силовые трубки — „нити“, вообще говоря, с сильно отличающимися характерными значениями  $\mathbf{H}$  (в том числе превосходящими по интенсивности начальное магнитное поле, с соседством противоположно направленных линий  $\mathbf{H}$  и т.д.). Однако возрастающая при измельчении масштаба диссипация приведет к тому, что на какой-то стадии дробления течение установится — в том смысле, что дальнейшая филаментация идти не будет. В общем некинематическом случае плазма в области самовозбуждения  $\nabla H$  окажется выдавленной в силовые трубки со сравнительно слабым  $H$ . (Возможно, что структурированная картина, наблюдаемая в надфотосферных слоях Солнца, связана с этими свойствами холловской плазмы — промежуточной между плотной МГД плазмой и вышележащей „бесстолкновительной“).

Если представить себе, что установившееся течение стационарно, то из самого вида системы (1), (3) можно извлечь выражение для характерного мелкого масштаба филаментации: поперечный размер нити составляет  $\gamma^{-1}$ , где

$$\gamma = -\frac{\xi}{vc^2} \frac{H}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial l} \left( c^2 \rho + \frac{H^2}{2} \right) \gg 1 \quad (4)$$

( $\partial/\partial l$  — производная вдоль линии потока вещества) [2–4].

Для  $c \ll 1$  в [5–7] было найдено установившееся решение системы (1), (3) в форме  $\Pi(x, y, t) = \Pi^0(x, y) + \tilde{\Pi}(x, y, t)$ , где  $\tilde{\Pi}(x, y, t) \ll \Pi^0$



Эволюция магнитного поля с локализованным в пространстве градиентом (схема). По оси абсцисс представлены значения  $Y$ , по оси ординат —  $H$  (то и другое в условных единицах). Сверху вниз следуют кривые для последовательных моментов времени. Горизонтальные штриховые линии соответствуют значению  $H$  слева от области локализации градиента.

представляет собой акустические линейные волны, бегущие со скоростью  $c$  на фоне заданного плавно меняющегося потока  $\Pi^0$ , у которого, в координатах  $(x, y, z)$  с осью  $x$  вдоль потока,  $v_y^0/v_x^0 \sim \delta \ll 1$ . Оказалось, что для  $\tilde{\rho}$  справедливо уравнение, по форме совпадающее с известным уравнением акустико-гравитационных волн в атмосфере [8], причем величина  $\gamma^{-1}$ , определенная выражением (4) через компоненты  $\Pi^0$ , играет роль высоты однородной атмосферы (поскольку  $\Pi^0$  — плавно меняющийся поток, в выражении (4)  $\partial/\partial l = \partial/\partial x$ ; мы считаем  $\gamma$  настолько большим, что  $\gamma\delta \gg 1$ ; приняты также соотношения  $\xi \gg c \gg \delta$ ). Как при распространении атмосферных волн вверх, в ускоряющихся потоках  $\Pi^0$  амплитуда волн  $\tilde{\Pi}$  сильно растет по мере их распространения против направления оси  $y$ . Формулы упрощаются, если в качестве  $\Pi^0$  выбрано изомагнитное изобернуллиевое решение  $I^0$  системы (1), (3) при  $\partial/\partial t = \xi = v = 0$ : в потоке  $I^0$  имеем  $H^0 = \rho^0$ , к тому же в нем главные члены  $\rho_0$  и  $\gamma_0$  разложения  $\rho^0$  и  $\gamma$  по  $\delta$  не зависят от  $y$ . При этом функция  $\tilde{\rho}$  имеет вид

$$\tilde{\rho} = \chi \exp\left(\frac{\xi}{v\beta} \rho'_{0x} y\right) \exp[i(ky + \omega t)], \quad k^2\beta = 2\omega^2 \quad (5)$$

(дисперсионное уравнение выписано здесь для достаточно больших частот  $\omega$ ;  $\chi(x)$  — амплитудный множитель, штрихом обозначена производная по переменной, указанной в индексе).

Теперь найдем тем же способом решение для более общего случая произвольной величины  $c^2 = \beta/2$ . Система (1), (3) при этом сводится к уравнениям<sup>2</sup>

$$\tilde{\rho}''_{\tau\tau} = \tilde{\rho}''_{qq} + \mu \tilde{H}''_{qq}, \quad (1 + \mu)\tilde{H}'_q + \tilde{H} = \tilde{\rho}, \quad (6)$$

где  $q = \gamma y$ ,  $\tau = c\gamma t$ ,  $\mu = H^0 c^{-2}$ .

В частном случае  $\Pi^0 = I^0$  решение системы (6) в переменных  $q$  и  $\tau$  имеет вид плоских волн с действительной частотой и комплексным

<sup>2</sup> Выбор амплитуды  $\tilde{\Pi} \ll \Pi^0$  должен обеспечивать малость как нулевых, так и нелинейных по  $\tilde{\Pi}$  членов уравнений по сравнению с линейными. Для выполнения последнего из этих требований достаточно, чтобы было  $\tilde{H} \ll \min(c^2, \gamma^{-1}\delta^{-1})$ . Величина нулевых членов зависит от структуры  $\Pi^0$ . При выводе (6) имелись в виду отдельно две ситуации: потоки с  $\omega_e\tau_e \gg 1$ , в которых  $\partial H^0/\partial y \lesssim 1$ , и потоки произвольной замагничности, но со сравнительно однородным магнитным полем  $\partial H^0/\partial y \sim \delta$ ; в последний класс входит  $I^0$ , при котором диапазон возможной амплитуды  $\tilde{H}$  особенно широк, поскольку  $I^0$  не дает вклада в нулевой член уравнения (3), отражающий действие эффекта Холла.

волновым вектором. Его мнимая часть растет по абсолютной величине с увеличением частоты, выходя на „насыщение“. И тогда оказывается, что, несмотря на произвольность  $\beta$ , для  $\tilde{\rho}$  справедлива формула (5), где  $k$  действительно. Она и теперь представляет волны с резкими пространственными градиентами (напомним, что при  $\beta \gtrsim 1$ , в силу (4), мы имеем дело с  $\xi/\nu \gg 1$ ). Таким образом, движущаяся холловская плазма, лабораторная или природная, является средой, в которой при разнообразных значениях  $\beta$  возникают волны акустической природы („квазиакустико-гравитационные“), которые могут сильно увеличивать свою амплитуду по мере распространения и потому легко переходить в нелинейный режим. Отметим в связи с этим результат недавних наблюдений, показавших, что во внешней области Солнца — переходном слое от хромосферы к короне — проявляют себя колебания, которые лучше всего отождествляются с нелинейными акустическими волнами (см. обзор [9]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00-02-16313).

## Список литературы

- [1] Брушлинский К.В., Морозов А.И. // Вопросы теории плазмы. В. 8. М., 1974. С. 88–246.
- [2] Алексеева Л.М. // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. В. 10. С. 1–4.
- [3] Алексеева Л.М. // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. № 3. С. 567–571.
- [4] Alekseeva L.M. // J. Plasma Phys. 1999. V. 61. Pt. 5. P. 671–699.
- [5] Алексеева Л.М. // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. В. 13. С. 6–10.
- [6] Алексеева Л.М. // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19. В. 5. С. 34–38.
- [7] Alekseeva L.M. // Laser and Particle Beams. 1997. V. 15. N 1. P. 65–72.
- [8] Ламб Г. Гидродинамика. М.–Л.: ГТТИ, 1947. 928 с.
- [9] Fleck B., Brekke P., Haugan S. et al. // ESA Bull. 2000. N 102.