07

Топология „вакуума“ в диэлектрическом волноводе

© И.В. Дзедолик

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь
E-mail: dzedolik@crimea.edu

Поступило в Редакцию 30 сентября 2002 г.

Рассмотрены энергетические состояния нелинейной системы электромагнитное поле–диэлектрический волновод. Показано, что такая система обладает множеством „вакуумных“ состояний, в которых ее „внутренняя“ энергия равна нулю. Наличие множества вакуумных состояний свидетельствует о возможности возникновения в системе состояний поля в форме трехмерных уединенных волн.

Описание квантовых частиц с помощью волн производилось с момента возникновения квантовой механики [1]. Известны также работы, в которых классические волны описывались как поток квазичастиц [2,3]. При нелинейных режимах распространения поля в среде и в классическом, и в квантовом случаях в зависимости от соотношения параметров поля и среды возможно формирование как периодических кноидальных волн, так и уединенных волн, имеющих свойства частиц [4]. Существование поля в форме уединенных волн с характеристиками частиц обусловлено свойствами данной системы „среда–поле“ образовывать топологические вакуумные состояния с нулевой внутренней энергией, в которых величина поля не обязательно равна нулю [5].

Найдем вакуумные состояния системы электромагнитное поле–диэлектрический волновод в классическом случае. Рассмотрим распространение электромагнитного излучения в волноводе, имеющем форму изотропного диэлектрического цилиндра кругового сечения. Учтем кубичный нелинейный оклик среды — кварца, из которого изготовлен волновод. Тогда запишем нелинейное уравнение для электрического поля $\mathbf{E}$ в виде

$$\left(\nabla^2 - \frac{\varepsilon_1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = \frac{4\pi\chi_3}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}, \tag{1}$$

где $\nabla = \mathbf{1}_x\partial/\partial x + \mathbf{1}_y\partial/\partial y + \mathbf{1}_z\partial/\partial z$ — оператор набла, $\mathbf{1}_{x,y,z}$ — единичные орты, $\varepsilon_1 = 1 + 4\pi\chi_1$.

Предполагая гармоническую зависимость $\mathbf{E}$ от времени, т.е. пренебрегая генерацией гармоник, представим поле в форме волноводных мод с действительной амплитудой $\mathbf{e}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}(r)\exp(ikl\varphi)\exp\bigl[i(\omega t - \beta z)\bigr] \quad (\kappa = \pm 1,\, l = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Тогда, подставляя (2) в (1), получаем систему уравнений в цилиндрических координатах

$$\left(\frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{d}{dR} - \frac{l^2}{R^2}\right)e_j + m^2 e_j + \alpha e^2 e_j = 0 \quad (j, k = x, y, z), \tag{3}$$

где

$$m^2 = r_0^2(\omega^2\varepsilon_1/c^2 - \beta^2),\ \ \alpha = 4\pi\chi_3 r_0^2\omega^2/c^2,\ \ e^2 = \sum_{j=x,y,z} e_j^2,\ \ R = r/r_0 \in [0, 1],$$

r_0 — радиус волновода. Постоянные распространения мод β определяются дисперсионным уравнением [6]. Полевое уравнение (3) имеет вид нелинейного стационарного уравнения Клейна–Гордона, т.е. электромагнитное поле, распространяющееся в волноводе, в силу дискретности спектра постоянных распространения β_l можно рассматривать как поток квазичастиц с эффективными безразмерными массами $m_l = r_0\sqrt{\omega^2\varepsilon_1/c^2 - \beta_l^2}$.

Систему (3) с помощью подстановки $e_j = \psi_j(R)/\sqrt{R}$ запишем в форме уравнений движения квазичастицы под действием центральной силы

$$m_l\ddot{\psi}_x = -\frac{\partial U_l}{\partial\psi_x}, \quad m_l\ddot{\psi}_y = -\frac{\partial U_l}{\partial\psi_y}, \quad m_l\ddot{\psi}_z = -\frac{\partial U_l}{\partial\psi_z}, \tag{4}$$

где точка означает дифференцирование по R, $U_l = \frac{m_l}{2}\times \times\left(m_l^2 - \frac{l^2-1/4}{R^2}\right)\psi^2 + \frac{\alpha m_l}{4R}(\psi^2)^2$ — потенциал, $\psi^2 = \psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2$. Функция Гамильтона системы имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\left(m_l^2 - \frac{l^2 - 1/4}{R^2}\right)\psi^2 + \frac{\alpha m_l}{4R}(\psi^2)^2. \tag{5}$$

В конфигурационном пространстве первое слагаемое описывает „кинетическую", а в реальном — потенциальную энергию, зависящую от скорости изменения поля в пространстве, а второе и третье слагаемые — внутреннюю энергию системы.

Найдем состояния системы, в которых $H = \mathrm{const}$. Основное состояние системы при равенстве нулю потенциальной энергии (5) $\dot{\psi}^2/2 = 0$ описывается внутренней энергией

$$E_I = \frac{\alpha}{4R}(\psi^2)^2 + \frac{1}{2}\left(m_l^2 - \frac{l^2 - 1/4}{R^2}\right)\psi^2. \tag{6}$$

В возбужденном состоянии потенциальная энергия положительна, т.е. вакуумные состояния имеют место лишь при равенстве нулю внутренней энергии системы $E_I = 0$. Тогда получаем уравнение для компонент поля в вакуумных состояниях $\psi^4 - \frac{2R}{\alpha}\left(m_l^2 - \frac{l^2-1/4}{R^2}\right)\psi^2 = 0$, имеющее решения на сферах с квадратом радиуса $\psi_l^2 = \frac{2R}{\alpha}\left(m_l^2 - \frac{l^2-1/4}{R^2}\right) > 0$, а на оси волновода при $R = 0$ все компоненты поля в случае $E_I = 0$ равны нулю: $\psi_x = \psi_y = \psi_z = 0$.

Если вакуумных состояний в системе имеется более чем одно, то в этом случае возможны переходы из одного вакуумного состояния в другое без диссипации энергии, при которых поле принимает форму уединенной волны [5]. С другой стороны, известно, что солитонные решения уравнений соответствуют траектории движения системы на фазовой плоскости по сепаратрисе, проходящей через точки $\dot{\psi}_S = 0$, $dU_l(\psi_S)/d\psi = 0$ [4]. Уравнение $\frac{dU_l}{d\psi} = \psi_S^3 + \frac{R}{\alpha}\left(m_l^2 - \frac{l^2-1/4}{R^2}\right)\psi_s = 0$ имеет решения $\psi_S = 0$, $\psi_{Sl} = \sqrt{\frac{R}{\alpha}\left(\frac{l^2-1/4}{R^2} - m_l^2\right)}$. Тогда находим значения энергии системы, при которых имеют место солитонные решения, подставляя ψ_{Sl} в (5): $H_S = -\frac{m_l R}{4\alpha}\left(m_l^2 - \frac{l^2-1/4}{R^2}\right)^2$.

Вид потенциала $E_I(\psi, R)$, где R является параметром, представлен на рис. 1, а решения для полевых компонент уединенной волны e_x, e_y, e_z, полученные численными методами при решении системы уравнений (3), представлены на рис. 2. Из рис. 1 видно, что форма потенциала E_1 зависит от близости границ, т.е. величины параметра R — нормированного радиуса волновода. Потенциал имеет характерную форму, при которой возникает спонтанное нарушение симметрии системы и, следовательно, возможны частицеподобные решения вдали от границ ($R \neq 1$).

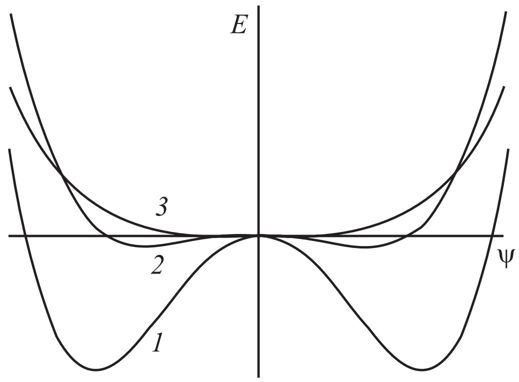

Рис. 1. Профили внутренней энергии E_I при $m_l = 1$, $l = 1$, $\alpha = 0.1$: *1* — $R = 0.4$, *2* — $R = 0.5$, *3* — $R = 1$.

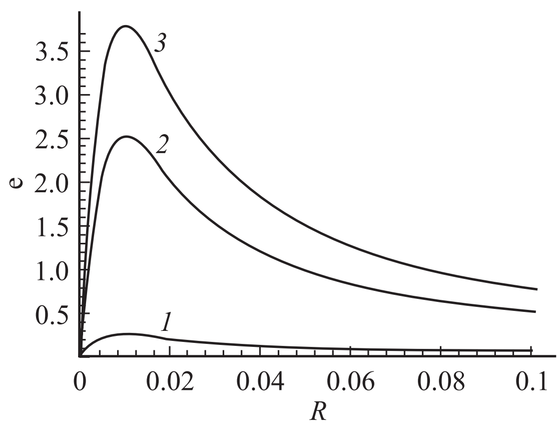

Рис. 2. Профили компонент электрического поля при $l = 1$, $m_l = 1$, $\alpha = 0.1$: *1* — e_z при $e_z(0) = 0.01$, *2* — e_x при $e_x(0) = 0.1$, *3* — e_y при $e_y(0) = 0.15$.

Рассмотрим распространение немонохроматического электромагнитного поля через волновод. Запишем векторное уравнение для волнового пакета в сопровождающей системе координат $\tau = t - z/v$, движущейся со скоростью пакета:

$$\left(\nabla_\perp^2 - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\mathbf{E} = \alpha\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}, \qquad (7)$$

где

$$\nabla_\perp = \mathbf{1}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{1}_y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{1}{u^2} = \frac{\varepsilon_1}{c^2} - \frac{1}{v^2}, \qquad \alpha = \frac{4\pi\chi_3}{c^2}.$$

Выделяя медленно меняющуюся амплитуду и фазу поля $\mathbf{E} = \mathbf{e}(\mathbf{r}, \tau)\exp(i\omega\tau)$, разделим действительные и мнимые части уравнения после подстановки $\mathbf{E}$:

$$\left(\nabla_\perp^2 - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \frac{\omega^2}{u^2}\right)\mathbf{e} = \alpha\left(\mathbf{e}\frac{\partial^2 e^2}{\partial\tau^2} + e^2\frac{\partial^2\mathbf{e}}{\partial\tau^2} + 2\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial\tau}\frac{\partial e^2}{\partial\tau} - \omega^2 e^2\mathbf{e}\right),$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial\tau} = -\alpha u^2\frac{\partial(e^2\mathbf{e})}{\partial\tau}. \qquad (8)$$

В первом приближении по $\alpha \ll 1$ из (8) получаем векторное уравнение для огибающей волнового пакета

$$\left(\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \nabla_\perp^2\right)\mathbf{e} = \left(\frac{\omega^2}{u^2} + \alpha\omega^2 e^2\right)\mathbf{e}. \qquad (9)$$

Если для уравнения (9) существует сохраняющийся топологический ток [7], не связанный с инвариантностью лагранжиана

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial\tau}\right)^2 - \frac{1}{2}(\partial_q\mathbf{e})^2 + \frac{\omega^2}{2u^2}\mathbf{e}^2 + \frac{\alpha\omega^2}{4}(\mathbf{e}^2)^2$$

относительно каких-либо преобразований, то для уравнения (9) существуют солитонные решения. Запишем топологический ток в форме $J_q^i = e^{ij}\partial_j e_q$, где

$$e^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

— единичный антисимметричный тензор $(i, j = 0, 1, 2, \; q = 1, 2, 3)$, тогда из уравнений движения (9) получаем закон сохранения топологического тока $\partial_i J_q^i = 0$.

Таким образом, система электромагнитное поле–диэлектрический волновод имеет сложную топологическую структуру, характеризуемую наличием вырожденных вакуумных состояний, в которых внутренняя энергия системы равна нулю. Эти области формируются в зависимости от энергии системы. Наличие вырожденных вакуумных состояний свидетельствует о возможности существования электромагнитного поля в диэлектрическом волноводе в форме трехмерных уединенных волн, обладающих свойствами частиц.

Автор благодарит П.Н. Лейфера за плодотворное обсуждение работы.

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Теоретическая физика. Т. 3. М.: Наука, 1989. 768 с.
[2] *Маркувиц Н.* // ТИИЭР. 1980. Т. 66. № 11. С. 25–43.
[3] *Ривлин Л.А.* // Квантовая электроника. 2000. Т. 30. № 2. С. 185–188.
[4] *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
[5] *Ребби К.* // УФН. 1980. Т. 130. В. 2. С. 329–356.
[6] *Снайдер А., Лав Дж.* Теория оптических волноводов. М.: Радио и связь, 1987.
[7] *Райдер Л.* Квантовая теория поля. М.: Мир, 1987. 465 с.