

01

Модель перехода к турбулентности в верхних слоях атмосферы

© Ю.Н. Зайко

Поволжская академия государственной службы им. П.А. Столыпина,
Саратов

Поступило в Редакцию 28 октября 2002 г.

Рассмотрено появление квазипериодических решений уравнения Кортевега–де Вриза, описывающего волны в верхних слоях атмосферы Земли в рамках модели Фримена–Джонсона. Эволюция квазипериодических решений уравнения КдВ может приводить к их стохастизации по сценарию Рюэля–Такенса–Ньюхауза. Увеличение отражения солнечного излучения от турбулентной атмосферы влияет на баланс энтропии Земли, рассматриваемой как открытая система.

Вопросы, связанные с явлением турбулизации атмосферных потоков, представляют интерес по нескольким причинам. Во-первых, оно является фактором, непосредственно влияющим на формирование погоды и в целом климатического режима как на уровне отдельных регионов, так и в глобальном масштабе. Мониторинг погодных явлений, особенно предсказание явлений катастрофического характера (смерчи, торнадо, ураганы и т.д.), представляет собой задачу государственного масштаба, являясь составной частью государственной политики в области экономики, экологии и т.д. [1]. Во-вторых, это явление непосредственно влияет на процесс обмена энтропией между Землей и Космосом, т.е. касается самого вопроса устойчивого существования Земли как открытой системы. Действительно, как принято считать в настоящее время, экспорт энтропии Земли $dS/dt = -6 \cdot 10^{14}$ W/K, обеспечиваемый за счет поглощения излучения Солнца, имеющего температуру поверхности $T_1 = 5770$ K, и излучения поверхностью Земли с температурой $T_2 = 257$ K (средняя температура поверхности Земли с учетом влияния отражения от стратосферы [2]), обеспечивает возможность компенсировать среднюю плотность производства энтропии $10^{-3} \div 10^{-4}$ W/K · m³ в нижних слоях атмосферы Земли. Турбулизация атмосферы, приводящая к дополнительному отражению

излучения Солнца, нарушает этот баланс за счет уменьшения экспорта энтропии.

Настоящая статья посвящена изучению вопроса о переходе к турбулентному режиму в рамках модели атмосферы, предложенной в [3]. В этой модели атмосфера представляется в виде слоя газа плотностью ρ конечной толщины h . Исходные уравнения представляют собой уравнения Эйлера для сжимаемой невязкой жидкости с учетом граничных условий на свободной поверхности и поверхности Земли, задаваемой уравнением плоскости $y' = 0$. Вводятся нормированные координаты и скорости (x' , y' , t' — горизонтальная и вертикальная ненормированные координаты и время; u' , v' — горизонтальная и вертикальная составляющие ненормированной скорости единицы объема газа):

$$x = \frac{x'}{L}, \quad y = \frac{y'}{h}, \quad t = \frac{V \cdot t'}{L}; \quad u = \frac{u'}{V}, \quad v = \frac{v'}{V} \cdot \delta, \quad p = \frac{p'}{\rho \cdot V^2};$$

$$V = \sqrt{gh}, \quad \delta = \frac{h}{L} \ll 1, \quad (1)$$

L — характерный горизонтальный масштаб, $L \ll R$, R — радиус Земли, что позволяет считать задачу плоской; g — ускорение свободного падения, p' и p — ненормированное и нормированное давление, V — скорость длинных гравитационных волн на свободной поверхности слоя газа. В [3] с помощью многомасштабной теории возмущений из исходных уравнений Эйлера получено уравнение Кортевега–де Вриза для величины $\eta = y - 1$ — отклонения границы атмосферы от постоянного значения $y = 1$:

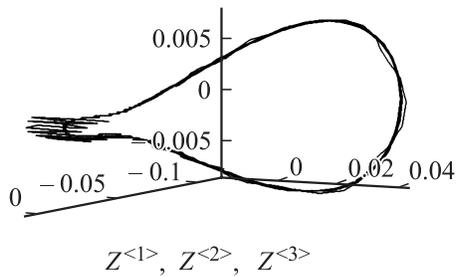
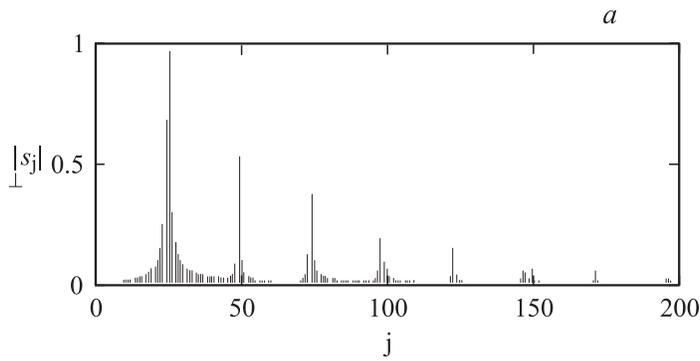
$$\alpha \eta_{\bar{t}} + \beta \eta \eta_{\bar{x}} + \gamma \eta_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} = 0, \quad \bar{t} = \varepsilon t, \quad \bar{x} = x - ct, \quad \bar{y} = y; \quad \delta^2 = K \cdot \varepsilon \quad (2)$$

(K — постоянная) при условии на скорость длинноволновых возмущений c :

$$I_2(l) = 1;$$

$$I_n(y) = \int_0^y \frac{d\bar{y}}{[U(\bar{y}) - c]^n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

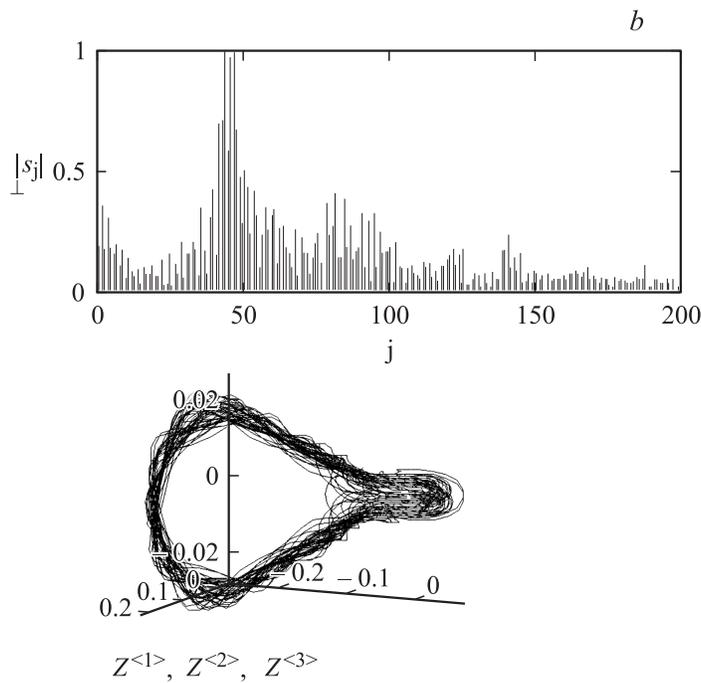
где $U(y)$ — невозмущенный профиль горизонтальной составляющей скорости $u(x, y) = U(y) + \varepsilon \cdot \bar{u}(x, y)$. Выражения α , β и γ в виде



Результаты численного анализа уравнения (5) — фазовый портрет ($Z^{(1)} = \psi_1$, $Z^{(2)} = \psi_2$, $Z^{(3)} = \psi'_1$) и спектр реализации, полученный методом быстрого Фурье-преобразования: $s_j = \text{fft}(\psi_{1i})$ ($0 \leq i \leq 4096$, $0 \leq j \leq 2048$) на интервале $0 \leq x \leq 2580$ для начальных условий $\psi_1 = \psi_2 = 0.01$; $\psi'_1 = \psi'_2 = 0.001$; a — $\Gamma_1 = 1.5$, $\Gamma_2 = 4.95$; $\nu = 0.792$; b — $\Gamma_1 = 1.5$, $\Gamma_2 = 0.95$; $\nu = 0.792$.

функционалов от $U(y)$ приведены в [3], где выполнено исследование (2) для некоторых приближенных решений дисперсионного уравнения (3).

Ниже исследуются квазипериодические решения (2), появление которых предшествует возникновению динамического хаоса в описываемой системе в рамках модели Рюэля–Тakens–Ньюхауза [4]. Для настоящего исследования важным является существование кратных корней (3). Условием их появления наряду с (3) является $dI_2(l)/dc = 0$. Легко понять, что этим условиям можно удовлетворить, задавая $U(y)$ в виде, например, кусочно-линейной функции.



Продолжение рисунка.

Кратные корни (3) предшествуют появлению комплексно-сопряженных корней $c = c_1 + ic_2$. Напомним, что c представляет собой скорость системы отсчета (скорость длинноволновых возмущений малой амплитуды), в которой справедливо уравнение (2). Физически $c_2 \neq 0$ означает появление в спектре соответствующей линейной задачи полосы непропускания. В нелинейном случае, как показано в [5], это приводит к появлению квазипериодических решений (2). Чтобы показать это, преобразуем (2), переходя с помощью галилеевского преобразования в систему отсчета, в которой $c = c_1$, в результате чего из (2) получим уравнение:

$$\psi_{\tilde{t}} + i\nu \cdot \psi_{\tilde{x}} + \psi \psi_{\tilde{x}} + \tilde{\gamma} \cdot \psi_{\tilde{x}\tilde{x}} = 0;$$

$$\psi = \frac{\beta}{\alpha} \eta, \quad \nu = \frac{c_2}{\varepsilon}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \tilde{t} = \tilde{t}, \quad \tilde{x} = \tilde{x} + i\nu \cdot \tilde{t}; \quad (4)$$

Письма в ЖТФ, 2003, том 29, вып. 7

$$\alpha = \frac{1}{W_1} + \int_0^1 \frac{(WI_2)'}{W^2} d\bar{y}; \quad \gamma = -K \cdot \int_0^1 \int_{\bar{y}}^1 \int_0^y \frac{W^2(\bar{y}')}{W^2(\bar{y})W^2(\bar{y}'')} d\bar{y}d\bar{y}'d\bar{y}'';$$

$$W(\bar{y}) = U(\bar{y}) - c, \quad W_1 = W(l).$$

Выражения для α и γ взяты из [2]. В общем случае $\tilde{\gamma}$ является комплексной величиной: $\tilde{\gamma} = \Gamma_1 + i\Gamma_2$. Преобразуем (4), опуская знак \sim у t и x , полагая $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ и заменяя $x \rightarrow x(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2)^{1/2}$. Выполняя однократное интегрирование по x , получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \psi_{1xx} &= \nu(\Gamma_1\psi_2 - \Gamma_2\psi_1) + \frac{1}{2} \cdot \Gamma_1(\psi_2^2 - \psi_1^2) - \Gamma_2\psi_1\psi_2, \\ \psi_{2xx} &= -\nu(\Gamma_2\psi_2 + \Gamma_1\psi_1) - \frac{1}{2} \cdot \Gamma_2(\psi_2^2 - \psi_1^2) - \Gamma_1\psi_1\psi_2. \end{aligned} \quad (5)$$

На рисунке представлены решения (5) для различных значений ν и $\Gamma_{1,2}$. На фазовом портрете и спектре реализации легко проследить рождение квазипериодического решения и начальную стадию его разрушения, ведущего к стохастизации решений (2) так же, как и в других аналогичных задачах [6].

Список литературы

- [1] *Testimony of Daniel L. Albritton* director Aeronomy Laboratory Oceanic and Atmospheric Research National Oceanic and Atmospheric Administration before the Committee on Science US House of Representatives, March 14, 2001. — <http://www.legislative.noaa.gov/Testimony/03140/albritton.html>
- [2] Эбелинг В., Энгель А., Файстель Р. Физика процессов эволюции. Синергетический подход / Пер. с нем. под ред. Ю.А. Данилова. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 326 с.
- [3] *Freeman N.C., Johnson R.S.* // J. Fluid Mech. 1970. V. 42. Part 2. P. 401–409.
- [4] *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика / Пер. с англ. под ред. Б.В. Чирикова. М.: Мир, 1984. 528 с.
- [5] *Зайко Ю.Н.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 6. С. 42–45.
- [6] *Zayko Yu.N., Nefedov I.S.* // Applied Mathematics Lettes. 2001. V. 14. P. 115–121.