

01;09

Стохастический резонанс в асимметричной бистабильной системе

© О.В. Геращенко

Петербургский институт ядерной физики им. Б.П. Константинова, Гатчина
E-mail: gerashch@pnpi.spb.ru

Поступило в Редакцию 22 октября 2002 г.

В простой бистабильной стохастической системе, передемпфированном крамерсовском осцилляторе с белым шумом и прямоугольным периодическим сигналом с постоянной составляющей, теоретически и при помощи аналогового моделирования исследовано явление стохастического резонанса в зависимости от величины постоянной составляющей в сигнале, приводящей к статической асимметрии потенциала. Обнаружено, что такая асимметрия приводит к уменьшению отношения сигнал-шум по сравнению с симметричным потенциалом.

Как известно, при прохождении через нелинейные системы полезных сигналов шум оптимальной интенсивности может улучшать передачу сигнала (явление стохастического резонанса) [1,2]. В настоящей работе мы изучаем теоретически и экспериментально стохастический резонанс в динамической двумерной системе — передемпфированном крамерсовском осцилляторе — с периодическим прямоугольным сигналом, содержащим шумовую и постоянную составляющие. Выбор именно прямоугольного сигнала позволяет решить задачу при произвольных амплитудах сигнала, не ограничиваясь теорией возмущений.

Рассмотрим уравнение передемпфированного крамерсовского осциллятора:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial U_0(x)}{\partial x} + F + \sigma \xi(t) + AR(t), \\ U_0(x) &= -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^3, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t-t'), \\ \delta U_0 &= U_0(0) - U_0(x_0) = \frac{a^2}{4b}, \quad \pm x_0 = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\xi(t)$ — белый шум, $R(t) = \pm 1$ — прямоугольный сигнал с периодом T , $\pm x_0$ — устойчивые точки невозмущенной системы, a, b, F, σ, A — константы. Обозначая время корреляции (реального)

белого шума через τ и предполагая, что $a \sim b$, примем в нашей задаче следующую иерархию времен:

$$T \gg w_0^{-1} \gg a^{-1} \gg \tau \rightarrow 0; \quad w_0 = \frac{a}{\pi\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{a^2}{2b\sigma^2}\right), \quad (2)$$

где w_0 — характерная частота переключений под действием белого шума. Если интенсивность внешних воздействий меньше высоты барьера δU_0 , то $x(t)$ можно аппроксимировать при помощи дихотомического сигнала: $x(t) = x_0 d(t)$, $d(t) = \pm 1$. Таким образом, мы имеем модель двух состояний. Зависящие от времени вероятности перехода между этими двумя состояниями определяются в крамеровском приближении

$$\alpha_{\mp} = w_{\mp 1 \rightarrow \pm 1} = w_0 \exp[\pm p \pm vR(t)], \quad p = \frac{2x_0 F}{\sigma^2}, \quad v = \frac{2x_0 A}{\sigma^2}, \quad (3)$$

а управляющее уравнение для плотности распределения периодически нестационарного процесса $d(t)$:

$$\frac{dP(\pm 1, t)}{dt} = \alpha_{\mp}(t)P(\mp 1, t) - \alpha_{\pm}(t)P(\pm 1, t). \quad (4)$$

Будем изучать поведение процесса $x(t)$ на больших временах $t \sim T$. Тогда перескоки под действием белого шума можно считать некоррелированными. Учитывая, что для любой функции имеет место формула

$$f[AR(t)] = \frac{1}{2} [f(A) + f(-A) + R(t)(f(A) - f(-A))], \quad (5)$$

получим выражение для корреляционной функции [3]

$$\begin{aligned} K(t) &= C\delta(t) + B_2 \langle R(0)R(t) \rangle, \\ C &= S(0) = \frac{x_0^2}{2w_0} (\cos h^{-3}(p+v) + \cos h^{-3}(p-v)), \\ B_2 &= \frac{x_0^2}{4} (\tan h(p+v) - \tan h(p-v))^2, \\ S(\omega) &= C + \frac{8}{\pi} B_2 \sum_k \frac{\delta(\omega - (2k+1)\Omega)}{(2k+1)^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

При $v \ll 1$ из (6) имеем:

$$C = \frac{x_0^2}{w_0 \cos h^3(p)}, \quad B_2 = \frac{x_0^2 v^2}{\cos h^4(p)}, \quad SNR = \frac{8 B_2}{\pi C} = \frac{8 w_0 v^2}{\pi \cos h(p)}. \quad (7)$$

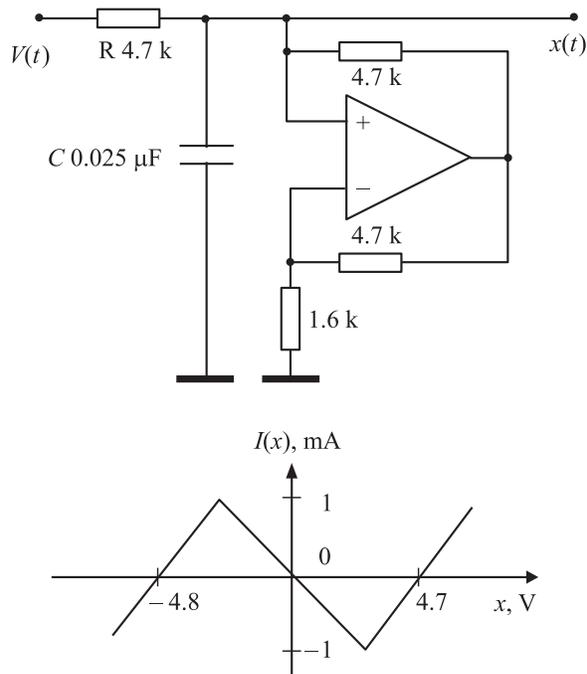


Рис. 1. Принципиальная схема и вольт-амперная характеристика аналоговой модели передемпфированного осциллятора. $V(t)$ — подаваемое напряжение (сумма прямоугольного сигнала, постоянного напряжения смещения и белого шума), $x(t)$ — исследуемый сигнал.

Для проверки полученных выводов мы провели аналоговое моделирование нашей стохастической системы на электронной модели двухуровневой нелинейной системы. Поскольку из результатов видно, что в потенциале $U_0(x)$ важно лишь наличие одной неустойчивой и двух устойчивых точек, то мы исследовали передемпфированный осциллятор с кусочно-линейной вольт-амперной характеристикой $I(x)$ (рис. 1), аналогичный использованному в работах [4,5]. Запишем уравнение для нашей схемы:

$$RC \frac{dx}{dt} = -(x + RI_N(x)) + V(t) = -RI(x) + V(t),$$

$$V(t) = F + AR(t) + \sigma \xi(t). \quad (8)$$

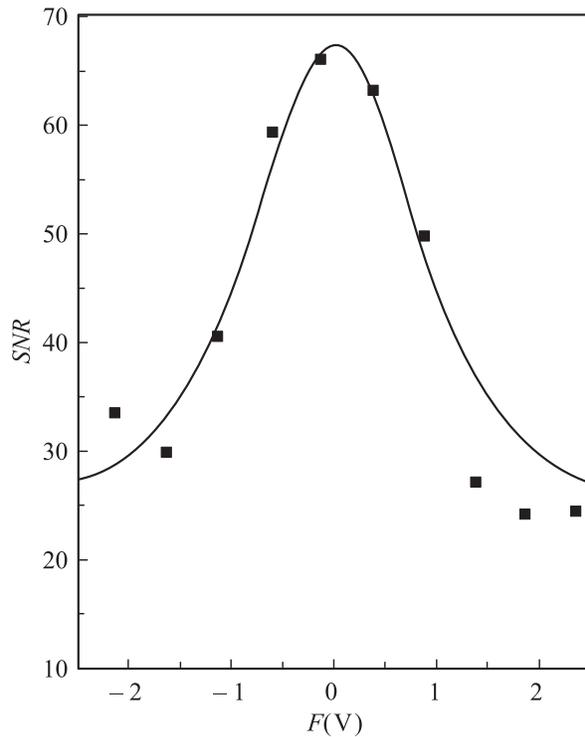


Рис. 2. Отношения сигнал-шум в зависимости от величины напряжения смещения F . Сплошная линия — выражение (9), построенное по экспериментальным значениям параметров.

Здесь $V(t)$ — подаваемое извне напряжение, $I_N(x)$, $I(x)$ — вольт-амперные характеристики нелинейного элемента и всей схемы в целом, $x(t)$ — исследуемое напряжение. Вводя безразмерное время заменой $t \rightarrow t/RC$, получим уравнение, полностью аналогичное уравнению (1). Из вольт-амперной характеристики можно определить величины $x_1 \approx 2.4$ V, $x_0 \approx 2x_1 \approx 4.7$ V, а выраженная в вольтах высота потенциального барьера $\delta U_0 \approx 11$ V². Подаваемое на схему напряжение $V(t)$ является суммой гауссова шума $\xi(t)$ с частотой корреляции $1/2\pi\tau \approx 30$ kHz, которая много больше всех характерных частот в системе (физический белый шум), и переменного прямоугольного

сигнала с амплитудой A и частотой $f_s = \Omega/2\pi = 3$ Hz. Обратное время релаксации нелинейной системы $1/2\pi RC \approx 1400$ Hz. Изменяя интенсивность гауссова шума, мы могли изменять частоту переключений ω_0 между двумя состояниями в системе.

В эксперименте были измерены величины спектральной плотности мощности выходного сигнала $x(t)$ на нулевой частоте $S(0)$, на частоте прямоугольного сигнала $S(f_s = \Omega/2\pi = 3$ Hz) $= B_2/\Delta f$, где $\Delta f = 0.16$ Hz — частота дискретизации при измерении спектра, и отношение сигнал-шум SNR :

$$SNR = \frac{8}{\pi} \frac{B_2}{C} = \frac{8}{\pi} \frac{S(f_s)\Delta f}{S(0)}, \quad (9)$$

в зависимости от величины постоянного смещения F (рис. 2).

Таким образом, мы теоретически и экспериментально исследовали нелинейную двухъямную систему со статической асимметрией потенциала, т. е. при некотором постоянном смещении и воздействии белого шума. При этом было обнаружено, что постоянная составляющая, приводящая к асимметрии потенциальной энергии, приводит к ухудшению отношения сигнал-шум.

Работа выполнена в рамках гранта № 02-02-16979 РФФИ и поддержки ГП „Квантовая макрофизика“ и ГП „Исследование коллективных и квантовых эффектов в конденсированных средах“.

Список литературы

- [1] *Gammaitoni L., Hanggi P., Jung P., Marchesoni F.* // Rev. Mod. Phys. 1998. V. 70. P. 223.
- [2] *Анищенко В.С., Нейман А.В., Мосс Ф., Шимански-Гейер Л.* // УФН. 1999. Т. 169. С. 7. [*Anishchenko V.S., Neiman A.B., Moss F., Shimansky-Geier L.* // Sov. Phys. Usp. 1999. V. 42. P. 7].
- [3] *Ginzburg S.L., Pustovoit M.A.* // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. P. 021107.
- [4] *Геращенко О.В.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. С. 1477. [*Gerashchenko O.V.* // JETP. 1999. V. 89. P. 797].
- [5] *Gerashchenko O.V., Ginzburg S.L., Pustovoit M.A.* // Eur. Phys. J. B. 2001. V. 19. P. 101.