07

Особые точки системы электромагнитное поле–волновод

© И.В. Дзедолик

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь
E-mail: dzedolik@crimea.edu

Поступило в Редакцию 30 сентября 2002 г.

Рассмотрены фазовые траектории нелинейной системы электромагнитное поле — диэлектрический волновод вблизи особых точек. Получены решения для компонент поля вблизи точек сингулярности. Показано, что в этих точках возникают оптические вихри, вектор Пойнтинга которых прецессирует вокруг точки сингулярности.

Динамика светового поля, распространяющегося в диэлектрических волноводах — оптических волокнах с различными профилями показателей преломления в линейном режиме — достаточно полно исследована (см. [1] и библиографию). Нелинейный режим распространения излучения (см. [2] и библиографию) обычно рассматривается с помощью анализа динамики огибающей плоского волнового пакета, зависящей от продольной координаты и времени либо амплитуды, зависящей от координат и времени, без учета векторного характера поля [3–5]. В данной работе исследована динамика электромагнитного поля с учетом его векторного характера в оптических волокнах со ступенчатым профилем показателя преломления.

Рассмотрим распространение монохроматического электромагнитного излучения в оптическом волокне со ступенчатым профилем показателя преломления. Сердцевину волокна представим в виде изотропного диэлектрического цилиндра кругового сечения, а оболочку — в виде изотропной безграничной среды с меньшим, чем в сердцевине, показателем преломления. Учтем кубичный нелинейный отклик среды — легированного кварца, из которого изготовлена сердцевина волокна, а в оболочке поле полагаем линейным. Векторы поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ удовлетворяют системе уравнений Максвелла в диэлектрической среде

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \nabla \mathbf{D} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

с материальным уравнением $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, где $\mathbf{P} = \chi_1\mathbf{E} + \chi_3|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}$ — вектор поляризации среды, $\nabla = \mathbf{1}_x\partial/\partial x + \mathbf{1}_y\partial/\partial y + \mathbf{1}_z\partial/\partial z$ — оператор набла, $\mathbf{1}_{x,y,z}$ — единичные орты. Предполагая гармоническую зависимость поля от времени $\sim \mathbf{exp}(i\omega t)$, из (1) получаем уравнение Гельмгольца для электрического поля $\mathbf{E}$

$$\nabla^2\mathbf{E} + \varepsilon_1 k^2\mathbf{E} + 4\pi\chi_3 k^2|\mathbf{E}|^2\mathbf{E} = 0, \qquad (2)$$

где $\varepsilon_1 = 1 + 4\pi\chi_1$, $k = \omega/c$. Вектор магнитного поля выражаем в виде

$$\mathbf{B} = i\,\frac{c}{\omega}\,\nabla \times \mathbf{E}. \qquad (3)$$

Учитывая трансляционную инвариантность уравнения (2) вдоль оси z — продольной оси волокна, представим поле в форме мод

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}(r)\mathbf{exp}(i\kappa l\varphi - i\beta z) \qquad (\kappa = \pm 1, \quad l = 0, 1, 2, \dots), \qquad (4)$$

тогда, подставляя (4) в (2), получаем систему уравнений в цилиндрических координатах для линейного базиса $\mathbf{e}\,(e_x, e_y, e_z)$

$$\left(\frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{d}{dR}\right)e_j + \left(m^2 - \frac{l^2}{R^2}\right)e_j + \alpha\Big(\sum_{j=x,y,z} e_j^2\Big)e_j = 0, \qquad (5)$$

где $m^2 = r_0^2(k^2\varepsilon_1 - \beta^2)$, $\alpha = 4\pi\chi_3 r_0^2 k^2$, $R = r/r_0 \in [0, 1]$, r_0 —радиус сердцевины, $j = x, y, z$. Постоянные распространения мод β можно найти, если приравнять решения для тангенциальных компонент поля на границе сердцевины и оболочки [1].

Систему (5) представим в форме уравнений движения материальной точки под действием центральной силы [6], производя подстановку $e_j = \psi_j(R)/\sqrt{R}$. Тогда из (5) получаем уравнения движения в форме Ньютона

$$\ddot{\psi}_x = -\frac{\partial U}{\partial \psi_x}, \qquad \ddot{\psi}_y = -\frac{\partial U}{\partial \psi_y}, \qquad \ddot{\psi}_z = -\frac{\partial U}{\partial \psi_z}, \qquad (6)$$

где

$$U = \frac{1}{2}\left[m_l^2 - \frac{l^2 - 1/4}{R^2}\right]\Big(\sum_{j=x,y,z}\psi_j^2\Big) + \frac{\alpha}{4R}\Big(\sum_{j=x,y,z}\psi_j^2\Big)^2$$

— „потенциал“, точка означает дифференцирование по R. Функция Гамильтона системы имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=x,y,z}\dot{\psi}_j^2 + \frac{1}{2}\left[m_l^2 - \frac{l^2 - 1/4}{R^2}\right]\Big(\sum_{j=x,y,z}\psi_j^2\Big) + \frac{\alpha}{4R}\Big(\sum_{j=x,y,z}\psi_j^2\Big)^2. \quad (7)$$

Введем обобщенные координаты системы $q_j \equiv \psi_j$ и обобщенные импульсы $p_j \equiv \dot{\psi}_j$. Найдем особые точки системы, приравнивая нулю правые части уравнений Гамильтона [7]:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \equiv Q_j(q, p) = 0, \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \equiv P_j(q, p) = 0. \quad (8)$$

Тогда из (8)-1 при $Q_j = p_j = 0$ находим особые точки $p_{j0} = 0$, а из (8)-2, так как

$$P_j = \left(m_l^2 - \frac{l^2 - 1/4}{R^2}\right)q_j + \frac{\alpha}{R}\Big(\sum_{j=x,y,z}q_j^2\Big)q_j = 0,$$

находим особые точки, расположенные в нуле $q_{j0} = 0$ и на поверхности сферы

$$\sum_{j=x,y,z} q_{j0}^2 = \big[(l^2 - 1/4)/(R - m_l^2 R)\big]/\alpha.$$

В особых точках, в которых выполняются условия одновременного равенства нулю действительных и мнимых частей поля, возникают оптические вихри [8,9]:

$$\mathrm{Re}\, E_l(x, y, z) = 0, \qquad \mathrm{Im}\, E_l(x, y, z) = 0,$$

$$\mathrm{Re}\, B_l(x, y, z) = 0, \qquad \mathrm{Re}\, B_l(x, y, z) = 0,$$

где l — азимутальный индекс. Эти уравнения описывают две поверхности, линии пересечения которых являются линиями узлов. На линии узлов фаза поля не определена $\mathrm{tg}\,\phi = \mathrm{Im}E_l/\mathrm{Re}E_l = \mathrm{Im}\mathrm{B}_l/\mathrm{Re}B_l = 0/0$. Сингулярность такого типа является точкой ветвления порядка l — дислокацией волнового фронта с топологическим зарядом l. Азимутальный индекс l характеризует величину топологического заряда оптического вихря, равную числу скачков фазы поля на 2π в результате перехода с одного листа поверхности на другой при обходе точки ветвления.

Линеаризуем гамильтонову систему в окрестности особых точек $\overline{q}_j = q_j - q_{j0}$, $\overline{p}_j = p_j - p_{j0}$:

$$\dot{\overline{q}}_j = a_{1j}\overline{q}_j + a_{2j}\overline{p}_j, \qquad \dot{\overline{p}}_j = a_{3j}\overline{q}_j + a_{4j}\overline{p}_j,$$

где $a_{1j} = \partial Q_j/\partial q_j$, $a_{2j} = \partial Q_j/\partial p_j$, $a_{3j} = \partial P_j/\partial q_j$, $a_{4j} = \partial P_j/\partial p_j$ — коэффициенты разложения в окрестности особой точки (q_{j0}, p_{j0}). Получаем линейную систему, топологически эквивалентную нелинейной системе (6):

$$\dot{\overline{q}}_j = \overline{p}_j, \qquad \dot{\overline{p}}_j = -U_0\overline{q}_j, \tag{9}$$

где

$$U_0 = m_l^2 + \alpha\Big(2q_{j0}^2 + \sum_{j=x,y,z} q_{j0}^2\Big)\frac{1}{R} - (l^2 - 1/4)\,\frac{1}{R^2}.$$

Из уравнения $\frac{d\overline{p}_j}{d\overline{q}_j} = -U_0\frac{\overline{q}_j}{\overline{p}_j}$ находим линейные фазовые траектории системы (9) в окрестности j-й особой точки $\overline{p}_j = \sqrt{-U_0}\,\overline{q}_j$, полагая, что потенциал $U_0(R)$ зависит от R как от параметра. Наклон фазовой траектории зависит от величины топологического заряда и радиальной координаты R и при $R \to 1$ уменьшается.

Систему (9) представим в виде линейных уравнений:

$$\ddot{\overline{q}}_j = -U_0\overline{q}_j. \tag{10}$$

Решение уравнения (10) в особой точке $q_{j0} = 0$ ($q_{j'0} \neq 0$, $q_{j''0} \neq 0$) для потенциала $U_{00} = m_l^2 + \alpha(q_{j'0}^2 + q_{j''0}^2)\frac{1}{R} - (l^2 - 1/4)\frac{1}{R^2}$ получаем в виде суперпозиции функций Уиттекера:

$$\overline{q} = C_1 M\Big(-i\tilde{\alpha}, \kappa l, i2\sqrt{m_l^2}\,R\Big) + C_2 W\Big(-i\tilde{\alpha}, \kappa l, i2\sqrt{m_l^2}\,R\Big), \tag{11}$$

где $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{2\sqrt{\tilde{\varepsilon}}}(q_{j'0}^2 + q_{j''0}^2)$, а в особой точке на сфере $q_{j0} \neq 0$, $U_0 = -2U_{00}$ решение:

$$\overline{q} = C_1 M\Big(-\sqrt{2}\,\tilde{\alpha},\ \sqrt{3/4 - 2l^2},\ 2\sqrt{2m_l^2}\,R\Big)$$
$$+ C_2 W\Big(-\sqrt{2}\,\tilde{\alpha},\ \sqrt{3/4 - 2l^2},\ 2\sqrt{2m_l^2}\,R\Big). \tag{12}$$

Постоянные коэффициенты определяются при задании граничных условий $\overline{q}(R=0)$, $\overline{p}(R=0)$, $\overline{q}(R=1)$, $\overline{p}(R=1)$.

В окрестности особой точки компонента электрического поля равна

$$E_j = R^{-1/2}\,\overline{q}_j\,\mathbf{exp}\big[i(\omega t + \kappa l\varphi - \beta z)\big], \tag{13}$$

а компоненту магнитного поля находим из выражения (3) в виде

$$\mathbf{B}_j = \frac{i}{kr_0}\,(\nabla_R \times \mathbf{E})_j. \tag{14}$$

Вектор Пойнтинга, усредненный по времени $\mathbf{S} = \frac{c}{16\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}^* + \mathbf{E}^*\times\mathbf{B})$, имеет компоненты:

$$S_x = \frac{c}{8\pi k}\left\{\frac{\kappa l}{r}\big[(e_y^2 + e_z^2)\sin\varphi + e_x e_y \cos\varphi\big] - \beta e_x e_z\right\},$$

$$S_y = -\frac{c}{8\pi k}\left\{\frac{\kappa l}{r}\big[(e_x^2 + e_z^2)\cos\varphi + e_x e_y \sin\varphi\big] + \beta e_y e_z\right\},$$

$$S_z = \frac{c}{8\pi k}\left[\frac{\kappa l}{r}\,e_z(e_y\cos\varphi - e_x\sin\varphi) + \beta(e_x^2 + e_y^2)\right].$$

Легко видеть, что вектор Пойнтинга для мод с $l \neq 0$ при распространении нелинейного электромагнитного поля по волокну прецессирует вокруг особых точек, причем направление прецессии определяется знаком топологического заряда κl.

Список литературы

[1] *Снайдер А., Лав Дж.* Теория оптических волноводов. М.: Радио и связь, 1987. 656 с.

[2] *Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С.* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М.: Наука, 1988. 312 с.

[3] *Rosas D., Law C.T., Swartzlander G.A.* // J. Opt. Soc. Am. 1997. B/V. 14. N 11. P. 3054–3065.

[4] *Kivshar Y.S., Nepomnyashchy A., Tikhonenko V., Cristou J., Luther-Davies B.* // Optics Letters. 2000. V. 25. N 2. P. 123–125.

[5] *Золотовский И.О., Семенцов Д.И.* // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27. В. 14. С. 1–5.

[6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. Теоретическая физика. Т. 1. М.: Наука, 1988. 216 с.

[7] *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.

[8] *Basistiy I.V., Soskin M.S., Vasnetsov M.V.* // Opt. Com. 1995. V. 119. P. 604–612.

[9] *Воляр А.В., Фадеева Т.А.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. В. 17. С. 69–74.