

07

Оптические вихри в кристаллах: рождение, уничтожение и распад поляризационных омбилик

© А.В. Воляр, Т.А. Фадеева

Таврийский национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь, Украина

Поступило в Редакцию 9 августа 2002 г.

Поле состояний поляризации параксиального гауссова пучка, распространяющегося через два кристалла со скрещенными оптическими осями, испытывает фазовые возмущения со стороны второго кристалла. Эти возмущения проявляются в процессах рождения, аннигиляции, распада и слияния особых участков поля, называемых омбиликами. Анализатор циркулярной поляризации, помещенный после кристаллов, способен выделить в таком поле единичные и связанные оптические вихри, обеспечивая тем самым контроль их линейных перемещений.

В неоднородно поляризованном лазерном пучке, либо прошедшем гладко неоднородную среду, либо рассеянном на случайных неоднородностях показателя преломления, всегда имеется конечное число особых точек, образующих характерные узоры, не зависящие от природы неоднородностей [1]. В предыдущей работе [2] мы уже показали, что такие особые точки векторного поля, называемые дисклинациями, играют решающую роль в формировании оптических вихрей в пучке после системы: одноосный кристалл — $\lambda/4$ пластина–анализатор. Однако слабые возмущения, как правило присутствующие в реальных оптических устройствах, могут нарушить топологический баланс векторного поля, участвующего в процессе генерации вихря, и вызвать его структурные изменения. Фактически ставится вопрос структурной устойчивости областей векторного светового поля в окрестности особых точек.

Рассмотрим параксиальный световой пучок, который проходит последовательно через два кристалла с оптическими осями, перпендикулярно ориентированными относительно друг друга, причем оптическая ось первого кристалла и направление распространения пучка совпадают. Второй кристалл вводит возмущение в состояние поляризации в виде

разности фаз Δ между локальными ортогональными компонентами электрического вектора. После первого кристалла формируется пучок с неоднородной поляризацией в поперечном сечении. Под особыми точками или линиями такого поля будем понимать области, окружающие точки (линии) с правой или левой циркулярной поляризацией. Различают три типа таких областей, называемых, согласно Дж. Наю и М. Берри, омбиликами [1], а именно „звезда“ — „star“, „лимон“ — „lemon“ и промежуточное состояние, названное „monstar“ от (le)mon-star, которое мы будем в дальнейшем называть „монстр“. Такие сингулярности, являясь структурно устойчивыми конфигурациями волнового поля, определенным образом эволюционируют под действием внешних возмущений.

Целью данной работы явилось изучение событий рождения, уничтожения и распада поляризационных омбилик за счет плавного возмущения, вызванного изменением разности фаз Δ во втором кристалле.

Запишем вектор Джонса \mathbf{q}_0 циркулярно поляризованного пучка в виде

$$\begin{aligned} q_x &= \cos \delta/2 [\cos \Delta/2 + i \sin \Delta/2 \exp(i\sigma 2Q)] \\ &\quad + i \sin \delta/2 \exp(i\sigma 2\varphi) [\cos \Delta/2 + i \sin \Delta/2 \exp(-i\sigma 2Q)], \quad (1) \\ q_y &= i\sigma \{ \cos \delta/2 [\cos \Delta/2 - i \sin \Delta/2 \exp(i\sigma 2Q)] \\ &\quad - i \sin \delta/2 \exp(i\sigma 2\varphi) [\cos \Delta/2 - i \sin \Delta/2 \exp(-i\sigma 2Q)] \}, \end{aligned}$$

где δ — разность фаз, вводимая первым кристаллом: $\delta = ar^2/\sqrt{r^2 + L^2}$, $r^2 = x^2 + y^2$, L — толщина и Δn_1 — разность показателей преломления в первом кристалле, $a = k\Delta n_1$, k — волновое число, φ — азимутальная координата, $\sigma = \pm 1$ — спиральность пучка (направление циркуляции электрического вектора исходной волны), $\Delta \approx bH$, $b = k\Delta n_2$, H — толщина и Δn_2 — разность показателей преломления во втором кристалле, Q — угол ориентации оси двулучепреломления второго кристалла. В выражениях (1) опущен множитель $\Psi_{lm}(r, \varphi, z)$, общий для обеих компонент вектора \mathbf{q}_0 , характеризующий поле исходного пучка: $\Psi_{lm} = (r/\Delta)^l L_m^{(l)}(2r^2/w^2) \exp[i(kl\varphi + \Gamma)]G$, $G = 1/\Lambda \exp(-r^2/\rho^2\Lambda)$, $\Lambda = 1 - iz/z_0$, $w^2 = \rho^2(1 + z/z_0)$, $z_0 = k\rho^2/2$, $L_m^{(l)}(X)$ — обобщенный полином Лагерра, $\Gamma = 2m \cdot \arctg(z/z_0)$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, l — топологический заряд сингулярного пучка, а $\kappa = \pm 1$ — его знак, ρ — радиус перетяжки пучка при $z = 0$.

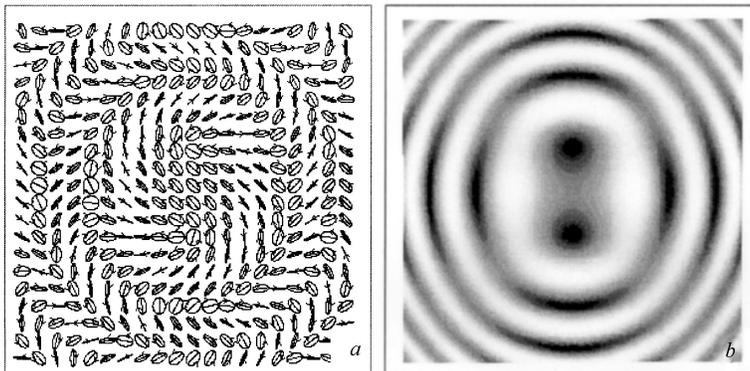


Рис. 1. Схематическое представление распределения поляризации света в поперечном сечении параксиального гауссова пучка ($l = 0$), прошедшего два кристалла со скрещенными оптическими осями при возмущении $\Delta = \pi/6$ (a), и распределение интенсивности этого поля после анализатора циркулярной поляризации с осью пропускания, ориентированной под углом $\alpha = 0$ (b).

Для анализа структуры поля поляризации пучка с $l = 0$ после кристаллов воспользуемся формализмом параметров Стокса [3]. Не снижая общности, рассмотрим случай, когда $Q = 0$. (Отметим, что вследствие осевой симметрии поля после первого кристалла выбор $Q \neq 0$ приведет к синхронному повороту всех точек поля после второго кристалла на соответствующий угол). Зависимостью Δ от угла расходимости пучка в параксиальном приближении можно пренебречь. С помощью выражения (1) параметры Стокса запишем в форме:

$$S_0 = 1, \quad S_1 = -\sigma \sin \delta \sin 2\varphi, \quad S_2 = \sigma \{\sin \Delta \cos \delta + \cos \Delta \sin \delta \cos 2\varphi\},$$

$$S_3 = \sigma \{-\cos \Delta \cos \delta + \sin \Delta \sin \delta \cos 2\varphi\}. \quad (2)$$

На рис. 1 приведено схематическое представление поля распределения поляризации в промежуточном случае $\Delta = \pi/6$. Омбилики в таком поле формируются линиями, касательными к одной из полуосей эллипса поляризации, — линиями тока. Для нашей задачи достаточно ограничиться только рассмотрением поведения азимутального угла ψ большой полуоси эллипса, которую определим как $\operatorname{tg} 2\psi = S_2/S_1$. Зададим линии

тока большой полуоси простым соотношением: $dy/dx = \operatorname{tg} \varphi$, откуда получаем дифференциальное уравнение:

$$(dy/dx)^2 + 2(S_1/S_2)(dy/dx) - 1 = 0. \quad (3)$$

Поскольку омбилики формируются в окрестности поляризационных сингулярностей электромагнитного поля: $S_1(r, \varphi, \Delta) = S_2(r, \varphi, \Delta) = 0$, будем искать решения уравнения (3) вблизи таких особых точек (линий).

Сначала предположим, что возмущение отсутствует: $\Delta = 0$. Тогда дифференциальное уравнение (3) преобразуется к виду: $dy/dt = -\sigma x + y$, $dx/dt = x + \sigma y$, где учтено, что изменение ориентации φ на $\pi/2$ при смене знака спиральности σ и $\sin \delta \approx \delta \approx ar^2$. Решение уравнения имеет вид спиральных интегральных кривых с особой точкой типа „фокус“: $r = r_0 \exp(-\sigma\varphi)$, изображенных на рис. 2, I, a. Следуя Дж. Наю, индекс сингулярности s будем определять посредством обхода особой точки по замкнутому контуру, отслеживая число и направление оборотов эллипса поляризации. В данном случае получаем: $s_h = +1$. Если изменить знак спиральности σ , то направление вращения ветвей спирали сменится на противоположное, однако индекс s останется прежним.

Предположим, что второй кристалл вводит слабое возмущение: $\Delta \ll 1$. Найдем вид линий тока вблизи слегка смещенных координат сингулярностей: $\varphi = 0$ и π , считая, что $ar^2 \approx \Delta$. Разлагая параметры Стокса $S_1(r, \varphi)$ и $S_2(r, \varphi)$ в ряд Тейлора вблизи сингулярностей и ограничиваясь первыми членами ряда, приходим к уравнениям $dr/rd\varphi = -\operatorname{ctg}(\varphi/2)$ для луча $\varphi_0 = 0$ и $dr/rd\varphi = \operatorname{tg}(\varphi/2)$ для луча $\varphi_0 = \pi$. Их решения $r = r_0/\sin^2(\varphi/2)$ и $r = r_0/\cos^2(\varphi/2)$ соответственно задают линии тока, формирующие омбилики типа „лимон“ с одинаковыми топологическими индексами $s_l = +1/2$. Вид омбилик приведен на рис. 2, I, b. Изменение знака спиральности с $\sigma = +1$ на $\sigma = -1$ синхронно изменяет ориентацию выделенных направлений в симметрично расположенных омбиликах (рис. 2, II). Это значит, что слабое возмущение, вводимое вторым кристаллом, вызывает распад спиральной вырожденной омбилики на две особенности типа „лимон“, расположенные симметрично относительно оси, при этом полный топологический индекс сингулярностей не изменяется: $s_h = s_l + s_l$.

Особый интерес для нас представляют структурные преобразования ближайшей к оси вырожденной кольцевой омбилики, циркулярная поляризация которой имеет противоположное направление относительно

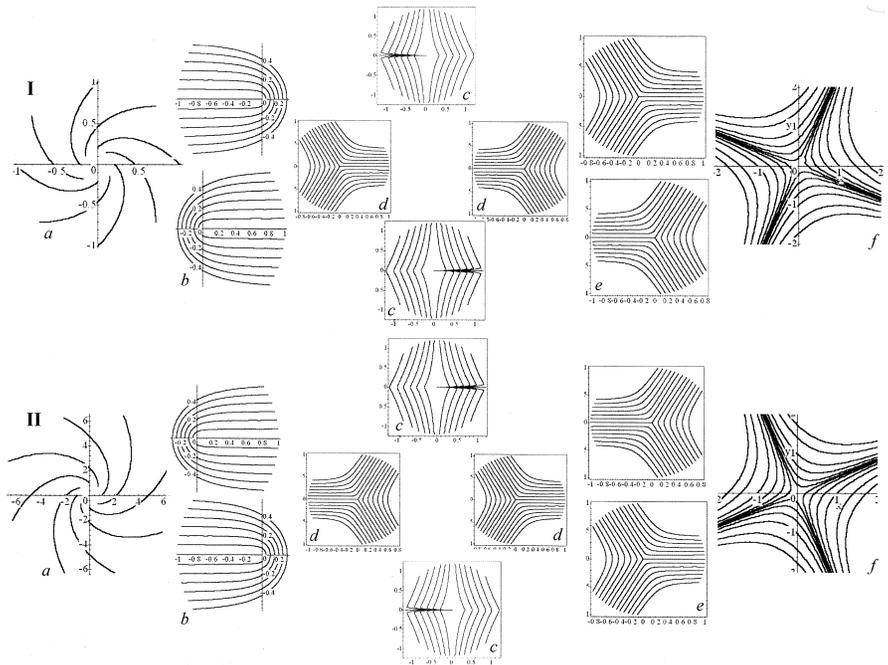


Рис. 2. Диаграмма процесса рождения, аннигиляции, деления и слияния поляризационных омбиликов за счет возмущения, вводимого вторым кристаллом для двух возможных значений спиральности (I) $\sigma = +1$ и (II) $\sigma = -1$: вырожденная спиральная омбилика при $\Delta = 0$ (a), омбилики типа „лимон“ вблизи оси пучка при слабом возмущении $\Delta \ll 1$, (b); векторный топологический квадруполь (c-d), содержащий омбилики типа „монстр“ (c) и „звезда“ (d); омбилики типа „звезда“ (e) в момент слияния в вырожденную гиперболическую омбилику (f) при $\Delta = \pi$.

осевой сингулярности. Анализ выражения (1) показывает, что основные структурные преобразования происходят вдоль лучей: $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$, $\varphi = \pi$ и $\varphi = 3\pi/2$, так что их радиальная координата $ar^2 = \pi + \Delta$. В этом случае уравнение (3) можно записать для $\varphi = \pi/2$ в виде $ydy/dx - Ax - \kappa\sqrt{Ax^2 + y^2} = 0$, где $A = \Delta/(\pi + \Delta)$ и $\kappa = \pm 1$, которое с помощью подстановки $y = xu(x)$ сводится к уравнению с разделяющимися переменными, причем для $\kappa = +1$ полагается, что $dy/dx > 0$, а для $\kappa = -1 - dy/dx < 0$. Решения этого уравнения:

$$Cx^4 = \left| (2Z - \kappa - \sqrt{1 + 4B}) / (2Z - \kappa + \sqrt{1 + 4B}) \right|^{-\frac{\kappa}{\sqrt{1+4B}}} (Z^2 - \kappa Z - B)$$

$$\left(Z = \sqrt{A^2 + (y/x)^2}, \quad B = A + A^2, \quad C = \text{const} \right)$$

описывают омбилику типа „монстр“ с выделенным направлением вдоль луча $\varphi = \pi/2$. Родственную ей симметричную омбилику, лежащую на луче $\varphi = 3\pi/2$, можно найти аналогичным образом. Одновременно на лучах $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ рождаются две омбилики типа „звезда“, формируя векторный топологический квадруполь, приведенный на рис. 2, I c, d. Заметим, что последние две омбилики описываются уравнениями $r = r_0/\sin^{2/3}(3\varphi/2)$ и $r = r_0/\cos^{2/3}(3\varphi/2)$.

Два новых типа омбилик имеют противоположные топологические индексы: для „звезды“ $s_s = -1/2$, а для „монстра“ — $s_m = +1/2$. В целом полный топологический индекс как векторного топологического квадруполя, так и вырожденной кольцевой омбилики равен нулю: $s_s + s_m = 0$.

Как показано на рис. 2, I, e, по мере возрастания возмущения Δ две омбилики типа „звезда“ сближаются вдоль лучей $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, в то время как два „лимона“ вытесняются вдоль лучей $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$ на периферию, постепенно деформируясь и превращаясь в „монстров“. Когда возмущение достигает величины $\Delta \propto \pi$, две симметричные омбилики типа „звезда“ (рис. 2, I, e) сливаются в одну вырожденную омбилику с центром на оси. Из уравнения (3) находим, что линии тока в этом случае подчиняются выражению $\{x - (\sqrt{2} - \sigma)y\}\{x + (\sqrt{2} + \sigma)y\} = C$, имеющему особую точку типа „седло“, и представляют собой семейство гипербол с перпендикулярными асимптотами, повернутыми на угол $\alpha = \pi/8$ относительно оси ординат (рис. 2, I, e). Эта вырожденная омбилика имеет топологический индекс $s_H = -1$.

В то же время две периферийные омбилики теперь уже типа „монстр“ и две — типа „звезда“, рожденные второй от центра кольцевой дисклинацией, аннигилируют с образованием вырожденной кольцевой омбилики с индексом $s_R = 2s_s + 2s_m$.

Таким образом, фазовое возмущение, вызванное вторым кристаллом, вызывает цепочки событий деления, слияния, превращения и аннигиляции поляризационных омбилик. Поскольку омбилику с право (лево) циркулярной поляризацией на оси можно рассматривать как дислокацию волнового фронта лево (право) циркулярно поляризованного пучка, то с помощью анализатора циркулярной поляризации всегда можно выделить оптический вихрь, как это показано на рис. 1, *b*. С этой точки зрения фазовое возмущение, вносимое вторым кристаллом, позволяет контролировать линейные перемещения как единичных вихрей, так и вихрей, связанных в скалярные топологические квадруполь, которые возникают в результате поляризационной фильтрации поля векторных квадруполь.

Список литературы

- [1] *Nye J.F.* Natural Focusing and Fine Structure of Light-Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 1999. 327 p.
- [2] *Воляр А.В., Фадеева Т.А., Егоров Ю.А.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 22. С. 70–77.
- [3] *Азаам Р., Башара Н.* Эллипсометрия и поляризованный свет. М.: Мир, 1981. 584 с.