

01;03

Анализ аналитического решения нестационарного кинетического уравнения для точечного источника тепла

© С.А. Савков

Орловский государственный университет

*Поступило в Редакцию 22 апреля 2002 г.**В окончательной редакции 15 июля 2002 г.*

Представлен анализ аналитического решения нестационарного кинетического уравнения для точечного источника тепла. Рассмотрена зависимость температуры и концентрации молекул газа от расстояния до источника. Проведено сравнение с результатами экспериментов по распространению звуковых колебаний.

Изучение нестационарного тепло- и массопереноса имеет как теоретическое, так и прикладное значение. Рассмотрение такого рода явлений необходимо, в частности, для анализа тепловых эффектов взаимодействия лазерного излучения с веществом [1], что особенно важно при исследовании само- и дефокусировки лазерного луча в поглощающей среде [2–4]. Самостоятельный интерес представляет поведение газа вблизи нагреваемой твердой поверхности [5], в том числе вопрос о возникновении и распространении термоакустических волн [6].

При теоретическом описании указанного явления авторы ограничиваются исключительно рамками динамики сплошной среды. Однако в случае, когда тепловыделение сосредоточено в области, размеры которой много меньше средней длины свободного пробега молекул, состояние газа определяется кинетическим уравнением. При этом саму область тепловыделения можно рассматривать как точечный источник тепла. Очевидно, что и в общем случае область, в которой происходит процесс выделения тепла, также можно рассматривать как суперпозицию точечных источников.

Аналогичная ситуация имеет место в случае, когда характерное время процесса выделения тепла сравнимо с временем свободного пробега молекул. Причем в случае произвольной зависимости мощности

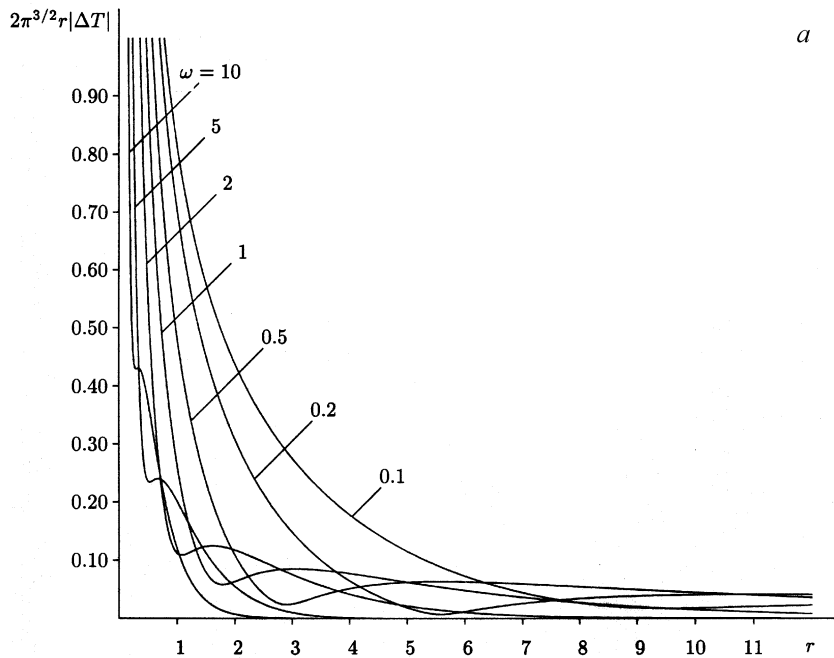


Рис. 1. Распределение относительного перепада температуры и плотности газа при фиксированных значениях ω .

источника от времени ее можно представить в виде интеграла Фурье

$$W(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\omega} \exp(i\omega t) d\omega, \quad W_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(t) \exp(-i\omega t) dt,$$

что определяет актуальность рассмотрения случая точечного источника тепла, мощность которого изменяется по гармоническому закону

$$W = \exp(i\omega t).$$

Аналитическое решение поставленной задачи БГК (Бхатнагара, Гросса, Крука) модели нестационарного кинетического уравнения представлено в [7]. Данная публикация посвящена анализу его физического содержания.

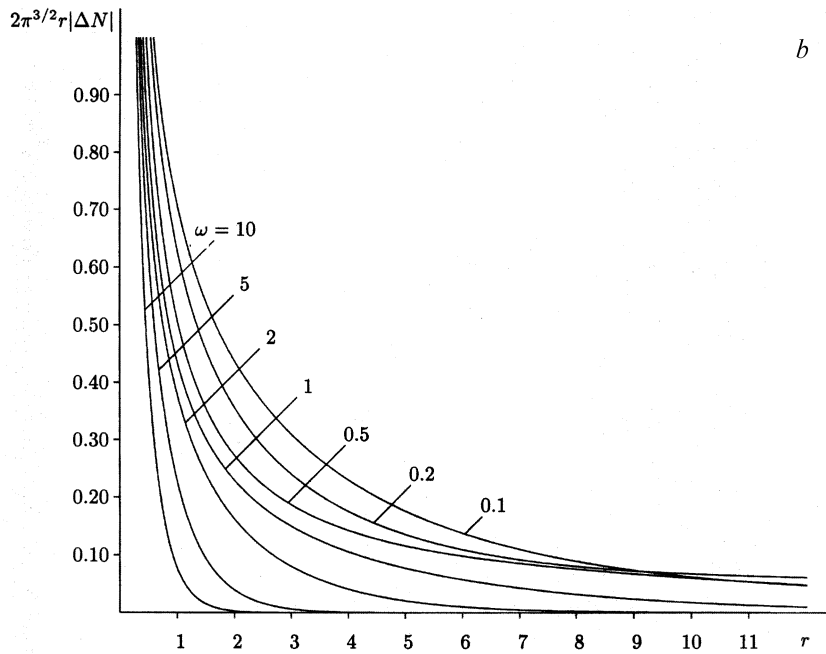


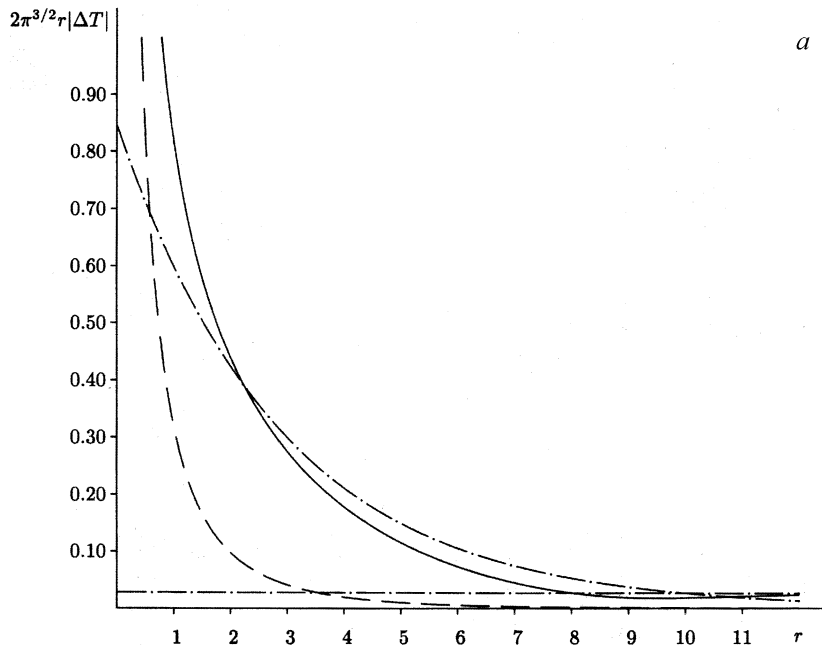
Рис. 1 (продолжение).

Как показано в [7], распределение любого из термодинамических параметров газа представляет собой сумму решений дискретного и непрерывного спектров, каждое из которых можно рассматривать как сферическую волну. Причем в интервале значений $\omega < 0.646$ существует два, а при $0.646 < \omega < 2.145$ — одно решение дискретного спектра. Для $\omega > 2.145$ дискретных решений нет.

На рис. 1 представлены графики зависимости модуля относительно перепада температуры и концентрации молекул газа от расстояния до источника. В качестве единиц измерения t и r приняты

$$\tau = \frac{3\mu}{2nkT} \quad \text{и} \quad l = \tau \sqrt{\frac{2kT}{m}},$$

соответствующие среднему времени и длине свободного пробега молекул газа, μ — коэффициент динамической вязкости газа.



a

Рис. 2. Вклад решений непрерывного (штриховая линия) и дискретного (штрихпунктирная линия) спектров в результирующее распределение (сплошная линия) температуры и концентрации молекул газа для $\omega = 0.1$.

На рис. 2 показан конкретный вклад решений непрерывного (пунктирная линия) и дискретного (штрихпунктирная линия) спектров.

Следует отметить, что для малых значений r распределение температуры и концентрации молекул газа определяется соотношениями

$$\Delta T = \frac{T(r) - T_0}{T_0} = \frac{5}{18\pi^{3/2}r^2}, \quad \Delta N = \frac{n(r) - n_0}{n_0} = -\frac{1}{6\pi^{3/2}r^2},$$

т.е. задается только мгновенной мощностью источника и не зависит от ω . Такой, в корне отличающийся от газодинамического решения, характер зависимости указанных величин от расстояния ($1/r^2$) определяется именно решениями непрерывного спектра.

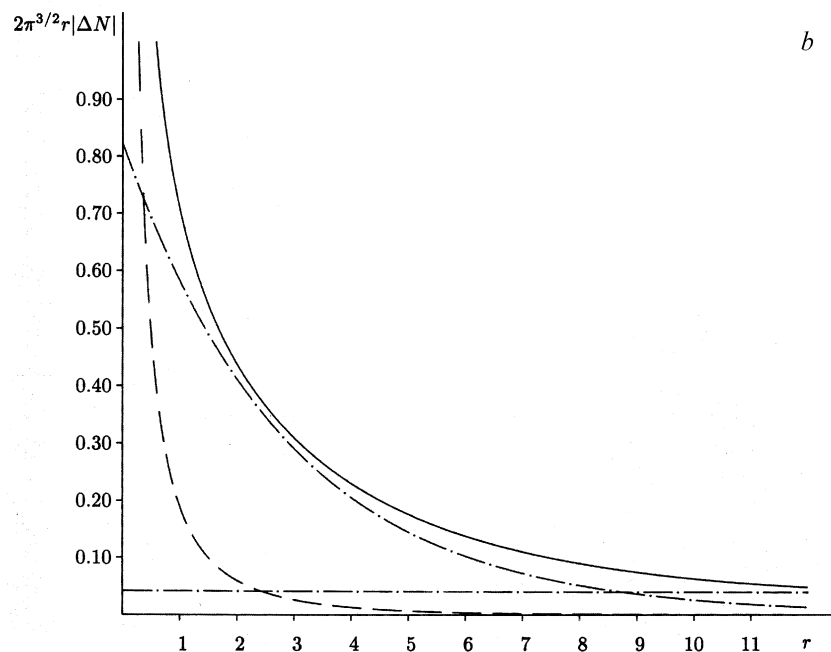


Рис. 2 (продолжение).

С удалением от источника решения непрерывного спектра затухают быстрее, чем решения дискретного спектра. При этом из решений дискретного спектра медленнее всего затухает то, которое в непосредственной близости от источника вносит меньший вклад. Именно оно и определяет (если существует вообще) характер распределения макроскопических параметров газа при $r \rightarrow \infty$. Причем в зависимости от конкретного значения ω решения дискретного спектра дают противоположный или одинаковый по фазе вклад, что определяет наличие или отсутствие перегиба на графиках.

В пределе $\omega \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$ распределение температуры и концентрации определяются известными выражениями:

$$\Delta T = -\Delta N = \frac{1}{5\pi r}.$$

Таблица 1. Параметры звуковой волны

ω	A_1	k_1	d_1	δ_1
0.001	0.00126	0.00110	0.00000	0.49955π
0.01	0.01256	0.01095	0.00007	0.49555π
0.1	0.12386	0.10865	0.00637	0.45694π
0.2	0.23983	0.21291	0.02357	0.42058π
0.3	0.34759	0.31117	0.04809	0.39166π
0.4	0.45005	0.40373	0.07724	0.36835π
0.5	0.54975	0.49141	0.10941	0.34897π
0.6	0.64837	0.57501	0.14361	0.33240π
0.646	0.69368	0.61227	0.15986	0.32551π
0.647	0.69467	0.61308	0.16022	0.32537π
0.7	0.74697	0.65517	0.17928	0.31792π
0.8	0.84618	0.73242	0.21602	0.30505π
0.9	0.94645	0.80718	0.25360	0.29347π
1.0	1.04803	0.87977	0.29182	0.28294π
1.1	1.15111	0.95045	0.33057	0.27328π
1.2	1.25582	1.01944	0.36974	0.26438π
1.3	1.36224	1.08692	0.40927	0.25611π
1.4	1.47043	1.15303	0.44910	0.24840π
1.5	1.58043	1.21791	0.48918	0.24118π
1.6	1.69226	1.28165	0.52947	0.23440π
1.7	1.80593	1.34436	0.56996	0.22800π
1.8	1.92147	1.40612	0.61060	0.22194π
1.9	2.03886	1.46699	0.65138	0.21620π
2.0	2.15812	1.52703	0.69228	0.21075π
2.1	2.27924	1.58631	0.73329	0.20555π
2.145	2.33435	1.61274	0.75178	0.20329π

Самостоятельный интерес представляет рассмотрение относительного перепада давления газа:

$$\Delta P = \frac{P - P_0}{P_0} = \Delta T + \Delta N.$$

В отличие от температуры и концентрации, в пределе $\omega \rightarrow 0$ значение ΔP определяется только решениями непрерывного спектра, поскольку суммарный вклад решений дискретного спектра оказывается

Таблица 2. Параметры температурной волны

ω	A_2	k_2	d_2	δ_2
0.001	0.00126	0.03159	0.03165	-0.50045π
0.01	0.01258	0.09914	0.10093	-0.50439π
0.1	0.13291	0.29910	0.34715	-0.52315π
0.2	0.27382	0.41505	0.52699	-0.52665π
0.3	0.41484	0.50408	0.68102	-0.53079π
0.4	0.55637	0.57945	0.82129	-0.53651π
0.5	0.69967	0.64612	0.95265	-0.54300π
0.6	0.84561	0.70661	1.07764	-0.54970π
0.646	0.91379	0.73281	1.13343	-0.55277π

равным нулю. С ростом частоты вклад решений дискретного спектра увеличивается, в результате распределение давления определяется выражением

$$\Delta P = \sum_{i=1}^x \frac{A_i}{2\pi r} \exp(i(\omega t - k_i r - d_i r + \delta_i)),$$

которое можно рассматривать как суперпозицию сферических волн. Значения указанных величин в случае источника тепла приведены в табл. 1 и 2.

Фазовая скорость отмеченных волновых процессов определяется соотношением $a_i = \omega/k_i$ и в пределе $\omega \rightarrow 0$ дает $a_1 = \sqrt{5/6}$, $a_2 = \sqrt{\omega}$. Переходя к размерным величинам, находим $a_1 = a_0 = \sqrt{5kT/3m}$, что совпадает с вычисленной в рамках динамики сплошных сред скоростью звука, тогда как значение $a_2 = \sqrt{3\mu\omega/mn}$ соответствует скорости распространения температурной волны.

На рис. 3 приведены графики зависимости фазовой скорости звуковой (1) и температурной (2) волн от частоты: 1' — данные эксперимента [8] для гелия, 2' — аргона и 3' — ксенона.

Как видно из представленных графиков и таблиц, с ростом частоты амплитуда и фазовая скорость каждой из волн увеличивается, при этом увеличивается и скорость ее затухания. Причем по мере приближения значения ω к границе области существования дискретных решений скорость затухания звуковой волны приближается к скорости затухания

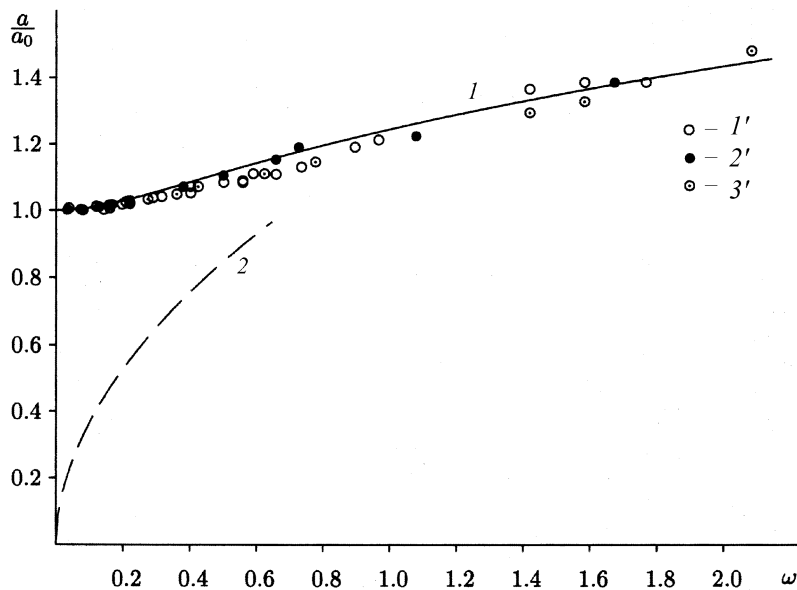


Рис. 3. Графики зависимости фазовой скорости звуковой (сплошная линия) и температурной (штриховая линия) волн от частоты: 1' — результаты эксперимента [8] для гелия, 2' — аргона и 3' — ксенона.

решений непрерывного спектра. Таким образом, диапазон частот, при котором возможно выделение звуковых колебаний в чистом виде ограничен значением $\omega \sim 2$.

Автор выражает искреннюю признательность профессору А.И. Осипову и доктору физ.-мат. наук А.В. Уварову за обсуждение результатов и ценные рекомендации.

Список литературы

- [1] Осипов А.И., Панченко В.Я. Тепловые эффекты при взаимодействии лазерного излучения с молекулярными газами. М.: Изд-во МГУ, 1983. 117 с.
- [2] Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В. // УФН. 1967. Т. 93. № 1. С. 19–70.
- [3] Wood A.D., Camac M., Gerry E.T. // Appl. Opt. 1971. V. 10. N 8. P. 1877–1882.

- [4] *Breig E.L.* // JOSA. 1972. V. 62. N 4. P. 518–525.
- [5] *Wadsworth D.C., Erwin D.A., Muntz E.P.* // J. Fluids Mech. 1993. V. 248. P. 219–235.
- [6] *Huang Yu., Ban Haim H.* // J. heat and mass transfer. 1995. V. 38. N 8. P. 1329–1345.
- [7] *Савков С.А., Юшканов А.А.* // ТМФ. 1997. Т. 113. № 1. С. 139–148.
- [8] *Greenspan M.* // J. Acoust. Soc. Am. 1956. V. 28. N 8. P. 644–648.