

01

## Модификация параболического приближения теории дифракции ультразвукового пучка в сильноанизотропном кристалле

© С.Н. Антонов,<sup>1</sup> А.В. Вайнер,<sup>1</sup> В.В. Проклов,<sup>1</sup> Ю.Г. Реззов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Фрязинский филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, 141190 Фрязино, Московская область, Россия

<sup>2</sup>Новомосковский институт (филиал) ФГБОУ ВПО «Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева», 301665 Новомосковск, Россия  
e-mail: v-nr@ya.ru

(Поступило в Редакцию 30 июля 2012 г. В окончательной редакции 14 мая 2013 г.)

Предложена модификация параболического приближения теории дифракции, основанная на аппроксимации волновой поверхности с учетом формы углового спектра ультразвукового пучка. Показано, что данный подход точнее описывает звуковое поле в случае большой дифракционной расходимости пучка и/или высокой акустической анизотропии. Приведены результаты моделирования звукового поля в парателлурите — лидирующем акустооптическом материале, обладающем аномально высокой акустической анизотропией.

### Введение

Ряд технических применений требует учета дифракционной структуры ультразвукового пучка, распространяющегося в анизотропной среде. Для этого традиционно используется параболическое приближение теории дифракции [1–5]. Однако для некоторых режимов современных акустооптических (АО) устройств данного приближения недостаточно, что обусловлено следующими причинами.

1. Аномально высокая акустическая анизотропия. Одним из основных АО-материалов является парателлурит (TeO<sub>2</sub>) — сильноанизотропный кристалл класса 422 [6]. В большинстве АО-приборов на основе парателлурита используется медленная квазипоперечная акустическая мода вблизи направления [110]. Типичными являются в этом случае скорости менее 700 м/с, угол сноса пучка достигает 75°, а угол расходимости потока энергии в пучке может превышать ширину диаграммы направленности в 50 раз [7–10].

2. Значительная дифракционная расходимость пучка. Стремление к компактности и экономии используемой акустической мощности, а также ограничение длины АО-взаимодействия в ряде случаев вынуждают для возбуждения ультразвука использовать пьезопреобразователи, размер которых всего в 50–100 раз превышает длину волны ультразвука. При такой дифракционной расходимости (в сочетании с высокой анизотропией) необходимо уточнить дифракционную структуру ультразвукового пучка.

О необходимости анализа структуры акустического поля за пределами параболического приближения свидетельствуют и опытные факты. Экспериментальные исследования АО методами [11–12] обнаружили отклонения реального акустического поля от расчетной параболической модели. Причиной этих отклонений мог-

ли быть как погрешность ориентации, переотражения от граней кристалла, неоднородность самого кристалла или преобразователя, так и неточность параболического приближения.

Параболическое приближение хорошо развито, широко используется, дает в практически важных случаях аналитическое решение. Поэтому целесообразно построить уточненную модель акустического поля следующим образом: скорректировать параметры параболического приближения так, чтобы приближенно, но возможно точнее учесть высшие дифракционные поправки.

Настоящая работа продолжает цикл исследований [11–13], значимых для АО-взаимодействия особенностей акустического поля, и имеет следующие цели: модифицировать параболическое приближение для улучшения точности при расчете звукового поля, применить полученные результаты к исследованию ультразвуковой картины в парателлурите в используемых на практике условиях АО-взаимодействия.

### 1. Модификация параболического приближения

Рассмотрим монохроматический ультразвуковой пучок, центральный волновой вектор которого  $\mathbf{k}_0$  направлен вдоль оси  $x$ :

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \mathbf{a}_0 A(x, y, z) \exp j(k_0 x - \omega_0 t),$$

где  $A(x, y, z)$  — медленно меняющаяся в пространстве амплитуда,  $\mathbf{a}_0$  — постоянный в пределах пучка вектор поляризации,  $k_0$  — модуль волнового вектора,  $j$  — мнимая единица.

Пусть в плоскости  $x = 0$  известно распределение амплитуды  $A(0, y, z)$  пучка. Преобразование Фурье позволяет представить его суперпозицией пространственных

гармоник в виде

$$A(0, y, z) = \int U(k_y, k_z) \exp j(k_y y + k_z z) dk_y dk_z,$$

где

$$U(k_y, k_z) = (2\pi)^{-2} \int A(0, y, z) \exp(-jk_y y - jk_z z) dy dz$$

— пространственный спектр. Каждой парциальной компоненте спектра соответствует плоская волна с пространственной структурой вида  $U(k_y, k_z) \exp j(k_y y + k_z z + k_x x)$ , где  $k_x$  — зависящая от значений  $k_y$  и  $k_z$  проекция волнового вектора  $\mathbf{k}$  на ось  $x$ .

Распределение амплитуды в произвольной плоскости  $x = \text{const}$  найдем аналогичным образом, суммируя вклады пространственных гармоник (при этом необходимо вынести множитель  $\exp jk_0 x$ ):

$$A(x, y, z) = \int U(k_y, k_z) \exp j((k_x - k_0)x + k_y y + k_z z) dk_y dk_z. \quad (1)$$

Это точное выражение (с учетом некоторых ограничений) в рамках скалярной теории дифракции. Зависимость  $k_x(k_y, k_z)$  должна удовлетворять дисперсионному соотношению  $\omega(\mathbf{k})$ . В параболическом приближении эту зависимость разлагают в ряд до квадратичных членов вблизи центральных значений  $\mathbf{k}_0$  и  $\omega_0 = \omega(\mathbf{k}_0)$ :

$$\omega' = \mathbf{S} \cdot \mathbf{k}' + \frac{1}{2} \mathbf{k}'^T \mathbf{W} \mathbf{k}', \quad \omega' = \omega - \omega_0, \quad \mathbf{k}' = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{k}'^T$  — транспонированный вектор, групповая скорость  $\mathbf{S} = \nabla_{\mathbf{k}} \omega$  и тензор дифракции-дисперсии  $\mathbf{W} = \nabla_{\mathbf{k}} \nabla_{\mathbf{k}}^T \omega$  вычисляются при  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ . Пренебрегая дисперсией скорости звука, удобно исходить из зависимости фазовой скорости  $v(\mathbf{m})$  либо медленности  $v^{-1}(\mathbf{m})$  от направления  $\mathbf{m} = \mathbf{k}/k$ . Считая  $v(\mathbf{m})$  однородной функцией первой степени относительно компонент вектора  $\mathbf{m}$  [14], имеем

$$\mathbf{S} = \nabla_{\mathbf{m}} v, \quad \mathbf{W} = \frac{v}{\omega} \nabla_{\mathbf{m}} \nabla_{\mathbf{m}}^T v = \frac{v^2}{\omega} \mathbf{w}. \quad (3)$$

Безразмерный тензор  $\mathbf{w} = v^{-1} \nabla_{\mathbf{m}} \nabla_{\mathbf{m}}^T v = -v \nabla_{\mathbf{m}} \nabla_{\mathbf{m}}^T v^{-1}$  описывает кривизну поверхности  $v(\mathbf{m})$  относительно изотропной среды, в которой он является единичным. В анизотропной среде собственные векторы тензора  $\mathbf{w}$  задают два направления экстремальной расходимости пучка. Собственные значения показывают, во сколько раз расходимость потока энергии (для этих направлений) превышает дифракционную расходимость слаборасходящегося пучка. Важно, что  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{m} = v(\mathbf{m})$ , а тензор  $\mathbf{W}$  (как и  $\mathbf{w}$ ) является планальным:  $\mathbf{W} \mathbf{m} = 0$ .

С учетом монохроматичности из (2) следует, что в нашем случае

$$k_x = k_0 - \frac{\mathbf{S}_{\perp} \cdot \mathbf{k}_{\perp}}{v_0} - \frac{\mathbf{k}_{\perp}^T \mathbf{W} \mathbf{k}_{\perp}}{2v_0}, \quad \mathbf{k}_{\perp} = (k_y, k_z),$$

$v_0$  — скорость звука в направлении оси  $x$ . Отметим, что каждая из величин  $S_{y,z}/v_0$  равна тангенсу угла

сноса пучка вдоль одноименной оси. Приближению (2) соответствует параболическое уравнение для медленно меняющейся амплитуды ( $\nabla_{\perp}$  — градиент по поперечным координатам  $y$  и  $z$ )

$$\left( v_0 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{S}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} - \frac{j}{2} \nabla_{\perp}^T \mathbf{W} \nabla_{\perp} \right) A(x, y, z) = 0. \quad (4)$$

Если ввести величины  $q_i = k_i/k_0$ ,  $i = x, y, z$ , то параболическая аппроксимация примет удобный безразмерный вид

$$q_x = 1 - \frac{\mathbf{S}_{\perp} \cdot \mathbf{q}_{\perp}}{v_0} - \frac{1}{2} \mathbf{q}_{\perp}^T \mathbf{w} \mathbf{q}_{\perp}. \quad (5)$$

В этих обозначениях амплитуда пучка примет вид

$$A(x, y, z) \propto \int U(k_0 q_y, k_0 q_z) \exp j k_0 ((q_x - 1)x + q_y y + q_z z) dq_y dq_z.$$

Достоинство приближения (2–5) в его относительной простоте, что позволяет для целого ряда задач получить из (1) аналитические выражения. Можно учесть следующие поправки, вводя в (2) и (5) следующие члены разложения, при этом в (4) появятся производные порядка 3 и выше. Ясно, что аналитическое решение такого уравнения будет возможно только в очень упрощенных случаях.

Предлагаемый подход состоит в следующем. Будем приближать зависимость  $q_x(q_y, q_z)$  также поверхностью второго порядка, минимизируя погрешность в пределах существенной части углового спектра пучка, а не в окрестности только одной точки. Таким образом, наша задача состоит в таком выборе параметров  $Q_0, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ , что параболическое приближение (в аналогичном выражению (5) виде)

$$q_{px} = Q_0 - \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{q}_{\perp} - \frac{1}{2} \mathbf{q}_{\perp}^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{q}_{\perp} \quad (6)$$

наиболее точно описывает зависимость  $q_x(q_y, q_z)$  с учетом формы и ширины углового спектра пучка.

Пусть  $A_p(x, y, z)$  — амплитуда, вычисленная в параболическом приближении (6). Для решения задачи потребуем наибольшей среднеквадратичной близости „точной“ амплитуды  $A$  и  $A_p$  в каждой плоскости  $x = \text{const}$ , что эквивалентно минимальности выражения

$$\int |A - A_p|^2 dy dz.$$

Как следует из (1), в каждой такой плоскости спектры амплитуд равны  $U(k_y, k_z) \exp j(k_x - k_0)x$ , и  $U(k_y, k_z) \exp j(k_{px} - k_0)x$  соответственно. После применения теоремы Парсеваля задача сводится к поиску параметров, минимизирующих выражение

$$\begin{aligned} I(Q_0, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) &= \int |U(k_y, k_z)|^2 (1 - \cos \varphi) dk_y dk_z, \\ \varphi &= (k_{px} - k_x)x \\ &= k_0 x \left( Q_0 - \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{q}_{\perp} - \frac{1}{2} \mathbf{q}_{\perp}^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{q}_{\perp} - q_x \right). \end{aligned}$$

Приравнявая нулю производную последнего выражения по искомым параметрам, получим систему уравнений

$$\int |U(k_0 \mathbf{q}_\perp)|^2 F_i \sin \varphi d\mathbf{q}_\perp = 0, \quad i = 0, 1, 2, \quad (7)$$

$$F_0 = 1, \quad \mathbf{F}_1 = \mathbf{q}_\perp, \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{q}_\perp \mathbf{q}_\perp^T.$$

„Традиционному“ параболическому приближению соответствует самая грубая аппроксимация  $\sin(\varphi) \approx 0$ , т.е.  $\varphi(\mathbf{q}_\perp) \approx 0$  при небольших значениях аргумента. Следующим очевидным шагом является приближение  $\sin(\varphi) \approx \varphi$  или линейная аппроксимация  $\sin(\varphi) \approx C\varphi$ , с учетом которой система (7) становится линейной и легко решается. Но в этом случае необходимо ограничить область интегрирования, исходя из точности аппроксимации.

Эту область можно определить из условия  $|\varphi| \leq \varphi_1$ , где  $\varphi_1$  — положительное число. Его значение будет являться существенным параметром в предложенной модификации.

При  $\varphi_1 \ll 1$  хорошо выполняется приближение  $\sin(\varphi) \approx \varphi$ , но при этом область интегрирования мала. Значит, результат будет близок к традиционному приближению, которое нас не удовлетворяет. С увеличением  $\varphi_1$  точность линейной аппроксимации падает, а учитываемая область зависимости  $q_x(\mathbf{q}_\perp)$  увеличивается. В качестве условного максимального значения можно принять  $\varphi_1 = \pi/2$ , так как вне этих пределов функция  $\sin(\varphi)$  немонотонна и даже качественно не отражает линейный рост. При  $\varphi_1 = \pi/2$  аппроксимация, минимизирующая среднеквадратичную погрешность, имеет вид

$$\sin(\varphi) \approx \frac{24}{\pi^3} \varphi,$$

ошибка аппроксимации не превысит 22%.

Для упрощения рассмотрим одномерный случай, когда спектр  $U(k_0 q_\perp)$  зависит от одной переменной, соответственно

$$q_{px} = Q_0 - Q_1 q_\perp - \frac{1}{2} Q_2 q_\perp^2.$$

С учетом линейной аппроксимации зависимости  $\sin(\varphi)$  параметры  $Q_i$  определяются линейной системой

$$\begin{pmatrix} B_0 & B_1 & B_2 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ B_2 & B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_0 \\ -Q_1 \\ -Q_2/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{0x} \\ B_{1x} \\ B_{2x} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$B_s = \int_{q_{-1}}^{q_1} |U(k_0 q_\perp)|^2 q_\perp^s dq_\perp,$$

$$B_{sx} = \int_{q_{-1}}^{q_1} |U(k_0 q_\perp)|^2 q_x q_\perp^s dq_\perp.$$

Здесь  $q_{-1} < 0$  и  $q_1 > 0$  — значения переменной  $q_\perp$ , ограничивающие область  $|\varphi| \leq \varphi_1$ . Если ожидается, что

модификация параметров параболического приближения будет небольшой, то граничные значения  $q_{\pm 1}$  легко расчитать, пренебрегая этим различием и полагая  $\varphi_1 \ll 1$ . Т.е. их следует определить из условия

$$k_0 x \left( 1 - \frac{S_\perp}{v_0} q_\perp - \frac{1}{2} w q_\perp^2 - q_x \right) = \varphi_1.$$

При учете в разложении (5) следующих членов можно написать

$$\varphi \approx -k_0 x \left( \frac{1}{3!} Q_3 q_\perp^3 + \frac{1}{4!} Q_4 q_\perp^4 + \dots \right),$$

$$B_{sx} = B_s - \frac{S_\perp}{v_0} B_{s+1} - \frac{1}{2} w B_{s+2} + \frac{1}{3!} Q_3 B_{s+3} + \frac{1}{4!} Q_4 B_{s+4} + \dots$$

Если ввести поправки  $\Delta_0 = Q_0 - 1$ ,  $\Delta_1 = Q_1 - S_\perp/v_0$ ,  $\Delta_2 = Q_2 - w$ , то они определяются системой

$$\begin{pmatrix} B_0 & B_1 & B_2 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ B_2 & B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_0 \\ -\Delta_1 \\ -\Delta_2/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_3 & B_4 & B_5 \dots \\ B_4 & B_5 & B_6 \dots \\ B_5 & B_6 & B_7 \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_3/3! \\ Q_4/4! \\ Q_5/5! \\ \dots \end{pmatrix}, \quad (9)$$

в правой части которой длина столбца, определяемая выбранной степенью разложения, должна быть согласована с длиной каждой строки матрицы.

Решив (8) или определив поправки  $\Delta_s$  из (9) с определенной точностью, мы получим зависимости  $Q_s(x)$ , позволяющие приблизить (в среднеквадратичном смысле) „точное“ поле подем, рассчитанным в параболическом приближении.

Точность модели можно оценить при помощи параметра (в одномерном случае)

$$\varepsilon = \int |A - A_p|^2 dy / \int |A|^2 dy, \quad (10)$$

который при переходе к модифицированной теории должен существенно уменьшиться.

## 2. Акустическое поле ленточного преобразователя в парателлурите

Типичные для АО условия возбуждения акустического поля таковы. Волновой вектор медленной сдвиговой акустической волны лежит в плоскости АО-дифракции  $(1\bar{1}0)$  и составляет угол  $\alpha = 0-8^\circ$  с осью  $[110]$ . Именно в направлении  $[110]$  скорость звука принимает наименьшее значение  $616 \text{ m/s}$ , и при небольшом отклонении в указанной плоскости пучок испытывает сильный снос на угол  $\sim 10\alpha$ . Свет обычно распространяется в плоскости  $(1\bar{1}0)$  под незначительным углом (для АО-модуляторов и дефлекторов) к оптической

оси. Прямоугольный пьезопреобразователь имеет размеры  $l_z = 3-8 \text{ mm}$  в направлении распространения света („длина“) и  $l_y = 2-7 \text{ mm}$  в другом измерении („высота“). Размер монокристалла вдоль направления распространения звука до  $20 \text{ mm}$ . Частота звука зависит от длины световой волны и геометрии АО-взаимодействия. В частности, при длине волны оптического излучения  $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$  наиболее часто используется диапазон  $15-40 \text{ MHz}$ , но в нетипичных условиях возможно АО-взаимодействие при частотах до  $4-6 \text{ MHz}$ .

Обсудим существенные для АО особенности звукового пучка в данных условиях. Дифракционная структура в плоскости АО-дифракции  $xz$  выражена слабее ( $w_z = 9-12$ ), и почти всегда достаточно приближения звукового столба. В ортогональной плоскости  $xy$  дифракционные эффекты выражены ярче ( $w_y = 45-52$ ), и обычно фактор неоднородности звукового поля следует учитывать.

Влияние этого фактора на параметры АО-взаимодействия двоякое. С одной стороны, при модуляции тонкого светового пучка эффективность дифракции сильно зависит от места входа луча в кристалл. В результате заданный уровень эффективности будет требовать разной управляющей мощности, что может восприниматься как неточность расчета. С другой стороны, при падении широкого пучка света (АО-дефлектор, диаметр пучка — до  $7 \text{ mm}$ ), существенная неоднородность поля в пределах апертуры ограничивает предельно достижимую эффективность дифракции.

Таким образом, для АО-применений достаточно изучить одномерное акустическое поле ленточного преобразователя, при этом все дифракционные эффекты определяются одномерной зависимостью  $q_x(q_y)$ . Полагая поле на поверхности преобразователя равномерным, получим пространственный спектр в виде

$$U(k_y) \propto \frac{\sin(k_0 q_y l_y / 2)}{(k_0 q_y l_y / 2)}$$

(при расчетах существенна только форма спектра).

Анализ удобно вести в безразмерных переменных

$$K_0 = k_0 l_y / 2 = \pi l_y / \Lambda, \quad Y = y / l_y, \quad X = \frac{\Lambda w_y}{\pi l_y^2} x,$$

$\Lambda$  — длина волны звука. При таком выборе картина поля в безразмерных переменных  $X-Y$ , рассчитанная в традиционном параболическом приближении, не зависит от частоты звука. Тогда

$$U(k_y) \propto \frac{\sin(K_0 q_y)}{K_0 q_y}, \quad k_0 x = 2K_0^2 X / w_y,$$

$$\varphi \approx -\frac{2K_0^2 X}{w_y} \left( \frac{1}{4!} Q_4 q_y^4 + \frac{1}{6!} Q_6 q_y^6 + \dots \right).$$

Отсутствие нечетных членов разложения в данном случае обусловлено симметрией акустических свойств

парателлурита. Если в последнем выражении оставить только первое слагаемое, то приближенно

$$q_{\pm 1} \approx \pm \left( 12 \frac{\varphi_1 w_y}{K_0^2 |Q_4| X} \right)^{1/4}.$$

Так как используемый диапазон углов  $\alpha$  невелик, зависимость  $q_x(q_y)$  имеет сходные черты независимо от конкретного значения угла. Анализ показывает, что использование модифицированного приближения необходимо при условии  $l_y / \Lambda < 10^2$ .

В качестве примера рассмотрим результат моделирования звукового поля для реального АО-устройства с параметрами: угол  $\alpha = 0$ , высота преобразователя  $l_y = 6 \text{ mm}$ , длина волны лазерного излучения  $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ , минимальная звуковая частота  $f = 5 \text{ MHz}$ . При этом скорость звука  $616 \text{ m/s}$ , длина волны  $\Lambda = 123 \mu\text{m}$ , безразмерные параметры  $l_y / \Lambda = 48.6$ ,  $K_0 = 153$ .

Кривая  $q_x(q_y)$  симметрична, поэтому ее разложение содержит только четные степени  $q_x = 1 - 26.12 q_y^2 - 340.9 q_y^4 + \dots$ , соответственно  $w_y = 52.24$ ,  $Q_4 = -8181$  и т.д. Полезно сравнить с аналогичным разложением в изотропной среде  $q_x = \sqrt{1 - q_y^2} = 1 - q_y^2/2 - q_y^4/8 - q_y^6/16 + \dots$ , так что  $w = 1$ ,  $Q_4 = -3$ . И если значение  $w$  масштабирует вдоль направления звука дифракционную картину в параболическом приближении, то отношение  $Q_4/w$  является простейшей мерой симметричного искажения картины. В нашем случае это отношение около  $157$ , что много больше значения  $3$ , характерного для изотропной среды. В тех случаях, когда разложение  $q_x(q_y)$  содержит нечетные члены, значение  $Q_3$  будет являться мерой возникающей асимметрии картины относительно оси пучка.

Далее при расчете картины звукового поля использовался диапазон парциальных плоских волн, направленных под углом до  $\pi/4$  к оси  $[110]$ . На рис. 1 пред-

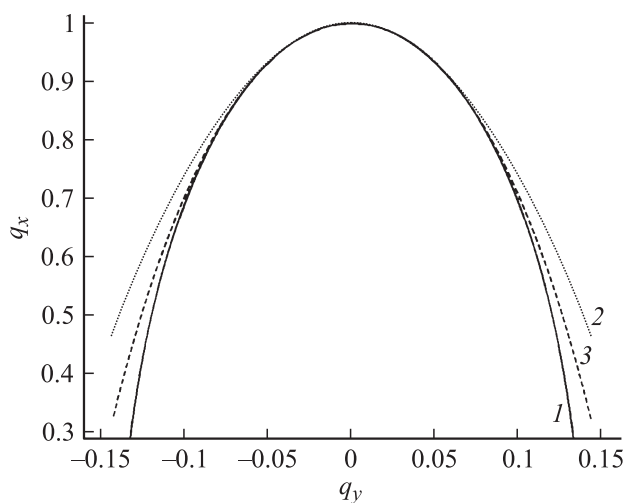
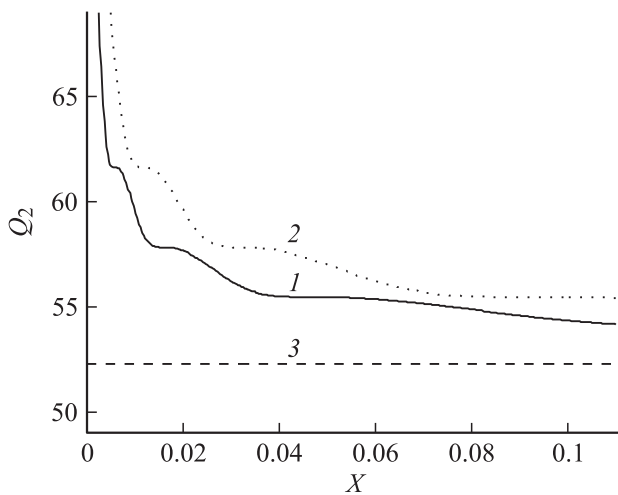


Рис. 1. Аппроксимация зависимости  $q_x(q_y)$  (1) параболическим разложением (2) и с точностью до членов 4-го порядка (3).



**Рис. 2.** Зависимость параметра  $Q_2(X)$  от безразмерного расстояния при  $\varphi_1 = \pi/4$  (1),  $\pi/2$  (2).

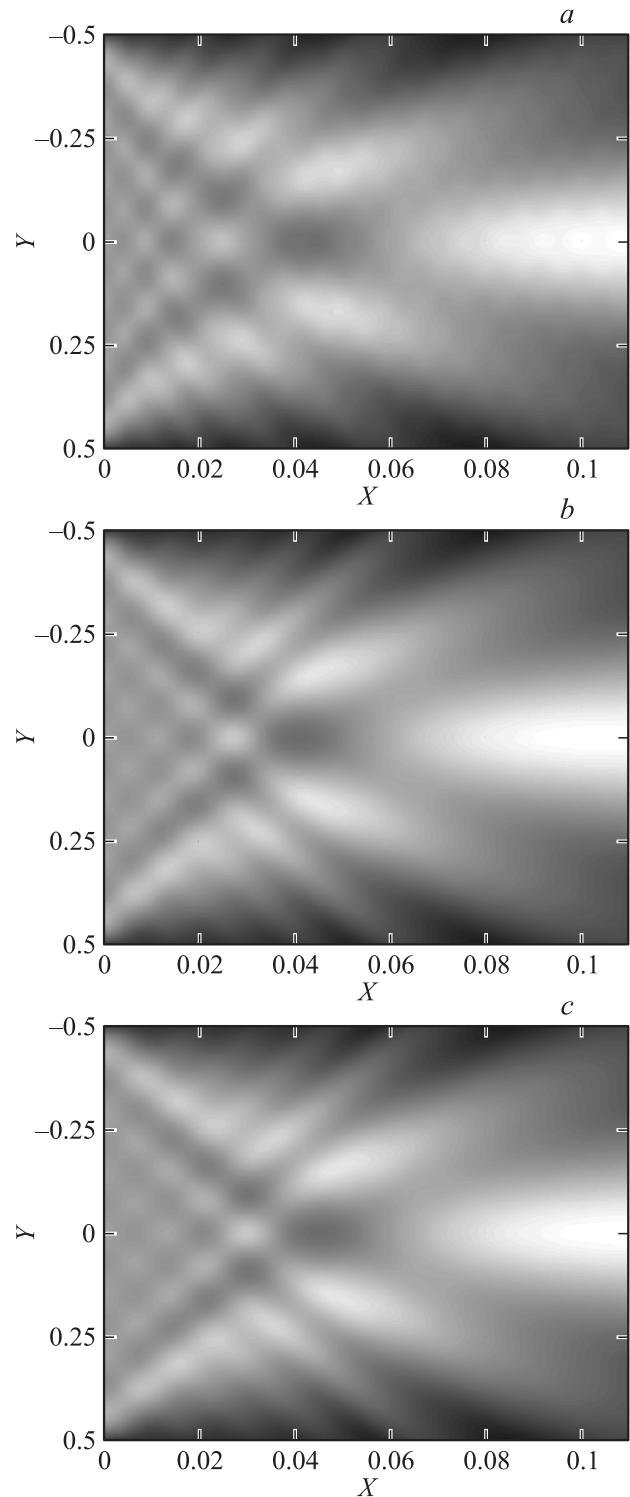
ставлена точная зависимость  $q_x(q_y)$  (кривая 1), а также ее параболическое приближение (2) и с точностью до членов 4-го порядка (3). Видно, что параболическое приближение при отклонении от оси [110] быстро становится неудовлетворительным, следующее приближение заметно точнее. Качественное сравнение характера этих линий показывает, что учет высших членов разложения эквивалентен увеличению усредненной кривизны линии.

Для дальнейшего моделирования были выбраны 2 значения параметра:  $\varphi_1 = \pi/4$  и  $\varphi_1 = \pi/2$ , соответствующие среднему и максимальному значениям в пределах выбранного диапазона. Рис. 2 представляет рассчитанную зависимость параметра  $Q_2$  от безразмерного расстояния (кривые 1 и 2), уровень 3 соответствует значению  $w_y$ . Видно, что в диапазоне расстояний до  $X \sim 0.1$ , передающем основные особенности ближнего поля, параметр  $Q_2$  превышает  $w_y$  на 5–10–20%. При этом в согласии с анализом зависимости  $q_x(q_y)$  увеличение  $\varphi_1$  приводит к росту значения  $Q_2$  при прочих равных условиях.

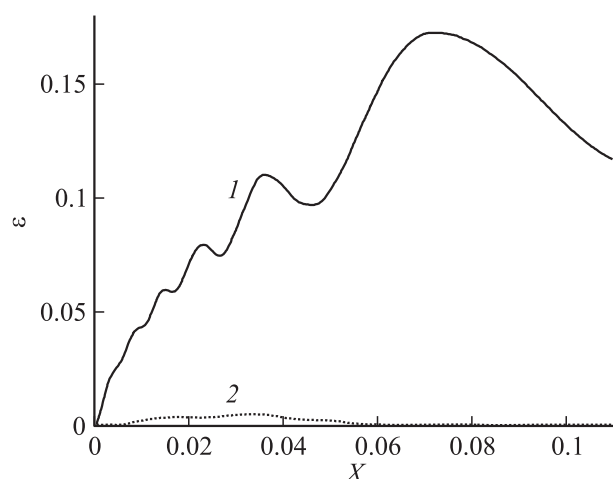
Можно предположить, что полученное превышение  $Q_2(X) > w_y$  должно проявиться следующим образом: характерные неоднородности ближнего поля окажутся ближе к преобразователю относительно предполагаемой картины, причем смещение будет меняться с расстоянием. Такой эффект с некоторой погрешностью может восприниматься как использование преобразователя меньшего размера. Рис. 3 подтверждает этот качественный анализ. Сравнение модуля амплитуды истинного поля (рис. 3, а) с картиной в параболическом приближении (3, с) демонстрирует как сдвиг, так и искажение картины. При этом модифицированное параболическое приближение (рис. 3, b — при  $\varphi_1 = \pi/2$ ) дает картину, хорошо передающую крупные неоднородности. Это особенно заметно при анализе положения минимума амплитуды на оси пучка (при  $X \approx 0.04$ ). Можно отметить, что в рамках проведенного расчета зависимость  $Q_0(X)$

имеет аналогичный вид, но меняется незначительно, в пределах 0.01–0.1%. Картина поля при  $\varphi_1 = \pi/4$  не приведена, так как она достаточно близка к рис. 3, b.

Количественно улучшение точности модели демонстрирует рис. 4. При этом относительная по-



**Рис. 3.** Распределение амплитуды истинного ультразвукового поля (а) и его модель в модифицированном (b) и традиционном параболическом приближении (с).



**Рис. 4.** Относительная погрешность традиционного (1) и модифицированного (2) параболических приближений.

погрешность рассчитывалась численно (в диапазоне  $-1/2 \leq Y \leq 1/2$ ), исходя из определения (10). В результате во всем рассмотренном диапазоне погрешность модифицированной модели ( $\varphi_1 = \pi/2$ ) не превосходит 0.6%. Аналогичной зависимости при  $\varphi_1 = \pi/4$  вследствие большой схожести не приводится. Можно отметить, что при  $X > 0.07$  погрешность приближения меньше в случае  $\varphi_1 = \pi/4$ , в ином случае большую точность обеспечивает значение  $\varphi_1 = \pi/2$ .

Естественно, что при уменьшении расходимости пучка ( $K_0 \rightarrow \infty$ ) значение  $Q_2 \approx w_y$ , тем более  $Q_0 \approx 1$ , почти для всех расстояний. В этом случае учет поправок не имеет смысла и картина несколько расходится с параболическим приближением только вблизи преобразователя. Для рассмотренных условий возбуждения звука в парателлурите фактически при  $l_y/\Lambda > 10^2$  достаточно традиционного приближения.

В процессе обсуждения авторы решили отказаться от экспериментальной верификации выдвинутых положений, так как в указанных условиях хорошо заметный минимум амплитуды находится на расстоянии около 1 мм от преобразователя, и для надежного количественного подтверждения придется использовать методы, не характерные для акустооптики. Можно полагать, что предложенный подход легче будет проверить в других применениях теории волн.

### 3. Заключение

1. Предложена модификация параболического приближения теории акустической дифракции, позволяющая расширить это приближение на случай большой дифракционной расходимости ультразвукового пучка и/или высокой акустической анизотропии среды. Подход основан на такой параболической аппроксимации волновой поверхности, которая обеспечивает наибольшую близость (в среднеквадратичном смысле) модельного поля

с реальным. При этом вычисляемые параметры зависят от расстояния до преобразователя, а также углового спектра ультразвукового пучка.

2. Использование модифицированной теории позволяет существенно улучшить приближение модельного поля к реальному. При уменьшении угловой расходимости пучка, т.е. увеличении отношения поперечного размера пучка к длине звуковой волны, различие между традиционным и модифицированным параболическими приближениями исчезает.

3. В случае парателлурита — одного из лидирующих в акустооптике материалов, обладающего аномально высокой акустической анизотропией, проведен анализ применимости развиваемого подхода в условиях, характерных для акустооптических применений. Показано, что, если отношение высоты плоского преобразователя к длине звуковой волны  $l_y/\Lambda < 100$ , использование параболического приближения приводит к заметным неточностям. Характерные неоднородности ближнего поля оказываются заметно ближе к преобразователю, чем при расчете в рамках параболического приближения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты РФФИ 10-02-00029-а и 12-07-00186-а).

### Список литературы

- [1] Maloney W.T., Meltz G., Gravel R.L. // IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics. 1968. Vol. SU-15. N 3. P. 167–172.
- [2] Хаткевич А.Г. // Акустический журн. 1978. Т. 24. № 1. С. 108–115.
- [3] Newberry B.P., Thomson R.B. // J. Acoust. Soc. Amer. 1989. Vol. 85. N 6. P. 2290–2300.
- [4] Григорьев М.А., Навроцкая Ю.Н., Прохоров В.В., Петров В.В., Толстиков А.В. // Опт. и спектр. 1998. Т. 84. № 2. С. 307–311.
- [5] Магдич Л.Н., Писаревский Ю.В., Семеновский Н.Н., Сильвестрова О.Ю. // Радиотехн. и электрон. 2008. Т. 53. № 12. С. 1528–1532.
- [6] Акустические кристаллы. Справочник / Под ред. М.П. Шаскольской. М.: Наука, 1982. 632 с.
- [7] Kastelik J.S., Gazalet M.J., Bruneel C., Bridoux E. // J. Appl. Phys. 1993. Vol. 74. N 4. P. 2813–2817.
- [8] Белый В.Н., Казак Н.С., Павленко В.К., Камранжи Е.Г., Курилкина С.Н. // Акустический журн. 1997. Т. 43. № 2. С. 156–161.
- [9] Voloshinov V.B., Polikarpova N.V. // Appl. Opt. 2009. Vol. 48. N 7. P. C55–C66.
- [10] Балакий В.И., Манцевич С.Н. // Акустический журн. 2012. Т. 58. № 5. С. 600–609.
- [11] Антонов С.Н., Вайнер А.В., Проклов В.В., Резвов Ю.Г. // ЖТФ. 2012. Т. 82. № 6. С. 80–84.
- [12] Антонов С.Н., Вайнер А.В., Проклов В.В., Резвов Ю.Г. // ЖТФ. 2009. Т. 79. № 6. С. 119–123.
- [13] Антонов С.Н., Вайнер А.В., Проклов В.В., Резвов Ю.Г. // ЖТФ. 2010. Т. 80. № 3. С. 97–106.
- [14] Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. 386 с.