

01
О самосогласованных состояниях плоского вакуумного диода с пучком электронов

© В.И. Кузнецов, А.Я. Эндер

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: victor.kuznetsov@mail.ioffe.ru

(Поступило в Редакцию 26 ноября 2012 г.)

Дана полная классификация самосогласованных стационарных решений вакуумного диода плоской геометрии с моноэнергетическим потоком электронов. Приведены формулы для расчета распределений потенциала всех типов, а также максимального тока, который может быть пропущен через диод в стационарном режиме, при произвольной величине внешнего напряжения. Исследована устойчивость решений.

Введение

История изучения интенсивных электронных потоков, в которых влияние собственного пространственного заряда на транспортировку пучка играет важную роль, насчитывает уже около 100 лет [1–20]. Если на начальных этапах исследования были связаны в основном с электронной оптикой (см., например, [21]), то в последнее время интерес к диоду с пучком электронов проявляется в самых различных областях физики и техники: это генераторы СВЧ-излучения и ускорительная техника [22], ионные диоды в термоядерном синтезе [23], диоды с полевой эмиссией и вакуумная микроэлектроника [24], лазерные принтеры и копировальная техника [16], технологические процессы, связанные с изготовлением полупроводников и полупроводниковых диодов [25], технология изготовления плоскопанельных дисплеев на основе электронной эмиссии из углеродных нанотрубок [26] и т.д.

Впервые диод плоской геометрии, в котором пучок электронов с малым разбросом по скоростям движется в вакууме без столкновений, теоретически изучался В.Р. Бурсианом [3]. В этой работе было обнаружено и объяснено явление обрыва тока при превышении плотностью тока пучка некоторой пороговой величины. Поэтому естественно называть это устройство диодом Бурсиана. Важной особенностью такого диода является то, что ток в нем замыкается через внешнюю цепь, т.е. обеспечивается обратная связь между электродами. Из-за наличия этой связи при фиксированных величинах внешнего напряжения и межэлектродного промежутка существует предельная плотность тока J_{SCL} , который может быть пропущен через диод в стационарном режиме. Если сделать ток чуть больше предельного, в диоде разовьется аperiodическая неустойчивость Бурсиана [11], которая завершается переходом на слаботочную ветвь. Наличие двух ветвей позволяет использовать диод Бурсиана в качестве ключевого элемента (см., например, [27,28]).

При определенных условиях на слаботочной ветви могут возникнуть сильно нелинейные колебания, сопровождающиеся электромагнитным излучением, что

делает такое устройство привлекательным для приложений [22]. Характерные черты колебательных режимов рассмотрены в [29].

В последнее время повышенный интерес к диодам с пучком электронов проявляется в основном в связи с тем, что такие сравнительно простые устройства демонстрируют многие черты нелинейных динамических систем. Процессы, развивающиеся в межэлектродном промежутке, можно изучать теоретически, а полученные результаты проверять экспериментально. Однако наблюдается интерес и к изучению стационарных состояний диода. Например, недавно появилась работа [30], в которой изучались стационарные решения на сильно-точной ветви. В настоящей работе рассмотрены все типы самосогласованных стационарных решений как для режима без отражения, так и с отражением электронов. Проведено исследование устойчивости всех решений и построены границы областей, соответствующих устойчивым решениям.

1. Стационарные решения диода

Будем рассматривать вакуумный диод плоской геометрии, в котором нерелятивистский поток электронов с функцией распределения по скоростям $f_0(v) = n_0 \cdot \delta(v - v_0)$ (n_0 и v_0 — начальные концентрация и скорость электронов) поступает с эмиттера ($z = 0$) и движется без столкновений в самосогласованном электрическом поле. Моноэнергетический поток электронов будем называть пучком. Коллектор расположен на расстоянии d от эмиттера. Между электродами приложена постоянная разность потенциалов U . Будем считать, что при достижении любого из электродов частицы поглощаются.

При изучении характеристик диода Бурсиана, а также плазменных диодов с пучком электронов, в качестве единиц длины и энергии удобно использовать пучковую дебаевскую длину λ_D , которая определяется энергией W_b и плотностью тока J_b влетающих в межэлектродный промежуток электронов, и кинетическую энергию

пучка W_b :

$$\lambda_D = \left[\frac{2\epsilon_0 W_b}{e^2 n_0} \right]^{1/2} = \left(\frac{8\epsilon_0^2}{e^2 m} \right)^{1/4} \frac{W_b^{3/4}}{J_b^{1/2}} \approx 0.3238 \cdot 10^{-2} \frac{V_b^{3/4}}{J_b^{1/2}} [\text{cm}],$$

$$W_b = m v_0^2 / 2. \quad (1)$$

Здесь плотность тока пучка $J_b = e n_0 v_0$ и ускоряющее напряжение $V_b = W_b / e$ выражены соответственно в амперах на квадратный сантиметр и в вольтах; e и m — заряд и масса электрона, а $\epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ c}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2$. Такое определение дебаевской длины было предложено в [11] и широко использовалось в [13,20].

В дальнейшем будем использовать следующие безразмерные величины: координату $\xi = z / \lambda_D$, время $\tau = t v_0 / \lambda_D$, скорость $u = v / v_0$, потенциал $\eta = e\Phi / (2W_b)$, напряженность электрического поля $\varepsilon = eE\lambda_D / (2W_b)$ и плотность тока $j = J / J_b$. Удобство использования таких безразмерных величин обусловлено, в частности, тем, что стационарные решения диода Бурсиана параметризуются всего двумя безразмерными величинами: межэлектродным расстоянием $\delta = d / \lambda_D$ и внешним напряжением $V = eU / (2W_b)$.

При внешнем напряжении $V > -1/2$ для стационарных решений диода Бурсиана характерны распределения потенциала (РП) с минимумом $0 > \eta_m \geq -1/2$, лежащим внутри межэлектродного промежутка: $0 < \xi_m < \delta$. При этом, если величина минимума оказывается меньше начальной энергии электронов, все вылетевшие с эмиттера электроны достигают коллектора — это режим без отражения электронов (рис. 1, кривая 1) [13].

Когда $|\eta_m|$ становится равным начальной энергии электронов, т.е. $\Phi_m = -W_b / e$, в точке минимума потенциала часть электронов пучка отражается и возвращается обратно на эмиттер. Это решение называется решением с виртуальным катодом (ВК), а режим — режимом с отражением электронов (рис. 1, кривая 3). Если минимум потенциала оказывается на коллекторе, реализуются монотонные РП. Отметим, что $\epsilon_0 \leq 0$ реализуются только монотонные РП (рис. 1, кривая 2).

При $V < -1/2$ в точке ξ_r , где потенциал становится равным $-1/2$, все электроны пучка отражаются, так что в промежутке $\xi_r < \xi \leq \delta$ электронов нет. В этом случае реализуется режим с полным отражением электронов, и потенциал монотонно убывает с ростом координаты (рис. 1, кривая 4).

В [3] было впервые показано, что в некотором интервале значений J_b в диоде с пучком электронов при одних и тех же значениях тока и внешнего напряжения могут существовать три решения, причем по крайней мере одно из них всегда является решением с отражением электронов. В точке, где $\eta = -1/2$, часть электронов пучка отражается от ВК и возвращается обратно на эмиттер. В результате конвективный ток на коллекторе

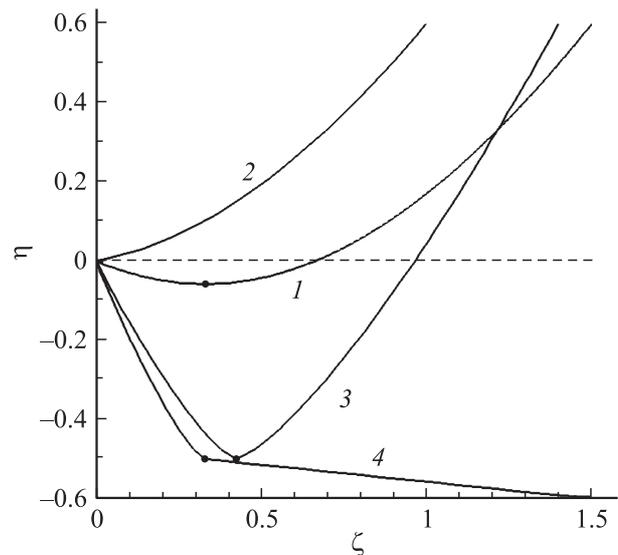


Рис. 1. Различные типы распределений потенциала в диоде Бурсиана: 1 — РП с минимумом в режиме без отражения электронов ($\eta_m > -1/2$), 2 — монотонные РП с $\epsilon_0 < 0$, 3 — РП с минимумом в режиме с частичным отражением электронов ($\eta_m = -1/2$), 4 — РП в режиме с полным отражением электронов ($V < -1/2$).

оказывается меньше входящего тока. В математической модели функция распределения (ФР) электронов по скоростям выбиралась монокинетической. В этом случае возможность „расщепления“ пучка электронов в точке отражения оправдана тем, что в реальных устройствах поступающие с эмиттера электроны всегда имеют небольшой разброс по скоростям. Для количественного описания частичного отражения электронов от ВК в стационарном режиме Бурсиан ввел коэффициент отражения электронов r , равный отношению числа отраженных к числу летящих с эмиттера электронов. Тогда безразмерная плотность тока на коллектор, т.е. доля электронного потока, прошедшего за точку отражения, $j = 1 - r$.

В одномерном случае для нахождения стационарных решений достаточно воспользоваться законом сохранения энергии, уравнением неразрывности и уравнением Пуассона. Закон сохранения энергии электрона можно записать в виде

$$u^2/2 - \eta = 1/2. \quad (2)$$

В случае без отражения электронов из уравнения неразрывности следует

$$j = nu = 1. \quad (3)$$

Таким образом, если плотность входящего тока принять за единицу, то концентрация частиц $n(\xi)$ в точке ξ , где электрон имеет скорость $u(\xi)$, равна $1/u(\xi)$. В случае с отражением электронов в области, расположенной между эмиттером и виртуальным катодом, существуют два потока — прямой и обратный. Поскольку в стационарном случае в любой точке ξ скорости прямых и

обратных частиц совпадают по абсолютной величине, плотности прямых и обратных частиц равны соответственно $1/u(\xi)$ и $r/|u(\xi)|$. Таким образом, в этой области полная концентрация электронов равна $(1+r)/u(\xi)$. Справа от ВК существует поток электронов с весом $1-r$. Поэтому общее выражение для концентрации электронов в диоде имеет вид

$$n(\xi; r) = u^{-1}H(\xi; r),$$

$$H(\xi; r) = (1+r)\Theta(\xi_r - \xi) + (1-r)\Theta(\xi - \xi_r). \quad (4)$$

Здесь функция $\Theta(x)$ равна 1 при $x > 0$ и 0 при $x < 0$.

Уравнение Пуассона имеет вид

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = n. \quad (5)$$

Подставляя (2), (4) в (5), получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка для нахождения η :

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{1+2\eta}} H(\xi; r). \quad (6)$$

Граничные условия

$$\eta(0) = 0, \quad \eta(\delta) = V. \quad (7)$$

Сначала рассмотрим режим без отражения электронов. Здесь $r = 0$ и $H(\xi; 0) \equiv 1$. Уравнение (6) легко интегрируется как влево, так и вправо от точки минимума потенциала, и РП дается неявной формулой

$$\xi = \xi_m \mp \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \left[\left(\sqrt{1+2\eta} - \sqrt{1+2\eta_m}\right)^{3/2} + 3\sqrt{1+2\eta_m} \left(\sqrt{1+2\eta} - \sqrt{1+2\eta_m}\right)^{1/2} \right]. \quad (8)$$

Здесь знак „-“ соответствует области $\xi < \xi_m$, а „+“ — $\xi > \xi_m$. Видно, что распределение потенциала симметрично относительно своего минимума. Положение этого минимума дается формулой

$$\xi_m = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \left(1 - \sqrt{1+2\eta_m}\right)^{1/2} \left(1 + 2\sqrt{1+2\eta_m}\right), \quad (9)$$

которая получается из (8) с учетом граничных условий на эмиттере $\xi = 0, \eta = 0$. В формулы (8) и (9) в качестве параметра входит потенциал в минимуме η_m . При анализе решений в качестве параметра удобнее использовать напряженность электрического поля на эмиттере ε_0 . Чтобы найти связь между ε_0 и η_m , нужно один раз проинтегрировать уравнение (6)

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \pm \left(\varepsilon_0^2 + 2\sqrt{1+2\eta} - 2\right)^{1/2}, \quad (10)$$

и воспользоваться условием равенства нулю напряженности электрического поля в точке минимума потенциала: $\sqrt{1+2\eta_m} = (2 - \varepsilon_0^2)/2$. Тогда получим

$$\eta_m = -\varepsilon_0^2(4 - \varepsilon_0^2)/8. \quad (11)$$

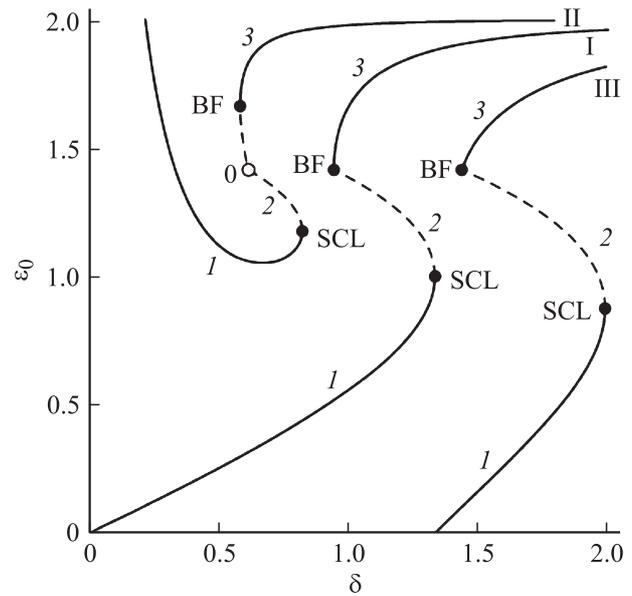


Рис. 2. Зависимость напряженности электрического поля у эмиттера от величины межэлектродного зазора для стационарных решений. Кривая I — $V = 0$ ($\delta_{BF} = 2^{3/2}/3, \delta_{SCL} = 4/3$), II — -0.4 , III — $+0.2$ [20].

В результате формулы (8) и (9) примут соответственно вид

$$\xi = \varepsilon_0(3 - \varepsilon_0^2)/3 \mp \left[\left(2\sqrt{1+2\eta} - 2 + \varepsilon_0^2\right)^{3/2} + 3(2 - \varepsilon_0^2) \left(2\sqrt{1+2\eta} - 2 + \varepsilon_0^2\right)^{1/2} \right] / 6, \quad (12)$$

$$\xi_m = \varepsilon_0(3 - \varepsilon_0^2)/3. \quad (13)$$

После подстановки граничного условия на коллекторе $\eta(\delta) = V$ в (12), получаем алгебраическое уравнение, из которого при заданных внешнем напряжении V и величине межэлектродного промежутка δ можно найти ε_0 :

$$\delta = \varepsilon_0(3 - \varepsilon_0^2)/3 + \left[\left(2\sqrt{1+2V} - 2 + \varepsilon_0^2\right)^{3/2} + 3(2 - \varepsilon_0^2) \left(2\sqrt{1+2V} - 2 + \varepsilon_0^2\right)^{1/2} \right] / 6. \quad (14)$$

Зависимость (14) является основной при анализе стационарных состояний диода Бурсиана. Для того чтобы понять, как решения ведут себя с изменением тока пучка J_b , удобно изображать их точками на плоскости $\{\varepsilon_0, \delta\}$, поскольку при фиксированных W_b и d (энергии электронов и величине межэлектродного зазора) $\delta \sim J_b^{1/2}$. При фиксированном внешнем напряжении V точка, соответствующая решению, с изменением δ описывает некоторую кривую на плоскости $\{\varepsilon_0, \delta\}$. Примеры такой зависимости представлены на рис. 2 для ряда значений V . Три ветви стационарных решений в литературе получили название normal C branch (ветвь 1), overlap C branch (ветвь 2) и B branch (ветвь 3) [7].

Правая точка бифуркации (точка SCL — Space-Charge-Limited point) на каждой кривой $\varepsilon_0(\delta)$ соответствует максимальной плотности тока, который может быть пропущен через диод плоской геометрии в стационарном режиме при заданном внешнем напряжении. Эта предельная плотность тока, J_{SCL} , получила название порог Бурсиана [11]. При произвольном значении внешнего напряжения U эта величина равна

$$J_{\text{SCL}}(U) = 2\varepsilon_0 \left(\frac{2e}{m}\right)^{1/2} \delta_{\text{SCL}}^2(U) \frac{V_b^{3/2}}{d^2} \approx 1.048 \cdot 10^{-5} \delta_{\text{SCL}}^2(U) \frac{V_b^{3/2}}{d^2} \left[\frac{\text{A}}{\text{cm}^2}\right],$$

$$\delta_{\text{SCL}}(U) = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[1 + \left(1 + \frac{U}{V_b}\right)^{1/2}\right]^{3/2}. \quad (15)$$

Здесь ускоряющее напряжение $V_b = W_b/e$ и величина межэлектродного зазора d выражены соответственно в вольтах и сантиметрах. При $U = 0$ $\delta_{\text{SCL}} = 4/3$, и формула (15) переходит в известную формулу Бурсиана [3]. Отметим, что задача о вычислении предельных токов для различных пучковых конфигураций подробно рассмотрена в [31].

Следует обратить внимание на то, что в тот момент, когда плотность входящего тока достигает значения J_{SCL} , величина потенциала в минимуме (η_m) всегда больше $-1/2$, т.е. здесь не возникает отражения электронов. Например, в короткозамкнутом диоде $\eta_m = -0.375$. Таким образом, в диодах с моноэнергетическим потоком электронов, имеющим ненулевую начальную скорость, величина предельной плотности тока не связана с ограничением тока пространственным зарядом. Возникновение точки бифуркации SCL — это просто следствие нелинейности задачи [18]. Ошибочное мнение об ограничении предельного тока пространственным зарядом возникло, по-видимому, из аналогии с задачей, рассмотренной Ленгмюром [32], где с эмиттера электроны поступают с полумаксвелловской функцией распределения по скоростям, а не с δ -функцией с $v_0 > 0$, и при любой величине минимума потенциала ($\eta_m < 0$) часть электронов отражается обратно на эмиттер. Ситуации в задаче Ленгмюра скорее соответствует левая точка бифуркации на зависимости $\varepsilon_0(\delta)$ (рис. 2) — мы ее обозначаем ВФ, в которой действительно имеет место ограничение тока пространственным зарядом.

Легко показать, что монотонные РП также определяются по формуле (12), где знаки „-“ и „+“ отвечают случаю $\varepsilon_0 > 0$ и $\varepsilon_0 < 0$ соответственно.

В режиме с частичным отражением электронов ($0 < r < 1$), когда точка отражения находится внутри зазора ($\xi_r < \delta$), напряженность электрического поля у эмиттера связана с коэффициентом отражения по формуле

$$\varepsilon_0 = \sqrt{2(1+r)}. \quad (16)$$

Для того чтобы получить эту формулу, нужно один раз проинтегрировать уравнение (6) в эмиттерной области и

воспользоваться условием равенства нулю напряженности электрического поля в точке минимума потенциала.

В режиме с частичным отражением РП оказываются несимметричными относительно точки отражения — левее этой точки

$$\xi = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{1+r}} [1 - (1+2\eta)^{3/4}],$$

$$\eta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi}{\xi_r}\right)^{4/3}, \quad (17)$$

а правее нее

$$\xi = \xi_r + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{1-r}} (1+2\eta)^{3/4},$$

$$\eta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{2/3} \left(\frac{\xi}{\xi_r} - 1\right)^{4/3}. \quad (18)$$

Подставляя в (17) $\eta = -1/2$, легко получить координату точки отражения

$$\xi_r = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{1+r}}. \quad (19)$$

Используя граничное условие на коллекторе $\eta(\delta) = V$, из (18) и (19) можно получить алгебраическое уравнение для вычисления коэффициента отражения r . Запишем это уравнение с учетом соотношения $j = 1 - r$:

$$V = 2 \left(\frac{3}{4}\right)^{4/3} \left[\delta - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{2-j}\right)^{1/2}\right]^{4/3} j^{2/3} - \frac{1}{2}. \quad (20)$$

Формула (20) фактически представляет собой вольт-амперную характеристику диода [13]. С использованием (16) легко выразить j через ε_0 , и тогда по формуле (20) строится ветвь 3 зависимости $\varepsilon_0(\delta)$ (рис. 2).

И наконец, в режиме с полным отражением электронов ($r = 1$) после интегрирования уравнения (6) в эмиттерной области находим РП левее точки отражения:

$$\xi = \frac{1}{12} \varepsilon_0 (6 - \varepsilon_0^2) - \frac{1}{24} (4\sqrt{1+2\eta} + \varepsilon_0^2 - 4)^{3/2} + \frac{1}{8} (\varepsilon_0^2 - 4) (4\sqrt{1+2\eta} + \varepsilon_0^2 - 4)^{1/2}. \quad (21)$$

Правее точки отражения электронов нет, и потенциал изменяется линейно

$$\eta(\xi) = -1/2 - (\varepsilon_0^2 - 4)^{1/2} (\xi - \xi_r). \quad (22)$$

При этом положение точки отражения ξ_r , а также ε_0 однозначно определяются из (21) при $\eta = -1/2$ и граничного условия на коллекторе (7):

$$\xi_r = \frac{1}{12} \varepsilon_0 (6 - \varepsilon_0^2) + \frac{1}{12} (\varepsilon_0^2 - 4)^{3/2},$$

$$V = -\frac{1}{2} - (\varepsilon_0^2 - 4)^{1/2} (\delta - \xi_r). \quad (23)$$

Таким образом, для всех типов РП имеются аналитические формулы.

Отметим, что в работе [30] авторы строят РП только для случая, когда все эмитированные электроны достигают противоположного электрода — коллектора, т.е. для режима без отражения электронов. Для РП приведены аналитические выражения и построена зависимость плотности тока J_b от напряженности электрического поля у эмиттера E_0 для положительных потенциалов на коллекторе. Авторы обнаружили максимум на этой зависимости. На самом деле, как видно из эквивалентной зависимости $\varepsilon_0(\delta)$ (рис. 2), этот максимум соответствует давно известной точке SCL диода.

Для координат обеих точек бифуркации получены аналитические выражения при любых величинах внешнего напряжения. В точке SCL имеем [15,18] (см. формулы (П 2) Приложения)

$$\delta_{SCL}(V) = \frac{\sqrt{2}}{3} [1 + (1 + 2V)^{1/2}]^{3/2},$$

$$\varepsilon_0^{SCL}(V) = \sqrt{2} [1 + (1 + 2V)^{1/2}]^{-1/2}. \quad (24)$$

Для координат точки ВФ в случаях положительного и отрицательного потенциалов коллектора получаются разные формулы [20]. При $V \geq 0$ эта точка бифуркации лежит на границе режимов без отражения и с отражением электронов, и для ее координат имеем (формулы (П 3))

$$\delta_{BF}(V) = \frac{\sqrt{2}}{3} [1 + (1 + 2V)^{3/4}], \quad \varepsilon_0^{BF} = \sqrt{2}. \quad (25)$$

В случае $V < 0$ переход в режим с отражением электронов происходит не в точке ВФ, а в некоторой точке „0“ ветви 2 (кривая с $V < 0$ на рис. 2), т.е. часть этой ветви попадает в режим с отражением электронов. В этом случае в точке ВФ коэффициент отражения не равен нулю (формула (П 5)), и для ее координат имеем следующие выражения (формулы (П 6)):

$$\delta_{BF}(V) = \frac{1}{3} [1 + (1 + 2V)^{1/2}]^{3/2},$$

$$\varepsilon_0^{BF}(V) = 2 [1 + (1 + 2V)^{1/2}]^{-1/2},$$

$$j_{BF}(V) = 2(1 + 2V)^{1/2} [1 + (1 + 2V)^{1/2}]^{-1}. \quad (26)$$

В работе [13] проводилась классификация стационарных решений диода Бурсиана. Показано, что тип решения независимо от потенциала коллектора определяется параметрами ε_0 и δ . Все решения принадлежат к одному из четырех типов: решения без отражения электронов ($r = 0$), решения с частичным отражением 1-го и 2-го рода ($0 < r < 1$) и решения с полным отражением электронов ($r = 1$). У решений с частичным отражением 1-го рода минимум на РП лежит внутри зазора, а у 2-го рода — на коллекторе. На рис. 3 сплошные линии разделяют области решений различного типа на плоскости $\{\varepsilon_0, \delta\}$. Решения с частичным отражением электронов лежат в полосе, ограниченной

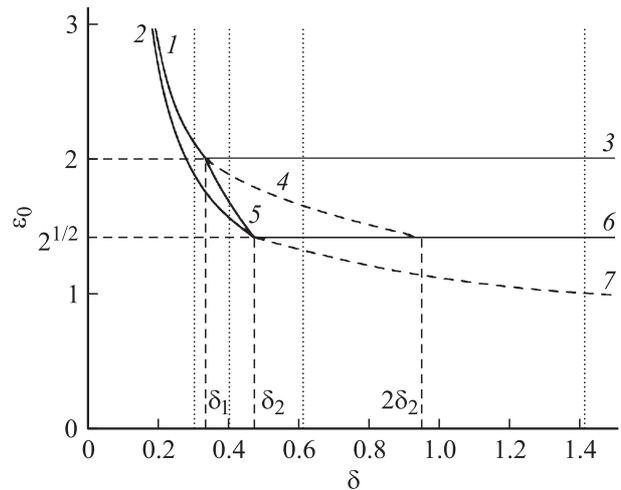


Рис. 3. Области существования решений различного типа на плоскости $\{\varepsilon_0, \delta\}$; $\delta_1 = 1/3$, $\delta_2 = \sqrt{2}/3$ [13].

сверху линиями 1 и 3, а снизу — линиями 2 и 6. Ниже этой полосы реализуются состояния без отражения, выше — с полным отражением. Внутри полосы правее линии 5 лежат решения с частичным отражением 1-го, а левее — 2-го рода. Уравнения линий 1–6 приведены в Приложении. Таким образом, каждой точке плоскости $\{\varepsilon_0, \delta\}$ соответствует один из четырех типов стационарных решений.

2. Влияние энергетической неоднородности пучка на стационарные решения

Вопрос о влиянии теплового разброса по скоростям у эмитированных электронов на характеристики стационарных решений изучался в ряде работ [14,16,20,33]. В [14,16,20] ФР электронов на эмиттере рассматривалась в виде „воротиков“:

$$f_0^+(u_0) = (2\Delta)^{-1} \Theta [\Delta^2 - (1 - u_0)^2] \quad (27)$$

с $\Delta = \Delta v / v_0 \ll 1$. В [33] f_0^+ выбиралась в виде сдвинутой максвелловской функции с температурой T , много меньшей кинетической энергии пучка: $q = kT / mv_0^2 \ll 1$.

С ФР электронов на эмиттере (27) в [14,20] получено аналитическое выражение для концентрации электронов для РП любого типа. Следует отметить, что в отличие от случая моноэнергетической ФР теперь высота ВК отличается от $-1/2$. Найдены аналитические выражения для координат точек бифуркации SCL и ВФ. Оказалось, что с ростом Δ точка SCL смещается влево довольно слабо — на величину порядка Δ^2 . В случае ФР, рассмотренной в [33], сдвиг положения точки SCL получается таким же, если выбрать $q = \Delta^2/3$. Таким образом, как и следовало ожидать, при малом тепловом разбросе результаты не должны существенно зависеть от вида ФР внутри области, соответствующей разбросу по скоростям.

Что касается точки ВФ, то она смещается вправо и довольно сильно — на величину порядка $\Delta^{1/2}$. Таким образом, тепловой разброс по скоростям приводит к сужению области гистерезиса. При $\Delta \sim 0.1$ область гистерезиса исчезает. Поэтому для того, чтобы можно было использовать явление гистерезиса для технических приложений, необходимо создавать пучки с малой размазкой по скоростям.

Следует отметить, что в [16] анализировалось явление гистерезиса на зависимости проходящего через диод тока от внешнего напряжения. Авторы изучали численно влияние разброса электронов по скоростям на эту зависимость. Показано, что с увеличением разброса область гистерезиса сужается, и, в конце концов, исчезает.

3. Об устойчивости стационарных решений

После того, как решения построены, необходимо определить, какие из них являются устойчивыми относительно малых возмущений. Такие исследования для монокинетической ФР для режима без отражения электронов проводились в [8,10,13,18]. Этим решениям соответствуют ветвь 1, а также вся ветвь 2 при $V \geq 0$ (кривые I и III на рис. 2) либо только ее участок (0, SCL) в случае $V < 0$ (кривая II на рис. 2).

Для изучения устойчивости решений без отражения электронов в [18] использовалось дисперсионное уравнение, выведенное в [15] с использованием лагранжева формализма:

$$Z(\delta, \omega) = -\omega^{-4}[(2 - i\omega T) \exp(i\omega T) - i\omega^3 \delta - i\omega T - 2] = 0. \quad (28)$$

Время пролета электронов через зазор T связано с δ и ε_0 по формуле $\delta = T^3/6 - (\varepsilon_0/2)T^2 + T$ [13]. На рис. 4 в качестве примера показаны собственные значения $\omega(\delta, V) = \Omega(\delta, V) + i\Gamma(\delta, V)$ ряда мод для случая $V = 0$. Сплошные линии соответствуют ветви 1, а штриховые — ветви 2. Видно, что решения, соответствующие ветви 1, являются устойчивыми, а ветви 2 — неустойчивыми. Отметим, что при каждом фиксированном значении параметров δ и V существует счетное число собственных мод, причем главной модой (той, которая имеет наибольший инкремент) является аперриодическая мода.

Используя уравнение (28), можно получить уравнение для границы аперриодической устойчивости на плоскости $\{\varepsilon_0, \delta\}$. Соответствующие выкладки даны в Приложении. Оказывается, правая точка бифуркации SCL лежит как раз на границе аперриодической устойчивости (рис. 2). На рис. 3 граница устойчивости для решений без отражения электронов изображена штриховой линией 7. Ее уравнение дается формулой (П16). Ниже этой линии лежат устойчивые решения, а выше — неустойчивые.

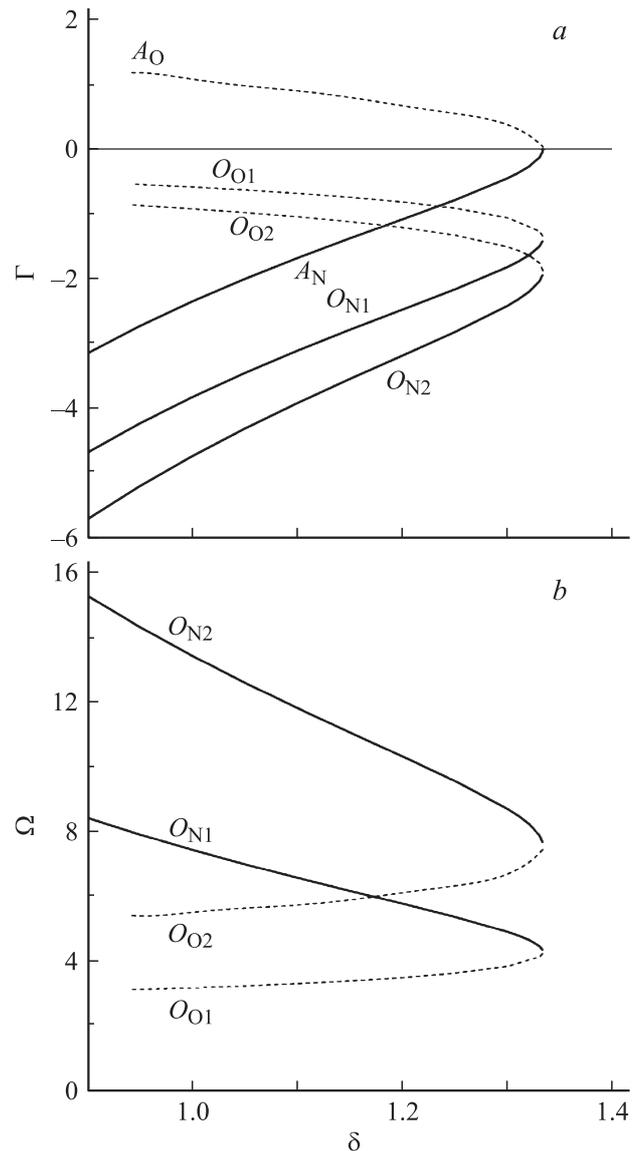


Рис. 4. Дисперсионные кривые диода Бурсиана с $V = 0$ для ветвей 1 и 2. А — аперриодические, О — колебательные ветви [18].

Исследование устойчивости решений в режиме с отражением электронов представляет собой значительно более сложную задачу. Вопрос об устойчивости таких решений относительно аперриодических возмущений можно решить аналитически с помощью аппарата η, ε -диаграмм [34]. Данный аппарат был разработан для изучения устойчивости решений в кнудсеновском диоде с поверхностной ионизацией. При этом рассматривалась стационарная система уравнений Власова с заданными на электродах значениями потенциала и ФР электронов; распределение ионов в межэлектродном промежутке считалось фиксированным. При построении η, ε -диаграммы решается набор задач Коши для данной системы уравнений с варьированием напряженности электрического поля на эмиттере. При этом каждый раз

находится концентрация электронов как функция РП и подставляется в уравнение Пуассона. После решения полученного нелинейного дифференциального уравнения рассчитывается РП, находится значение потенциала в точке, где расположен коллектор и строится зависимость этого потенциала от напряженности поля на эмиттере. Как правило, получается немонотонная зависимость. Точки ее пересечения с прямой, соответствующей граничному условию на коллекторе, дают все решения нелинейной краевой задачи. Решение, которому соответствует положительный наклон диаграммы, является неустойчивым относительно малых электронных возмущений, а отрицательный — устойчивыми. При этом η , ε -диаграмма определяет аperiodическую устойчивость.

С привлечением аппарата η , ε -диаграмм в [13] проанализирована устойчивость решений на ветви 2. Показано, что для решений как без, так и с отражением электронов наклон η , ε -диаграммы положителен, т. е. все решения на этой ветви неустойчивы.

В [13] с использованием метода η , ε -диаграмм показано, что решения, лежащие на ветви 3, являются устойчивыми относительно малых аperiodических возмущений. На рис. 3 граница аperiodической устойчивости для решений с частичным отражением электронов изображена штриховой линией 4. Ее уравнение дается формулой (П17). Эта линия как раз отделяет ветвь 2 от ветви 3, т. е. на ней лежат точки ВФ. Ниже этой линии лежат неустойчивые решения, а выше — аperiodически устойчивые. Однако некоторые из аperiodически устойчивых решений могут оказаться неустойчивыми относительно малых колебательных возмущений. Эту проблему можно было бы решить с использованием дисперсионного уравнения, но такое уравнение для случая с отражением электронов до сих пор не получено. Долгое время ошибочно считалось, что все решения на ветви 3 колебательно неустойчивы. Это мнение сложилось еще в 60-е годы после появления работы [35], где в расчетах с использованием РИС-кода для параметров, соответствующих ветви 3, вместо стационарных были получены нестационарные решения колебательного характера.

Для изучения нестационарных процессов в плазменных диодах разработан новый численный код (см., например, [26,27]). В литературе он получил название E , K -код. С его использованием в [20] численно изучался процесс развития колебательной неустойчивости. ФР электронов на эмиттере выбиралась в виде (27) с $\Delta \ll 1$. Было показано, что существует порог по величине межэлектродного зазора δ_l , ниже которого все решения на ветви 3 устойчивы относительно малых возмущений. Это демонстрирует рис. 5, взятый из [20]. С уменьшением величины размазки по скоростям электронов величина порога δ_l уменьшается, но в пределе $\Delta \rightarrow 0$ остается большей, чем $\delta_{ВФ}$.

При $\delta > \delta_l$ развивается колебательная неустойчивость. Как показывает рис.5,а, с увеличением δ за

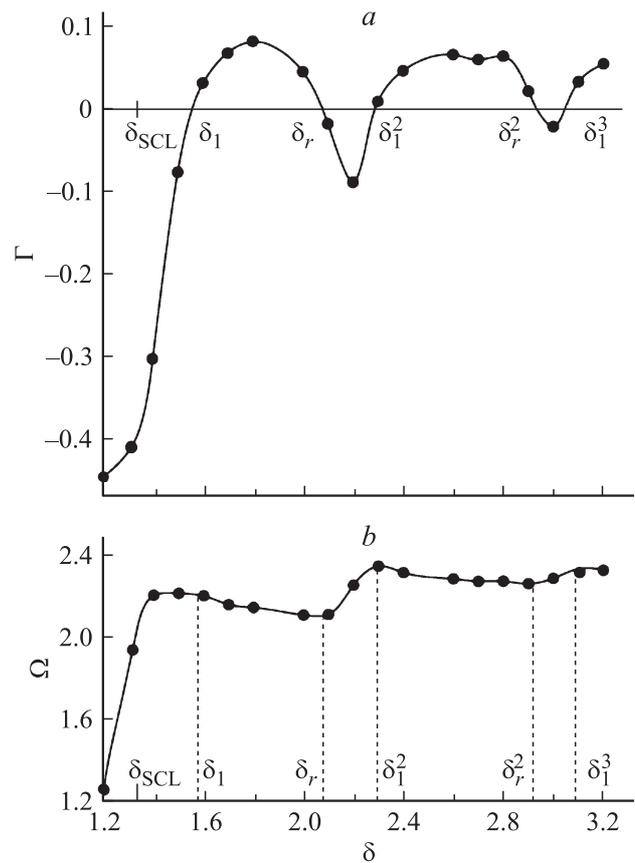


Рис. 5. Зависимости инкремента (а) и частоты (б) от величины межэлектродного зазора для ветви 3; $V = 0$, величина размазки функции распределения электронов на эмиттере по скоростям $\Delta = 0.02$. Вертикальные штриховые линии отмечают границы зон устойчивости [20].

областью неустойчивых решений (δ_l, δ_r) следует область (δ_r, δ_l^2), где решения являются устойчивыми, затем снова идет область неустойчивости (δ_l^2, δ_r^2), за ней — опять область устойчивости (δ_r^2, δ_l^3) и т.д. Таким образом, в диоде Бурсиана могут реализоваться стационарные состояния с частичным отражением электронов от ВК.

Заключение

Проведенное рассмотрение дает полную картину стационарных решений для вакуумного диода плоской геометрии с пучком электронов. Как правило, это распределения потенциала с одним минимумом. При фиксированном внешнем напряжении каждому решению соответствует определенная точка на зависимости $\varepsilon_0(\delta)$ на плоскости $\{\varepsilon_0, \delta\}$. Эта кривая имеет две точки бифуркации: левую ВФ и правую SCL. При этом точка SCL соответствует максимальной плотности тока, который может быть пропущен через диод в стационарном режиме. Для всех стационарных решений и обоих

точек бифуркации имеются аналитические формулы для произвольной величины внешнего напряжения.

Решения, соответствующие ветви 1, всегда являются устойчивыми, а ветви 2 — аperiodически неустойчивыми. На ветви 3, где лежат решения с отражением электронов от ВК, области устойчивых и неустойчивых решений чередуются с изменением плотности тока пучка. Здесь соответствующий устойчивым решениям ток, проходящий через диод, всегда меньше входящего тока.

Наличие двух устойчивых состояний с сильно различающимися уровнями тока позволило предложить использовать диод Бурсиана для создания миниатюрных сверхбыстрых электронных ключей, в которых переходы между сильно- и слаботочной ветвями организуются путем подачи коротких импульсов внешнего напряжения [27,28]. В таких устройствах время переключения оказывается исключительно малым — порядка времени свободного пробега электронов между электродами. Например, при плотности тока в 10 A/cm^2 и ускоряющем напряжении 5 V пороговая величина межэлектродного зазора составляет около $35 \mu\text{m}$, а время переключения — примерно 50 ps , что значительно превосходит возможности полупроводниковых ключей, где электроны движутся в веществе, испытывая столкновения. Кроме того, электронные ключи на основе диода Бурсиана являются радиационно- и температуростойкими.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 10-08-00924 и 12-08-00490).

Приложение

1. Координаты характерных точек на зависимости $\varepsilon_0(\delta, V)$

Рассматриваются точки бифуркации SCL и BF, а также точка минимума на зависимости $\varepsilon_0(\delta, V)$, возникающая при $V < 0$ (рис. 2). Все эти точки существуют только в случае положительной напряженности электрического поля у эмиттера.

Точка SCL. Это правая точка бифуркации. Она соответствует режиму без отражения электронов. Здесь РП имеют минимум, и связь ε_0 с δ дается формулой (14). Из рис. 2 видно, что в точке SCL производная $\partial\delta/\partial\varepsilon_0$ обращается в нуль. Беря эту производную и вводя обозначение $X = (2\sqrt{1+2V} - 2 + \varepsilon_0^2)^{1/2}$, получаем квадратное уравнение

$$X^2 - 2(1 - \varepsilon_0^2)\varepsilon_0^{-1}X - (2 - \varepsilon_0^2) = 0. \quad (\text{П } 1)$$

Его решение: $X = (2 - \varepsilon_0^2)/\varepsilon_0$. Подставив найденное значение X в определение этой величины и решив полученное уравнение, определяем $\varepsilon_{0,\text{SCL}}$, а из (14) δ_{SCL} . Таким образом, для координат точки SCL получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0,\text{SCL}}(V) &= \sqrt{2} \left(1 + \sqrt{1+2V}\right)^{-1/2}, \\ \delta_{\text{SCL}}(V) &= (\sqrt{2}/3) \left[1 + (1+2V)^{1/2}\right]^{3/2}. \end{aligned} \quad (\text{П } 2)$$

Точка BF. Это левая точка бифуркации. В случае $V \geq 0$ она оказывается на границе РП, соответствующих режимам без отражения и с отражением электронов. Здесь $\eta_m = -1/2$ и $r = 0$. Из (16) следует, что $\varepsilon_0(V) \equiv \sqrt{2}$. Подставляя граничное условие на коллекторе $\eta(\delta) = V$ в (18) и учитывая (19), получаем

$$\varepsilon_{0,\text{BF}}(V) = \sqrt{2}, \quad \delta_{\text{BF}}(V) = \left(\sqrt{2}/3\right) \left[1 + (1+2V)^{3/4}\right]. \quad (\text{П } 3)$$

В случае $V < 0$ переход в режим с отражением электронов происходит не в точке бифуркации, а в некоторой точке „0“ ветви 2 (см. кривую II на рис. 2). Для ее координат получаются формулы, аналогичные (П 3). Точка BF лежит левее точки 0 и соответствует режиму с отражением электронов. Для определения ее координат нужно воспользоваться формулой (18) с $\xi = \delta$, $\eta = V$:

$$\delta = (\sqrt{2}/3) \left[(1+r)^{-1/2} + (1-r)^{-1/2} (1+2V)^{3/4}\right]. \quad (\text{П } 4)$$

В точке BF производная $\partial\delta/\partial\varepsilon_0 = 0$ или в силу связи (16), $\partial\delta/\partial r = 0$. Вычислив эту производную и решив полученное уравнение, находим, что

$$r_{\text{BF}}(V) = \frac{1 - \sqrt{1+2V}}{1 + \sqrt{1+2V}},$$

$$j_{\text{BF}}(V) = 1 - r_{\text{BF}}(V) = \frac{2\sqrt{1+2V}}{1 + \sqrt{1+2V}}. \quad (\text{П } 5)$$

Теперь для координат точки BF из (16) и (П 4) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0,\text{BF}}(V) &= 2 \left(1 + \sqrt{1+2V}\right)^{-1/2}, \\ \delta_{\text{BF}}(V) &= (1/3) \left(1 + \sqrt{1+2V}\right)^{3/2}. \end{aligned} \quad (\text{П } 6)$$

Точка минимума на зависимости $\varepsilon_0(\delta; V)$. Эта кривая имеет локальный минимум только при $V < 0$. Он соответствует правой границе монотонных РП в режиме без отражения электронов. Подставляя граничное условие на коллекторе $\eta(\delta) = V$ в (12), получаем

$$\begin{aligned} \delta &= \varepsilon_0(3 - \varepsilon_0^2)/3 - \left[(2\sqrt{1+2V} - 2 + \varepsilon_0^2)^{3/2} + 3(2 - \varepsilon_0^2)(2\sqrt{1+2V} - 2 + \varepsilon_0^2)^{1/2}\right]/6. \end{aligned} \quad (\text{П } 7)$$

Из рис. 2 (кривая II) видно, что в искомой точке производная $\partial\delta/\partial\varepsilon_0$ обращается в бесконечность. Этому условию соответствует $2\sqrt{1+2V} - 2 + \varepsilon_0^2 = 0$. Отсюда находим $\varepsilon_{0,\text{min}}$, а затем из (П 7) — δ_{min} :

$$\varepsilon_{0,\text{min}}(V) = \sqrt{2} \left(1 - \sqrt{1+2V}\right)^{1/2},$$

$$\delta_{\text{min}}(V) = \left(\sqrt{2}/3\right) \left(1 - \sqrt{1+2V}\right)^{1/2} \left(1 + 2\sqrt{1+2V}\right). \quad (\text{П } 8)$$

2. Уравнения граничных линий на рис. 3

Граничная линия 1 на рис. 3 разделяет области, соответствующие решениям с частичным отражением электронов 2-го рода и полным отражением. Понятно, что здесь потенциал коллектора $V = -1/2$. На этой линии $r = 1$ и напряженность электрического поля на коллекторе равна нулю. Из (21) при $\eta = -1/2$ получаем

$$\delta = [\varepsilon_0 (6 - \varepsilon_0^2) + (\varepsilon_0^2 - 4)^{3/2}] / 12. \quad (\text{П } 9)$$

Линия 1 расположена левее $\delta = \delta_1$.

Граничная линия 2 разделяет области решений без отражения электронов и с частичным отражением 1-го рода. Здесь потенциал коллектора $V = -1/2$. На этой линии $r = 0$, РП монотонны и, кроме того, напряженность электрического поля на коллекторе равна нулю. Из (12) при $\eta = -1/2$ получаем

$$\delta = [\varepsilon_0 (3 - \varepsilon_0^2) + (\varepsilon_0^2 - 2)^{3/2}] / 3. \quad (\text{П } 10)$$

Линия 2 расположена левее $\delta = \delta_2$.

Граничная линия 3 отделяет области решений с частичным отражением 1-го рода и полным отражением. Ее уравнение $\varepsilon_0 = 2$ при $\delta \geq \delta_1$.

Граничная линия 4 отделяет решения без отражения электронов от решений с частичным отражением 1-го рода. Ее уравнение $\varepsilon_0 = \sqrt{2}$ при $\delta \geq \delta_2$.

И наконец, граничная линия 5 разделяет области, соответствующие решениям с частичным отражением 1-го и 2-го рода. Здесь потенциал коллектора $V = -1/2$, а РП монотонны. Ее уравнение получается путем подстановки формулы (16) в (19):

$$\delta = 2/(3\varepsilon_0). \quad (\text{П } 11)$$

3. Границы аперидической устойчивости

Чтобы найти границу аперидической устойчивости на плоскости $\{\varepsilon_0, \delta\}$ для решений без отражения электронов, сначала обратимся к дисперсионному уравнению (28). Подставим в него $\omega = i\Gamma$ и устремим Γ к нулю. Это дает $\delta = T^3/6$. Далее нужно воспользоваться уравнениями, связывающими время пролета электрона через межэлектродный промежуток T с δ , V и ε_0 . В [13] получено уравнение для определения траектории электрона, движущегося по направлению к коллектору, справедливое как для режима без отражения, так и с отражением электронов: $d^3\xi/d\tau^3 = H(\xi, r)$; функция H определяется по формуле (4), а τ — время пролета электрона от эмиттера до рассматриваемой точки. Например, в случае без отражения электронов положение и скорость электрона определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \xi(\tau) &= (1/6)\tau^3 - (\varepsilon_0/2)\tau^2 + \tau, \\ u(\tau) &= (1/2)\tau^2 - \varepsilon_0\tau + 1. \end{aligned} \quad (\text{П } 12)$$

После подстановки граничных условий на коллекторе $\xi(T) = \delta$, $u(T) = \sqrt{1+2V}$ получаем

$$\delta = T^3/6 - (\varepsilon_0/2)T^2 + T, \quad \sqrt{1+2V} = T^2/2 - \varepsilon_0T + 1. \quad (\text{П } 13)$$

Поскольку на границе аперидической устойчивости $\delta = T^3/6$, из 1-го уравнения находим, что $T = 2/\varepsilon_0$. Затем из 2-го определяем ε_0 :

$$\varepsilon_0 = \sqrt{2} [1 + \sqrt{1+2V}]^{-1/2}. \quad (\text{П } 14)$$

Подставляя (П 14) в 1-е уравнение (П 13), находим δ :

$$\delta = (\sqrt{2}/3) [1 + \sqrt{1+2V}]^{3/2}. \quad (\text{П } 15)$$

Сравнивая (П 14) и (П 15) с (П 2), видим, что каждая точка, лежащая на границе аперидической устойчивости, есть точка SCL.

Исключая параметр V из уравнений (П 14) и (П 15), получаем явное выражение для границы аперидической устойчивости для решений без отражения электронов:

$$\varepsilon_0 = 2^{2/3}/(3\delta)^{1/3}. \quad (\text{П } 16)$$

На рис. 3 она изображена штриховой линией 7.

Уравнение границы аперидической устойчивости для решений с частичным отражением электронов 1-го рода получено в [13] с использованием метода η, ε -диаграмм [34]. На этой линии производная $\partial\eta(\delta)/\partial\varepsilon_0$ изменяет знак, что эквивалентно условию смены знака у производной $\partial\delta/\partial\varepsilon_0$ ((18) с $\eta = \eta(\delta)$, $\xi = \delta$ и (19)). Из рис. 2 видно, что в режиме с частичным отражением смена знака этой производной происходит в точке ВФ. При $V \leq 0$ здесь $\partial\delta/\partial\varepsilon_0 = 0$. Решение этого уравнения дается формулами (П 6). Исключая из них параметр V , для границы аперидической устойчивости получаем

$$\varepsilon_0 = 2/(3\delta)^{1/3}. \quad (\text{П } 17)$$

На рис. 3 она изображена штриховой линией 4.

Список литературы

- [1] Child C.D. // Phys. Rev. Ser. I. 1911. Vol. 32. N 5. P. 492–511.
- [2] Langmuir I. // Phys. Rev. 1913. Vol. 2. N 6. P. 450–486.
- [3] Бурсиан В.Р., Павлов В.И. // Журн. рус. физ.-хим. общ.-ва. 1923. Т. 55. Вып. 1–3. С. 71–80.
- [4] Gill E.W.B. // Philos. Mag. 1925. S. 6. Vol. 49. P. 993–1005.
- [5] Plato G., Kleen W., Rothe H. // Z. Phys. 1936. Vol. 101. N 7–8. P. 509–520.
- [6] Лукошков В.С. // ЖТФ. 1936. Т. 4. Вып. 4. С. 624–643.
- [7] Fay C.E., Samuel A.L., Shockley W. // Bell Syst. Tech. J. 1938. Vol. 17. N 1. P. 49–79.
- [8] Lotax R.J. // Proc. IEE. C. 1961. Vol. 108. N 13. P. 119–121.
- [9] Смирнов В.М. // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. Вып. 3. С. 1005–1012.
- [10] Пащенко А.В., Руткевич В.Н. // ФП. 1977. Т. 3. Вып. 4. С. 774–779.
- [11] Незлин М.В. Динамика пучков в плазме. М.: Энергоиздат, 1982. 263 с.
- [12] Farouki R.T., Dalvie M., Pavarino L.F. // J. Appl. Phys. 1990. Vol. 68. N 12. P. 6106–6116.
- [13] Кузнецов В.И., Соловьев А.В., Эндер А.Я. // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 12. С. 9–24.

- [14] *Алешин И.М., Кузьменков Л.С.* // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1994. Т. 35. N 2. С. 46–50.
- [15] *Kolinsky H., Schamel H.* // J. Plasma Physics. 1997. Vol. 57. N 1. Pt 2. P. 403–423.
- [16] *Garstein Yu.N., Ramesh P.S.* // J. Appl. Phys. 1998. Vol. 83. N 6. P. 2958–2964.
- [17] *Ender A.Ya., Kolinsky H., Kuznetsov V.I., Schamel H.* // Phys. Rep. 2000. Vol. 328. N 1. P. 1–72.
- [18] *Akimov P.V., Schamel H., Kolinsky H., Ender A.Ya., Kuznetsov V.I.* // Phys. Plasmas. 2001. Vol. 8. N 8. P. 3788–3798.
- [19] *Калинин Ю.А., Короновский А.А., Храмов А.Е.* и др. // ФП. 2005. Т. 31. № 11. С. 1009–1025.
- [20] *Кузнецов В.И., Эндер А.Я.* // ФП. 2010. Т. 36. Вып. 3. С. 248–257.
- [21] *Kirstein P.T., Kino G.S., Waters W.E.* Space-charge flow. NY: Mc Graw-Hill. 1967. 509 p.
- [22] *Дубинов А.Е., Селемир В.Д.* // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47. № 6. С. 645–672.
- [23] *Ottinger P.F., Goodrich P.J., Hinshelwood D.D.* et al. // Proc. of the IEEE. 1992. Vol. 80. N 6. P. 1010–1018.
- [24] *Driskill-Smith A.A.G., Hasko D.G., Ahmed H.* // Appl. Phys. Lett. 1999. Vol. 75. N 18. P. 2845–2847.
- [25] *Hernandes E.* // Cryst. Res. Technol. 1998. Vol. 33. N 2. P. 285–289.
- [26] *de Heer W.A., Martel R.* // Phys. World. 2000. Vol. 13. N 6. P. 49–53.
- [27] *Kuznetsov V.I., Ender A.Ya., Schamel H., Akimov P.V.* // Phys. Plasmas. 2004. Vol. 11. N 6. P. 3224–3233.
- [28] *Akimov P.V., Schamel H., Ender A.Ya., Kuznetsov V.I.* // J. Appl. Phys. 2003. Vol. 93. N 2. P. 1246–1256.
- [29] *Кузнецов В.И., Эндер А.Я.* // ФП. 2010. Т. 36. Вып. 3. С. 258–272.
- [30] *Келлин Н.С., Толмачев А.И.* // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 7. С. 86–89.
- [31] *Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* // УФН. 1971. Т. 103. Вып. 4. С. 609–640.
- [32] *Langmuir I.* // Phys. Rev. 1923. Vol. 21. N 4. P. 419–435.
- [33] *Coutsias E.A.* // J. Plasm. Phys. 1984. Vol. 31. N 2. P. 313–318.
- [34] *Кузнецов В.И., Эндер А.Я.* // ЖТФ. 1977. Т. 47. Вып. 11. С. 2237–2246.
- [35] *Bridges W.B., Birdsall C.K.* // J. Appl. Phys. 1963. Vol. 34. N 10. P. 2946–2955.
- [36] *Кузнецов В.И., Эндер А.Я.* // ЖТФ. 1983. Т. 53. Вып. 12. С. 2229–2238.