12

Обобщение уравнения огибающей квазистационарного релятивистского электронного пучка в случае развития резистивной шланговой неустойчивости

© Е.К. Колесников, А.С. Мануйлов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Математико-механический факультет,
Научно-исследовательский институт математики и механики им. В.И. Смирнова,
198504 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: man06@mail.ru

(Поступило в Редакцию 7 марта 2013 г.)

Рассмотрена задача о формулировке уравнения огибающей квазистационарного релятивистского электронного пучка, испытывающего резистивную шланговую неустойчивость. С помощью аналитических методов получено обобщение известного уравнения Нордсика на случай развития указанной неустойчивости.

В последнее время внимание исследователей привлекают вопросы динамики распространения релятивистских электронных пучков (РЭП) в плотных и разреженных газоплазменных средах [1–15]. Особое место в комплексе задач, связанных с изучением процессов, сопровождающих распространение РЭП в указанных средах, занимает исследование радиальной динамики пучков при учете различных факторов, таких как наличие многократного кулоновского рассеяния частиц пучка на атомах и молекулах фонового газа, наличие внешнего продольного магнитного поля, развитие резистивных пучково-плазменных неустойчивостей. В работах [6,7] было получено так называемое уравнение Нордсика, которое описывает радиальную эволюцию квазиравновесного РЭП (для которого выполнено условие равновесия Беннета) при наличии многократного кулоновского рассеяния частиц пучка.

В настоящей работе сформулировано обобщение уравнения Нордсика для РЭП, который испытывает поперечные колебания при развитии резистивной шланговой неустойчивости.

Предположим, что РЭП является квазистационарным, т.е. состояние пучка в произвольном сегменте S^τ в любой момент времени является близким к состоянию динамического равновесия. При этом должно приближенно выполняться условие, обобщающее известное условие равновесия Беннета [6,7,13–15]

$$E_\perp \approx \lambda_m T_B - \frac{\lambda_m T_B}{2}\left(k_S^*\right)^2 (Y^2 - D^2), \tag{1}$$

где T_B — эффективная температура Беннета, $T_B = |e|\beta I_b/(2c)$, $q = -e$ — заряд электрона, $\beta = v_z/c$ — отношение продольной компоненты скорости частиц пучка к скорости света c, $\lambda_m = 1 - \alpha_m$, α_m — коэффициент магнитной нейтрализации,

$$\left(k_S^*\right)^2 = \frac{4\pi^2 I_b}{I_A} \int\limits_0^\infty dr\, r \left(\frac{J_{bz0}(r)}{I_b}\right)^2 \tag{2}$$

— квадрат волнового числа шланговых колебаний, I_b — полный ток пучка, I_A — предельный ток Альфвена, $J_{bz0}(r)$ — радиальный профиль равновесной плотности тока РЭП, Y и D — соответственно амплитуды поперечного отклонения осей симметрии РЭП и коллективного магнитного поля при развитии РШН [9–11].

Рассмотрим уравнение энергии поперечного движения частиц пучка в фиксированном тонком сегменте РЭП [6,13–15]

$$\frac{dE_\perp}{dt} = -\frac{E_\perp}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt} - \tilde{\Lambda}_{\beta 0}\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{\tilde{\Lambda}_{\beta 0}}{\lambda_m T_B}\right) + \int d\mathbf{r}_\perp \chi_{b0}(\mathbf{r}_\perp, t) S, \tag{3}$$

где

$$E_\perp = \int \frac{\chi_{b0}\widetilde{p_\perp^2}}{2m\gamma}\, d\mathbf{r}_\perp \tag{4}$$

— средняя поперечная кинетическая энергия электрона пучка,

$$\widetilde{p_\perp^2} = \frac{1}{\chi_{b0}} \int p_\perp^2 f_0^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)\, d\mathbf{p}_\perp,$$

$$\chi_{b0}(\mathbf{r}_\perp, t) = \int f_0^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)\, d\mathbf{p}_\perp. \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{p}_\perp$ — поперечная компонента импульса электрона пучка, $f_0^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)$ — функция распределения частиц пучка по поперечным координатам и импульсам в сегменте РЭП с временем инжекции τ при отсутствии поперечных колебаний пучка (равновесная функция распределения), m и γ — соответственно масса и лоренц-фактор частиц пучка,

$$\tilde{\Lambda}_{\beta 0} = \frac{|e|}{2}\beta \int \chi_{b0} A_{z0}\, d\mathbf{r}_\perp, \tag{6}$$

A_{z0} — z-компонента равновесного векторного потенциала коллективного электромагнитного поля системы плазма–пучок, S — средняя скорость закачки кинетической энергии частиц пучка из продольного движения в поперечное при наличии многократного кулоновского рассеяния электронов пучка на частицах фоновой газоплазменной среды.

Условие динамического равновесия (1) подставим в уравнение (3). Тогда получим

$$\frac{d(\lambda_m T_B)}{dt} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\lambda_m T_B}{2}\left(k_S^*\right)^2(Y^2 - D^2)\right] + \frac{d\tilde{\Lambda}_{\beta 0}}{dt} = \int \chi_{b0} S d\mathbf{r}_\perp - \frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\left[\lambda_m T_B - \frac{\lambda_m T_B}{2}\left(k_S^*\right)^2(Y^2 - D^2)\right] + \tilde{\Lambda}_{\beta 0}\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{\tilde{\Lambda}_{\beta 0}}{\lambda_m T_B}\right). \tag{7}$$

Далее рассмотрим следующую величину:

$$\Gamma = \frac{\tilde{\Lambda}_{\beta 0}}{\lambda_m T_B} - \ln\frac{\Re^2}{2R_c^2}, \tag{8}$$

где $\Re$ — удвоенный среднеквадратичный радиус пучка, который определяется как

$$\Re^2 = \int \chi_{b0}(\mathbf{r}_\perp, t) r_\perp^2 d\mathbf{r}_\perp, \tag{9}$$

где R_c — радиус экранировки электромагнитного поля.

Продифференцируем (8) по времени. Тогда имеем

$$\frac{1}{\Re^2}\frac{d\Re^2}{dt} + \frac{d\Gamma}{dt} = \frac{1}{\lambda_m T_B}\left(\frac{d\tilde{\Lambda}_{\beta 0}}{dt} - \frac{\tilde{\lambda}_{\beta 0}}{\lambda_m T_B}\frac{d(\lambda_m T_B)}{dt}\right). \tag{10}$$

Выражая величину, стоящую в скобках в правой части (10), из уравнения (7) и подставляя в (10), находим

$$\lambda_m T_B\left(\frac{1}{\Re^2}\frac{d\Re^2}{dt} + \frac{d\Gamma}{dt}\right) = -\frac{d(\lambda_m T_B)}{dt} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\lambda_m T_B}{2}\left(k_S^*\right)^2(Y^2 - D^2)\right] - \frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt} \times \left[\lambda_m T_B - \frac{\lambda_m T_B}{2}\left(k_S^*\right)^2(Y^2 - D^2)\right] + \int \chi_{b0} S d\mathbf{r}_\perp. \tag{11}$$

Разделив обе части (11) на $\lambda_m T_B$, после ряда простых преобразований получим обобщение уравнения Нордсика для квазистационарного РЭП при наличии многократного рассеяния на случай пучка, испытывающего поперечные колебания при развитии РШН РЭП

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\gamma\lambda_m T_B \Re^2\right)\right] = \frac{1}{\lambda_m T_B}\int \chi_{b0} S d\mathbf{r}_\perp - \frac{d\Gamma}{dt} + \frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\frac{\left(k_S^*\right)^2}{2}(Y^2 - D^2) + \frac{1}{\lambda_m T_B}\frac{d}{dt}\left[\frac{\lambda_m T_B}{2}\left(k_S^*\right)^2(Y^2 - D^2)\right]. \tag{12}$$

Далее предположим, что зависимость амплитуды Y шланговых колебаний РЭП по координате z в результате развития РШН имеет следующий вид:

$$Y_1(z_1) = (Y_0)_1 \exp(\alpha z_1)\cos(\beta z_1), \tag{13}$$

где $Y_1 = Y/R_b$, $(Y_0)_1 = Y_0/R_b$, $z_1 = z k_S^*$ (R_b — характерный радиус пучка, Y_0 — начальная амплитуда колебаний), α и β известные параметры.

Поскольку зависимость амплитуды Y от z задана, то соответствующую зависимость амплитуды колебаний оси симметрии коллективного магнитного поля D можно найти из уравнения динамики РШН на линейной стадии развития неустойчивости [9,12]

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial z_1^2} = -Y_1 + D_1 - \alpha_{ph}\frac{\partial Y_1}{\partial z_1}, \tag{14}$$

где $D_1 = D/R_b$, α_{ph} — коэффициент фазового перемешивания (для беннетовского радиального профиля плотности тока пучка $\alpha_{ph} \approx 0.68$ [10]). Тогда нетрудно получить

$$D_1(z_1) = Y_1(z_1)\left[1 + \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta\,\mathrm{tg}(\beta z_1) - \alpha_{ph}\left(\alpha - \beta\,\mathrm{tg}(\beta z_1)\right)\right]. \tag{15}$$

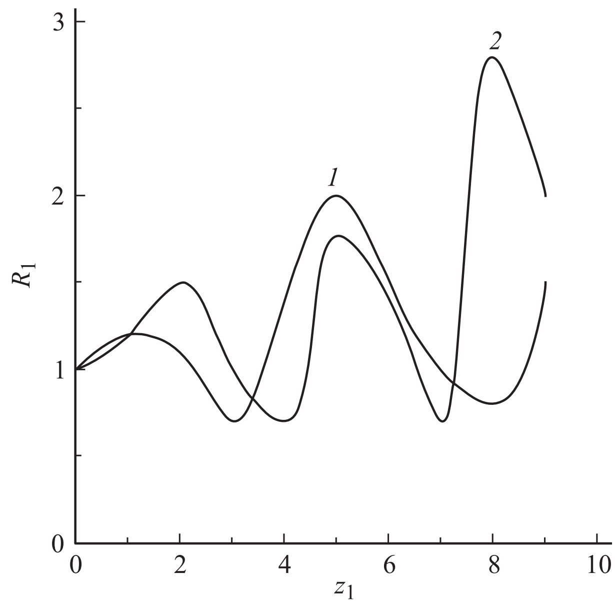
Кроме того, в простой ситуации, когда выполнены условия

$$S = 0, \quad \frac{d\gamma}{dt} = 0, \quad \frac{d(\lambda_m T_B)}{dt} = 0, \quad \frac{d\Gamma}{dt} = 0, \tag{16}$$

из (12) находим

$$\Re_1(z_1) = \sqrt{\exp\left[\left(k_S^*\right)^2 R_b^2\left(Y_1^2(z_1) - D_1^2(z_1)\right)\right]}. \tag{17}$$

На рисунке представлена рассчитанная по формуле (17) зависимость $\Re_1$ от z_1 при разных значениях инкремента пространственного нарастания РШН α.



Зависимость $\Re_1$ от z_1. Кривая *1* соответствует $\alpha = 0.2$, *2* — 0.3.

При этом $\beta = 0.6$ и $Y_0/R_b = 0.1$. Из рис. 1 следует, что развитие рассматриваемой неустойчивости может существенно влиять на поперечную дисперсию квазистационарного РЭП.

Заключение

В настоящей работе с помощью аналитических методов получено обобщение уравнения огибающей квазистационарного релятивистского электронного пучка на случай развития резистивной шланговой неустойчивости. Показано, что наличие указанной неустойчивости может существенно влиять на пространственную эволюцию огибающей рассматриваемых пучков.

Работа выполнена в рамках Тематического плана фундаментальных НИР, выполняемых СПбГУ по заказу Министерства образования и науки Российской Федерации № 6.0.10.2010.

Список литературы

[1] *Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М.: Атомиздат, 1980. 167 с.
[2] *Диденко А.Н., Григорьев В.П., Усов Ю.П.* Мощные электронные пучки и их применение. М.: Атомиздат, 1977. 277 с.
[3] *Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М.: Физматлит, 1990. 336 с.
[4] *Миллер Р.* Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1984. 432 с.
[5] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С., Филиппов Б.В.* Динамика пучков заряженных частиц в газоплазменных средах. СПб.: Изд-во. СПбГУ, 2002. 98 с.
[6] *Lee E.P.* // Phys. Fluids. 1976. Vol. 19. N 1. P. 60–69.
[7] *Lee E.P., Cooper R.K.* // Part. Accelerators. 1976. Vol. 7. P. 83–95.
[8] *Briggs R.J., Hester R.E., Lauer E.J.* et al. // Phys. Fluids. 1976. Vol. 19. N 7. P. 1007–1011.
[9] *Lee E.P.* // Phys. Fluids. 1978. Vol. 21. N 8. P. 1327–1343.
[10] *Lampe M., Sharp W.M., Hubbard R.F.* et al. // Phys. Fluids. 1984. Vol. 27. N 12. P. 2921–2936.
[11] *Надеждин Е.Р., Сорокин Г.А.* // Физика плазмы. 1983. Т. 9. № 5. С. 989–991.
[12] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 3. С. 40–44.
[13] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 9. С. 103–107.
[14] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 8. С. 109–113.
[15] *Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2005. Т.75. Вып. 4. С. 103–108.