Журнал технической физики, 2013, том 83, вып. 11

12

Уравнение Нордсика для квазистационарного релятивистского электронного пучка, распространяющегося в плотной и разреженной газоплазменной среде продольно внешнему магнитному полю

© Е.К. Колесников, А.С. Мануйлов

Санкт-Петербургский государственный университет, Математико-механический факультет,
Научно-исследовательский институт математики и механики им. В.И. Смирнова,
198504 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: man06@mail.ru

(Поступило в Редакцию 7 марта 2013 г.)

Получено уравнение огибающей квазиравновесного релятивистского электронного пучка, распространяющегося в газоплазменной среде, которое обобщает известное уравнение Нордсика на случай наличия внешнего продольного магнитного поля в ситуации транспортировки как в омической плазме, так и в режиме ионной фокусировки. Определена формула для среднеквадратичного радиуса пучка, распространяющегося в стадии сильного расширения при наличии компенсирующего ионного фона, многократного рассеяния и продольного внешнего магнитного поля.

Введение

Новые области применения релятивистских электронных пучков (РЭП) делают актуальным дальнейшее исследование динамики транспортировки РЭП в плотных и разреженны газоплазменных средах [1–20]. Особый интерес в комплексе проблем, связанных с транспортировкой указанных пучков, представляет изучение их поперечной динамики при наличии внешних электромагнитных полей.

В работах [6,7] был развит подход, основанный на использовании уравнения огибающей пучка, которое позволяет сравнительно просто формулировать основные качественные и количественные особенности поперечной динамики азимутально-симметричных РЭП в газоплазменных средах. Однако применение указанного метода к решению конкретных задач создает необходимость в определенных предположениях о характере радиального профиля плотности тока пучка.

В работе [6] в рамках кинетической теории динамики РЭП, распространяющегося в плотной газоплазменной среде, было сформулировано уравнение поперечной динамики пучка в квазистационарном режиме, которое известно как уравнение Нордсика [6,8]. В настоящей работе получено обобщение указанного уравнения на случай распространения РЭП продольно внешнему однородному магнитному полю в рамках двух ситуаций: во-первых, когда пучок распространяется на фоне омической плазмы и, во-вторых, когда транспортировка осуществляется при наличии разреженной плазмы и компенсирующего ионного фона (режим ионной фокусировки (ИФ)) [7].

Постановка задачи

Рассмотрим моноскоростной азимутально-симметричный параксиальный РЭП, распространяющийся вдоль оси z цилиндрической системы координат (r, θ, z) в рассеивающей газоплазменной среде, которая может быть омической плазмой либо разреженным газом при наличии предварительно созданного плазменного канала. Предполагается, что внешнее квазистациораное однородное магнитное поле с индукцией B_0 направлено также вдоль оси z. В случае, когда фоновой средой является разреженный газ, предполагается, что при входе пучка в плазменный канал радиальная компонента его головной части выталкивает электроны плазмы из канала и основная часть РЭП распространяется на фоне ионного „остова" (ионного канала). Предположим, что длительность импульса пучка существенно меньше характерного времени движения ионов в коллективном электромагнитном поле системы плазма–пучок. В этом случае канальные ионы можно считать неподвижными, что определяет реализацию режима ИФ [5,7]. Кроме того, в ситуации, когда фоновой средой является омическая плазма, предполагается, что имеет место частичная зарядовая и магнитная (токовая) нейтрализация с соответствующими коэффициентами α_c и α_m. В ситуации режима ИФ рассматривается ионный компенсирующий фон с объемной концентрацией n_i. При этом случай $\alpha_c^2 + \alpha_m^2 \neq 0$ и $n_i = 0$ соответствует транспортировке пучка в режиме зарядовой или магнитной компенсации, а случай $n_i \neq 0$, $\alpha_c = \alpha_m = 0$ — транспотривровке РЭП в режиме ИФ.

Обобщая кинетическую теорию работы [6] для параксиальных моноэнергетических азимутально-симметричных пучков на случай транспортировки вдоль внешнего магнитного поля и наличия дополнительного компенсирующего ионного фона, можно получить уравнение огибающей РЭП в следующем виде [14]:

$$\gamma^2\Re^3\frac{d^2\Re}{dt^2} + \gamma\,\frac{d\gamma}{dt}\Re^3\frac{d\Re}{dt} + \frac{4\gamma\Re^2}{m} \times\left(\psi T_B + e^2\left\langle N_i(\mathbf{r}_\perp, t)\right\rangle_b\right) + \gamma^2\Re^4\frac{\Omega_b^2}{4} = 4\left(E^2 + \frac{\tilde{P}_\theta^2}{m^2}\right), \quad (1)$$

где t — время,

$$\Re^2 = 2\int \chi_b(\mathbf{r}_\perp, t) r^2 d\mathbf{r}_\perp \tag{2}$$

— удвоенный среднеквадратичный радиус пучка,

$$\chi_b(\mathbf{r}_\perp, t) = \int f_b(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t) d\mathbf{p}_\perp \tag{3}$$

— нормированная на единицу функция, характеризующая радиальную зависимость плотности тока РЭП, $f_b(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)$ — функция распределения частиц по поперечным координатам $\mathbf{r}_\perp$ и импульсам $\mathbf{p}_\perp$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ — лоренц-фактор частиц пучка, $\beta = v_z/c$, v_z — продольная компонента скорости частиц РЭП, c — скорость света, $\psi = (1-\alpha_m) - (1-\alpha_c)/\beta^2$, $T_B = e^2\beta^2 N_b/2$ — эффективная температура Беннета, e — заряд электрона, m — его масса, N_b — погонная концентрация электронного пучка,

$$\langle N_i(\mathbf{r}_\perp, t)\rangle_b = \int \chi_b(\mathbf{r}_\perp, t) N_i(\mathbf{r}_\perp, t) d\mathbf{r}_\perp. \tag{4}$$

Здесь $N_i(\mathbf{r}_\perp, t)$ — линейная концентрация ионов компенсирующего фона в трубке радиуса $r = |\mathbf{r}_\perp|$, Ω_b — циклотронная частота частиц пучка во внешнем продольном магнитном поле, E^2 — среднеквадратичный эмиттанс пучка, $\tilde{P}_\theta$ — средний обобщенный угловой момент частиц рассматриваемого сегмента пучка, который задается как

$$\tilde{P}_\theta = L + \frac{m\gamma\Omega_b}{4}\Re^2, \tag{5}$$

$$L = \int d\mathbf{r}_\perp \chi_b(\mathbf{r}_\perp, t) r p_\theta \tag{6}$$

— средний угловой момент частиц сегмента РЭП, p_θ — азимутальная компонента импульса частицы пучка.

В работе [14] было показано, что в рассматриваемой ситуации эмиттанс может быть представлен в виде, обобщающем известный результат работы [6] на случай наличия компенсирующего ионного фона,

$$E^2 = E_0^2 + \int_\tau^t dt' \frac{\gamma\Re^2}{m}\left[-\psi T_B \frac{d\Gamma}{dt'} - \int e\Phi_0 \frac{\partial\chi_b}{\partial t'} d\mathbf{r}_\perp + e^2\langle N_i(\mathbf{r}_\perp, t)\rangle_b \frac{d}{dt'} \ln\left(\frac{\Re}{R_c}\right)^2 + \int \chi_b S d\mathbf{r}_\perp\right]. \tag{7}$$

Здесь τ — время инжекции рассматриваемого сегмента пучка, E_0 — начальный среднеквадратичный эмиттанс пучка,

$$\Gamma = \frac{\Lambda_b}{\psi T_B} - \ln\left(\frac{\Re}{R_c}\right)^2, \tag{8}$$

$$\Lambda_b = -\frac{e\beta\mu}{2}\int d\mathbf{r}_\perp \chi_b(\mathbf{r}_\perp, t) A_z \tag{9}$$

— средняя потенциальная энергия частицы пучка в коллективном электромагнитном поле системы плазма–пучок, A_z — z-компонента векторного потенциала коллективного поля, $\mu = \psi/(1-\alpha_m)$, Φ_0 — электростатический потенциал, созданный ионным „остовом“ в режиме ИФ, R_c — радиус экранировки самосогласованного электромагнитного поля, S — средняя скорость закачки энергии из продольного движения в поперечное в результате многократного кулоновского рассеяния частиц пучка на частицах фонового газа.

Предположим, что состояние пучка в произвольном поперечном сегменте S^τ в любой момент времени является близким к состоянию динамического равновесия, т. е. приближенно выполняется условие

$$E_\perp \simeq \psi T_B + e^2\langle N_i(\mathbf{r}_\perp, t)\rangle - \frac{\Omega_b L}{2}. \tag{10}$$

Здесь $E_\perp$ — средняя кинетическая энергия поперечного движения частиц сегмента пучка, которая определяется следующим образом:

$$E_\perp = \int d\mathbf{r}_\perp \chi_b(\mathbf{r}_\perp, t)\frac{p_\perp^2}{2m\gamma}. \tag{11}$$

Далее рассмотрим задачу о временной эволюции среднеквадратичного радиуса квазиравновесного пучка. При условии квазиравновесия (10) среднеквадратичный радиус пучка медленно меняется со временем, что позволяет пренебречь в (1) членами, содержащими производные $d^2\Re/dt^2$ и $d\Re/dt$. Продифференцируем полученное уравнение по времени, используя выражение (7) и условие, что средний обобщенный угловой момент частиц в сегменте пучка, задаваемый формулой (5), является интегралом движения. При этом будем иметь в виду, что в соответствии с результатами работы [12] в условиях близости к динамическому равновесию имеет место соотношение

$$\frac{d\Gamma}{dt} \approx \frac{\alpha_s}{2}\gamma\frac{\Re}{E}\frac{d^2\Re}{dt^2}, \tag{12}$$

где α_s — коэффициент, меняющийся в диапазоне [0,1] и зависящий от вида распределения и, следовательно, в уравнении, полученном в результате дифференцирования (1) по t, членом, содержащим $d\Gamma/dt$, в рассматриваемом приближении можно пренебречь.

С учетом вышеизложенного последнее уравнение принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\gamma\kappa T_B\Re^2\right)\right] + \frac{e^2\langle N_i(r)\rangle_b}{\kappa T_B}\frac{d}{dt}\ln\left(\gamma e^2\langle N_i(r)\rangle_b\right) + \frac{\Omega_b}{8\kappa T_B}\frac{d}{dt}\left(m\gamma\Omega_b\Re^2\right) = \frac{1}{\kappa T_B}\int d\mathbf{r}_\perp\left(\chi_b S - e\Phi_0\frac{\partial\chi_b}{dt}\right). \tag{13}$$

Уравнение (13) является обобщением известного уравнения Нордсика [4,6] на случай наличия внешнего магнитного поля и компенсирующего ионного фона. Действительно, в случае $B_0 = 0$, $T_B(t) = \text{const}$, $\psi(t) = \text{const}$, $S(\mathbf{r}_\perp) = \text{const}$, $\gamma(t) = \text{const}$, $n_i = 0$ (ионный компенсирующий фон отсутствует) из (13) непосредственно следует уравнение Нордсика [4,6]

$$\frac{\Re^2}{\Re_0^2} = \exp\left(\frac{St}{\psi T_B}\right). \tag{14}$$

Рассмотрим далее случай режима ИФ. Предположим, что фоновая газовая среда является однородной и энергетические потери электронов пучка в неупругих столкновениях с частицами фонового газа малы. Тогда

$$S = S_0 = \text{const}, \quad n_i = n_i^0 = \text{const}, \tag{15}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi T_B}{dt} = 0, \tag{16}$$

где n_i — объемная концентрация частиц ионного фона.

Кроме того, предположим, что средний обобщенный угловой момент рассматриваемого сегмента пучка удовлетворяет условию

$$\tilde{P}_\theta = \tilde{P}_\theta^0 = 0. \tag{17}$$

Тогда, полагая в уравнении (13) $\Phi_0 = \pi e n_i^0 r^2$ и $\langle N_i(r)\rangle_b = \frac{\pi}{2} n_i^0 \Re^2$, уравнение (13) после несложных преобразований запишем в виде

$$\frac{\psi T_B}{\Re^2}\frac{d\Re^2}{dt} + e^2 \pi n_i^{ef}\frac{d\Re^2}{dt} = S_0, \tag{18}$$

где

$$n_i^{ef} = n_i^0 + \frac{m\gamma\Omega_b^2}{8\pi e^2} \tag{19}$$

— эффективная плотность компенсирующего фона.

Как видно из (18), (19) в условиях близости к динамическому равновесию стабилизирующий эффект внешнего магнитного поля эквивалентен увеличению плотности компенсирующего ионного фона на величину $n_i' = m\gamma\Omega_b^2/(8\pi e^2)$.

Решение уравнения (18) стадии сильного расширения выходит на асимптотику

$$\Re(t) \approx \Re_a(t) = \sqrt{\frac{St}{e^2\pi\left(n_{i0} + m\gamma\Omega_b^2/(8\pi e^2)\right)}}, \tag{20}$$

откуда можно сделать вывод, что ионный фон и внешнее продольное магнитное поле, как и следовало ожидать, являются факторами, препятствующими поперечной дисперсии РЭП.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе на основе кинетического подхода сформулировано уравнение огибающей квазиравновесного релятивистского электронного пучка, распространяющегося в газоплазменной среде, которое обобщает известное уравнение Нордсика на случай наличия внешнего продольного магнитного поля в ситуации транспортировки как в омической плазме, так и в режиме ионной фокусировки. Сформулировано выражение для среднеквадратичного радиуса пучка, распространяющегося в режиме ионной фокусировки в стадии сильного расширения при наличии компенсирующего ионного фона, многократного рассеяния и продольного внешнего магнитного поля.

Работа выполнена в рамках Тематического плана фундаментальных НИР, выполянемых СПбГУ по заказу Министерства образования и науки Российской Федерации № 6.0.10.2010.

Список литературы

[1] *Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М.: Атомиздат, 1980. 167 с.
[2] *Диденко А.Н., Григорьев В.П., Усов Ю.П.* Мощные электронные пучки и их применение. М.: Атомиздат, 1977. 277 с.
[3] *Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М.: Физматлит, 1990. 336 с.
[4] *Миллер Р.* Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1984. 432 с.
[5] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С., Филиппов Б.В.* Динамика пучков заряженных частиц в газоплазменных средах. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2002. 98 с.
[6] *Lee E.P.* // Phys. Fluids. 1976. Vol. 19. N 1. P. 60–69.
[7] *Buchanan H.L.* // Phys. Fluids. 1987. Vol. 30. N 1. P. 221–231.
[8] *Lee E.P.* // Phys. Fluids. 1978. Vol. 21. N 8. P. 1327–1343.
[9] *Надеждин Е.Р., Сорокин Г.А.* // Физика плазмы. 1983. Т. 9. № 5. С. 989–991.
[10] *Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 1. С. 76–78.
[11] *Колесников Е.К., Курышев А.П., Филиппов Б.В.* // Вестник ЛГУ. Сер. 1. 1979. № 13. С. 84–86.
[12] *Lee E.P., Yu S.S., Barletta W.A.* // Nucl. Fusion. 1981. Vol. 21. N 8. P. 961–972.
[13] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 7. С. 119–125.
[14] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 8. С. 109–113.
[15] *Владыко В.Б., Рудяк Ю.В.* // Физика плазмы. 1993. Т. 19. Вып. 12. С. 1444–1453.
[16] *Виноградов С.В., Захарова С.С., Никулин М.Г.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 1. С. 165–173.
[17] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // РЭ. 1992. Т. 37. № 4. С. 694–699.
[18] *Зеленский А.Г., Колесников Е.К.* // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 5. С. 188–190.
[19] *Lauer E.J., Briggs R.J., Fessenden T.J.* et al. // Phys. Fluids. 1978. Vol. 21. N 8. P. 1344–1352.
[20] *Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 4. С. 103–108.