

03

О равновесных формах проводящей капли в однородном и неоднородных электростатических полях

© С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, А.А. Ширяев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 14 января 2013 г.)

В нелинейных асимптотических аналитических расчетах по величине безразмерной деформации формы и по отношению радиуса капли к расстоянию до точечного заряда (диполя) найдена равновесная форма капли в электростатическом поле точечного заряда и поле точечного диполя. Основной вклад в изменение равновесной формы сферической капли независимо от степени неоднородности поля оказывает вытянутая сфероидальная деформация, характерная для однородного поля. С увеличением степени неоднородности поля возрастают абсолютная величина и асимметричность равновесной формы капли по сравнению с сфероидальной, что при прочих равных условиях может сказаться на критических условиях реализации неустойчивости поверхности капли по отношению к индуцированному заряду. Сказанное означает, что при равном в среднем электростатическом давлении на поверхность капли первой претерпит неустойчивость капля, находящаяся в поле диполя.

Введение

В связи с дрящимися уже много лет [1–4] и непрекращающимися до сих пор [5–7] попытками экспериментальной проверки критерия Рэлея неустойчивости заряженной сферической капли [8] аналитический расчет равновесных форм капель во внешних полях произвольной природы весьма актуален. Во всех случаях справедливость критерия Рэлея была подтверждена. Причем наибольшая точность экспериментов была достигнута в [3], где критерий Рэлея был подтвержден с точностью до 4%, и в работе [6], где точность была около 5%. Эксперименты были проведены с каплями широкого диапазона размеров: сотни микрометров в работах [1,4,7], десятки микрометров в работах [2,3] и единицы микрометров в исследовании [5,6]. Столь значительные ошибки очень точных измерений побудили авторов [9] высказать предположение, что в экспериментах в системах удержания происходит искажение равновесной формы капли. Это делает актуальным расчет равновесных форм капель в силовых полях [10–12]. То, что форма падающей в неоднородном электрическом поле капли далека от сферической, подтверждается фотографиями, приведенными в экспериментальной работе [13].

1. Постановка задачи

Примем, что в вакууме сферическая незаряженная капля радиуса R идеальной, несжимаемой, проводящей жидкости, с коэффициентом поверхностного натяжения свободной поверхности σ и массовой плотностью ρ , находится в однородном электростатическом поле напряженностью E_0 . Рассмотрим задачу об определении равновесной формы поверхности капли. Будем пользоваться безразмерными переменными, в которых $R = \rho = \sigma = 1$.

Равновесную форму поверхности запишем в виде

$$F^{\text{un}}(r, \theta) \equiv r - r^{\text{un}}(\theta) = 0. \quad (1)$$

Верхний индекс „un“ (аббревиатура английского „uniform“) означает однородное поле, r и θ — координаты сферической системы координат, угол θ отсчитывается от направления напряженности E_0 . Функция $r^{\text{un}}(\theta)$ определяется из условия баланса давлений на поверхности капли

$$P^{\text{un}} - P_{\text{at}} + P_E^{\text{un}} = P_\sigma^{\text{un}}, \quad (2)$$

где индекс „at“ — аббревиатура с английского „atmospheric“, а гидродинамическое P^{un} , электростатическое P_E^{un} и давление капиллярных сил P_σ^{un} определяются следующими выражениями:

$$r = r^{\text{un}}(\theta) : \quad P^{\text{un}} = P_0^{\text{un}} = \text{const},$$

$$P_E^{\text{un}} = \frac{(\nabla\Phi^{\text{un}})^2}{8\pi}, \quad P_\sigma^{\text{un}} = \text{div}\mathbf{n}^{\text{un}}, \quad (3)$$

с учетом которых баланс давлений примет вид

$$P_0^{\text{un}} - P_{\text{at}} + \frac{(\nabla\Phi^{\text{un}})^2}{8\pi} = \text{div}\mathbf{n}^{\text{un}},$$

где \mathbf{n}^{un} — орт нормали к невозмущенной поверхности капли, определяемый выражением

$$\mathbf{n}^{\text{un}} = \frac{\nabla F^{\text{un}}}{|\nabla F^{\text{un}}|} = \left(\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [r^{\text{un}}(\theta)] \right) \times \left(1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r^{\text{un}}(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-1/2}. \quad (4)$$

Распределение электростатического поля вблизи поверхности капли определяется из краевой задачи для

электрического потенциала $\Phi^{\text{un}}(r)$

$$\Delta\Phi^{\text{un}} = 0,$$

$$r \rightarrow \infty: \Phi^{\text{un}} \rightarrow -E_0 r \cos \theta, \quad r = r^{\text{un}}(\theta): \Phi^{\text{un}} = \text{const.}$$

Решение должно удовлетворять дополнительным условиям: постоянства объема капли, неподвижности ее центра масс и равенства нулю полного заряда:

$$\iiint_V dV = \frac{4}{3} \pi;$$

$$\{V: 0 \leq r \leq r^{\text{un}}(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$\iiint_V \mathbf{r} dV = 0;$$

$$\{S: 0 \leq r \leq r^{\text{un}}(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$r = r^{\text{un}}(\theta): \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{4\pi} (\mathbf{n}^{\text{un}}, \nabla\Phi^{\text{un}}) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 0,$$

$$\{S: r = r^{\text{un}}(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}. \quad (5)$$

В сферических координатах аксиально симметричную форму поверхности капли запишем в виде разложения по полиномам Лежандра $P_n(\cos \theta)$ [14]:

$$r^{\text{un}}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\text{un}} P_n(\mu), \quad \mu \equiv \cos \theta. \quad (6)$$

Подставляя это разложение в условия постоянства объема капли и неподвижности ее центра масс, получим приближенные выражения для коэффициентов a_0^{un} и a_1^{un} соответственно

$$a_0^{\text{un}} = 1 + O\left(\left(\frac{a_n^{\text{un}}}{a_0^{\text{un}}}\right)^2\right) \simeq 1, \quad a_1^{\text{un}} = 0.$$

Здесь символ „O“ — символ порядка [15]. С учетом выражений для a_0^{un} и a_1^{un} разложение для формы поверхности $r^{\text{un}}(\theta)$ и выражение для вектора нормали \mathbf{n}^{un} в линейном по a_n^{un} приближении будут иметь вид

$$r^{\text{un}}(\theta) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^{\text{un}} P_n(\mu),$$

$$\mathbf{n}^{\text{un}} = \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{n=2}^{\infty} a_n^{\text{un}} P_n(\mu). \quad (7)$$

Решение уравнения Лапласа для внешней электростатической задачи в сферических координатах для осесимметричного случая записывается в виде

$$\Phi^{\text{un}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\text{un}} r^{-(n+1)} P_n(\mu). \quad (8)$$

Подставляя выражение для потенциала (8) и для равновесной формы капли (7) в условие эквипотенциальности ее поверхности, определим константы A_n^{un} , а из условия отсутствия на капле электрического заряда получим значение потенциала на поверхности капли, равное нулю. В итоге выражение для электрического потенциала Φ^{un} в окрестности капли примет вид

$$\Phi^{\text{un}} = E_0 \left(\frac{1}{r^2} - r \right) P_1(\mu).$$

Используя явный вид потенциала Φ^{un} , рассчитаем давление электрического поля на поверхность капли P_E^{un} в линейном по a_n^{un} приближении

$$P_E^{\text{un}} = \frac{3E_0^2}{8\pi} [1 + 2P_2(\mu)]. \quad (9)$$

Лапласовское давление с учетом вида формы равновесной поверхности (7) примет вид

$$P_\sigma^{\text{un}} = \left[2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^{\text{un}} (n-1)(n+2) P_n(\mu) \right]. \quad (10)$$

Подставим выражения (10), (3) и (9) в баланс давлений (2) и, пользуясь ортогональностью полиномов Лежандра, приравняем коэффициенты при полиномах одинакового порядка, в результате получим выражения для коэффициентов a_n^{un} и значение гидростатического давления в капле

$$P_0^{\text{un}} = P_{\text{at}} + 2 - 3W^{\text{un}}, \quad a_2^{\text{un}} = 3W^{\text{un}}, \quad a_n^{\text{un}} = 0, \quad (n \geq 3),$$

$$W^{\text{un}} \equiv \frac{E_0^2}{16\pi}.$$

Параметр W^{un} с точностью до множителя „одна треть“, пропорциональный амплитуде сфероидальной деформации, характеризует величину давления однородного электростатического поля на поверхности капли и имеет тот же порядок малости, что и вызываемое им искажение сферической капли, т.е. $W^{\text{un}} \propto O(a_n)$, и является малым параметром задачи. Выражение для формы равновесной поверхности капли принимает вид

$$r^{\text{un}}(\theta) = 1 + 3W^{\text{un}} P_2(\mu). \quad (11)$$

В линейном по величине деформации приближении (11) совпадает с поверхностью сфероида с квадратом эксцентриситета $e^2 = 9W^{\text{un}}$.

2. Равновесная форма капли в поле точечного заряда

Пусть имеется сферическая радиуса R незаряженная капля идеальной, несжимаемой, проводящей жидкости в вакууме, расположенная на расстоянии L от точечного заряда Q .

Рассмотрим только осесимметричные деформации капли, что существенно уменьшит громоздкость математических выкладок, но не отразится на общности рассуждений. Задачу будем решать в сферических координатах с началом в центре масс капли (ось, от которой отсчитывается угол θ , будем принимать проходящей через заряд и центр масс капли и направленной от заряда). Равновесная форма поверхности капли $F^p(r, \theta)$ и определяющий ее баланс давлений запишутся аналогично формулам (1) и (2) соответственно. Здесь и далее величины, относящиеся к задаче с точечным зарядом, будут отмечаться верхним индексом „p“ — от английского слова „point“.

Выражения для давления электрического поля P_E^p и давления капиллярных сил P_σ^p аналогичны формулам (3), а в гидродинамическом давлении P^p появится добавка, связанная со втягиванием поляризованной капли в область усиления неоднородного поля:

$$r = r^p(\theta) : P^p = P_0^p + F_{in}^p r \mu, \quad (12)$$

где F_{in}^p — величина силы инерции, возникающей вследствие ускоренного движения центра масс капли, при втягивании капли в область сильного поля. Распределение электростатического поля вблизи поверхности капли определяется из решения краевой задачи для электрического потенциала

$$\Delta \Phi^p = 0, \quad r = r^p(\theta) : \Phi^p = \text{const},$$

$$1 \ll r \ll L : \Phi^p \rightarrow \Phi_{ex}^p, \quad \Phi_{ex}^p \equiv \frac{Q}{\sqrt{L^2 + r^2 + 2Lr\mu}}.$$

Решение сформулированной задачи также должно удовлетворять системе интегральных условий, аналогичных системе (5).

Будем полагать, что электрическое поле в окрестности капли слабо неоднородно, что правомерно, если расстояние от центра масс капли до заряда много больше ее радиуса. В безразмерных переменных это соотношение имеет вид $1/L \ll 1$ и является вторым малым параметром задачи в этом и в следующем разделе.

Выражение для формы поверхности и нормаль к ней с учетом интегральных условий сохранения объема и неподвижности центра масс в линейном по отношению a_n^p/a_0^p , где $n \geq 2$, примут, как и в случае однородного поля, вид, аналогичный (7):

$$r^p(\theta) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^p P_n(\mu), \quad \mathbf{n}^p = \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{n=2}^{\infty} a_n^p P_n(\mu). \quad (13)$$

Пользуясь предположением о слабой неоднородности поля и полагая, что на больших расстояниях от поверхности капли ($r \gg 1$) значение параметра r/L остается малым: $r/L \ll 1$, получим приближенное асимптотическое с точностью до слагаемых порядка $(r/L)^2$ включительно выражение для потенциала внешнего поля Φ_{ex}^p :

$$1 \ll r \ll L : \Phi_{as}^p \simeq \frac{Q}{L} \left(1 - \frac{r}{L} P_1(\mu) + \frac{r^2}{L^2} P_2(\mu) \right). \quad (14)$$

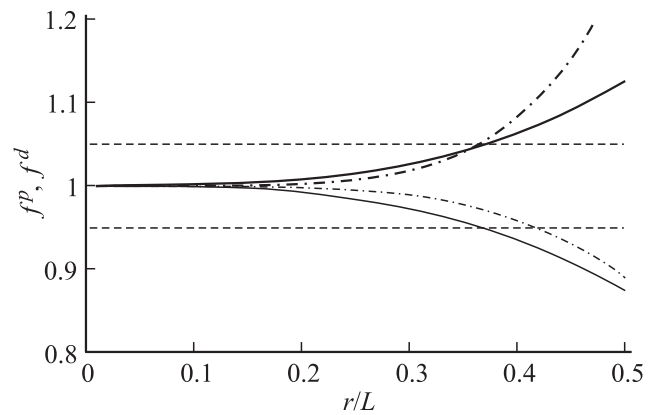


Рис. 1. Зависимости отношения потенциала к их точным выражениям от параметра r/L . Пунктирная верхняя линия — величина f^p при движении в положительном направлении оси z . Пунктирная нижняя — f^p при движении в отрицательном направлении. Штрихпунктирная верхняя — f^d в положительном направлении оси z . Штрихпунктирная нижняя — f^d при движении в отрицательном направлении. Точечные прямые линии проведены на уровнях f^p (f^d), равных 0.95 и 1.05.

Индекс „as“ — сокращение от слова „asymptotic“ означает приближенное выражение для потенциала в выбранной системе координат. В разложении (14) ограничимся учетом старшего слагаемого ($\propto r^2/L^2$), отвечающего за неоднородность поля. Для оценки точности полученного разложения введем величину $f^p \equiv \Phi_{as}^p/\Phi_{ex}^p$, равную отношению асимптотического выражения для потенциала к точному. На рис. 1 пунктирными линиями представлены зависимости f^p от r/L . Расчеты показали, что наибольшие отклонения разложения (14) от точного значения потенциала получаются при $\theta = 0$ — верхняя (толстая) пунктирная линия и $\theta = \pi$ — нижняя (тонкая) пунктирная линия. Как видно из рис. 1, отклонение Φ_{as}^p от Φ_{ex}^p не превышает 5% (т.е. $0.95 \leq f^p \leq 1.05$) на расстояниях $r/L \leq 0.35$.

Подставляя общее решение уравнения Лапласа для Φ^p , аналогичное (8), и выражение для равновесной формы капли (13) в (14), условие эквипотенциальности, и условие незаряженности капли, получим выражение для электрического потенциала Φ^p в окрестности капли в виде

$$\Phi^p = \frac{Q}{L} + \frac{Q}{L^2} \left(-r + \frac{1}{r^2} \right) P_1(\mu) + \frac{Q}{L^3} \left(r^2 - \frac{1}{r^3} \right) P_2(\mu). \quad (15)$$

Используя (15), рассчитаем давление электрического поля на поверхность капли P_E^p , ограничиваясь слагаемыми, линейными по $1/L$:

$$P_E^p = \left(\frac{Q}{L^2} \right)^2 \frac{3}{8\pi} \left[1 - \frac{1}{L} 4P_1(\mu) + 2P_2(\mu) - \frac{1}{L} P_3(\mu) \right], \quad (16)$$

где общий множитель $(Q/L^2)^2$ характеризует величину напряженности электрического поля точечного заряда,

и при разложении по второму малому параметру ($1/L$) не принимается во внимание.

Лапласовское давление P_σ^p с учетом вида формы равновесной поверхности $r^p(\theta)$ определяется формулой, аналогичной (10).

Подставляя выражения для P_σ^p и (16) в баланс давлений

$$P_0^p + F_{in}^p r \mu - P_{at} - \left[2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^p (n-1)(n+2) P_n(\mu) \right] = - \left(\frac{Q}{L^2} \right)^2 \frac{3}{8\pi} \left[1 - \frac{1}{L} 4P_1(\mu) + 2P_2(\mu) - \frac{1}{L} 6P_3(\mu) \right]$$

и пользуясь ортогональностью полиномов Лежандра, приравняем коэффициенты при полиномах одинакового порядка, в результате получим выражения для коэффициентов a_n^p и значения констант P_0^p и F_{in}^p , определяющих величину гидродинамического давления в капле (12):

$$P_0^p = 2 + P_{at} - 6W^p, \quad F_{in}^p = -24 \frac{W^p}{L}, \quad a_2^p = 3W^p, \\ a_3^p = -\frac{18}{5} \frac{W^p}{L}, \quad a_n^p = 0, \quad (n \geq 4), \quad W^p \equiv \frac{Q^2}{16\pi L^4}, \quad (17)$$

где параметр W^p характеризует величину электрического поля в окрестности капли. С учетом выражений (17) форма равновесной поверхности капли в электростатическом поле точечного заряда запишется в виде

$$r^p(\theta) = 1 + 3W^p P_2(\mu) - \frac{18}{5} \frac{W^p}{L} P_3(\mu). \quad (18)$$

Выражение (18) при наличии двух малых параметров W и L^{-1} будет асимптотическим выражением, если каждый член будет меньше предыдущего. Кроме того, чтобы можно было не учитывать члены разложения $\propto (W^p)^2$, необходимо, чтобы выполнялось условие $(W^p)^2 < W^p L^{-1}$. Это накладывает ограничение на второй малый параметр. L^{-1} должно быть больше чем W^p , но заметно меньше единицы, чтобы третий член разложения (18) был меньше второго.

Остановимся подробнее на физическом смысле входящей в соотношение (12) величины F_{in}^p . Покажем, что F_{in}^p — сила инерции, возникающая вследствие ускоренного движения центра масс капли в результате ее дипольного взаимодействия с электрическим полем. Рассчитаем дипольный момент поляризованной внешним электрическим полем капли по формуле

$$\mathbf{p}^p = \iint_S \frac{(-\nabla \Phi^p, \mathbf{n}^p)}{4\pi} \mathbf{r} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\{S: r = r^p(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

В итоге получим

$$\mathbf{p}^p = \frac{Q}{L^2} \mathbf{e}_z.$$

Сила взаимодействия дипольного момента капли с полем будет иметь вид

$$r = 0: \quad \mathbf{F}_e^p = \nabla(\mathbf{p}^p, (-\nabla \Phi_{ex}^p)) = -2 \frac{Q^2}{L^5} \mathbf{e}_z.$$

Объемная плотность этой силы и будет определять \mathbf{F}_{in}^p :

$$\mathbf{F}_{in}^p = \frac{3\mathbf{F}_e^p}{4\pi} = -\frac{3}{2\pi} \frac{Q^2}{L^5} \mathbf{e}_z = -24 \frac{W^p}{L^3} \mathbf{e}_z.$$

Полученное выражение полностью согласуется с соотношением (17), определенным из баланса давлений.

3. Равновесная форма капли в поле диполя

Рассмотрим случай, аналогичный задаче с точечным зарядом, но вместо заряда на том же расстоянии L от центра капли поместим точечный диполь. Диполь характеризуется моментом \mathbf{p} , направленным параллельно оси, соединяющей его с центром масс капли. Система координат совпадает с использованной выше.

Равновесная форма, записываемая аналогично (6), и нормаль к ней с учетом интегральных условий (5) определяются выражениями, аналогичными (13):

$$r^d(\theta) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^d P_n(\mu), \quad \mathbf{n}^d = \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{n=2}^{\infty} a_n^d P_n(\mu), \quad (19)$$

величины, относящиеся к этой задаче отмечены верхним индексом „ d “ — аббревиатура английского „dipole“. Коэффициенты разложения определяются из баланса давлений, аналогичного (2)

$$P_0^d + F_{in}^d r \mu - P_{at} + P_E^d = P_\sigma^d,$$

где F_{in}^d — величина силы инерции капли в неоднородном поле диполя, P_0^d — постоянное гидростатическое давление в капле.

Искомое решение должно удовлетворять системе интегральных условий (5), записанной для капли в поле диполя, а краевая задача на электростатический потенциал имеет вид

$$\Delta \Phi^d = 0, \quad r = r^d(\theta): \quad \Phi^d = \text{const}.$$

$$1 \ll r \ll L: \quad \Phi^d \rightarrow \Phi_{ex}^d \quad \Phi_{ex}^d \equiv \frac{P}{\sqrt{(L^2 + r^2 + 2Lr\mu)^3}}.$$

Величину Φ_{ex}^d разложим в ряд по степеням r/L . В разложении будем учитывать столько слагаемых, сколько необходимо, чтобы отклонение величины полученного асимптотического разложения Φ_{as}^d от точного выражения для потенциала Φ_{ex}^d не превышало погрешности, допускающуюся при аналогичном разложении потенциала точечного заряда, т.е. при $r/L \leq 0.35$ величина $f^d \equiv \Phi_{as}^d / \Phi_{ex}^d$ находится в диапазоне $0.95 \leq f^d \leq 1.05$

(погрешность в 5%). Необходимую точность обеспечивает учет слагаемых до r^4/L^4 включительно:

$$\Phi_{\text{as}}^d = \frac{p}{L^2} \left(1 - 2 \frac{r}{L} P_1(\mu) + 3 \frac{r^2}{L^2} P_2(\mu) - 4 \frac{r^3}{L^3} P_3(\mu) + 5 \frac{r^4}{L^4} P_4(\mu) \right). \quad (20)$$

На рис. 1 зависимости f^p от r/L представлены штрихпунктирными линиями: $\theta = 0$ — верхняя (толстая) линия, $\theta = \pi$ — нижняя (тонкая) линия.

Решая выписанную краевую задачу с учетом (20) и интегрального условия незаряженности капли, получим выражение для электростатического потенциала вблизи ее поверхности

$$\begin{aligned} \Phi^d(r, \mu) = & -\frac{p}{L^2} \left(1 + \left(\frac{2}{r^2} - 2r \right) \frac{1}{L} P_1(\mu) \right. \\ & + \left(-\frac{3}{r^3} + 3r^2 \right) \frac{1}{L^2} P_2(\mu) + \left(\frac{4}{r^4} - 4r^3 \right) \frac{1}{L^3} P_3(\mu) \\ & \left. + \left(-\frac{5}{r^5} + 5r^4 \right) \frac{1}{L^4} P_4(\mu) \right). \end{aligned}$$

Давление электрических сил на поверхность капли будет иметь вид

$$\begin{aligned} P_E^d = & W^d \left(\left(6 + \frac{45}{2L^2} \right) P_0(\mu) - \left(\frac{108}{L^3} + \frac{36}{L} \right) P_1(\mu) \right. \\ & + \left(12 + \frac{729}{7L^2} \right) P_2(\mu) + \left(\frac{232}{L^3} + \frac{54}{L} \right) P_3(\mu) \\ & \left. + \frac{1077}{7L^2} P_4(\mu) - \frac{350}{L^3} P_5(\mu) \right). \quad (21) \end{aligned}$$

Подставляя (19), (21) и аналогичное (10) выражение для капиллярного давления в баланс давлений на поверхности капли, получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} P_0^d + F_{\text{in}}^d P_1(\mu) - P_{\text{at}} - & \left(2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^d (n-1)(n+2) P_n(\mu) \right) \\ = & -W^d \left(\left(6 + \frac{45}{2L^2} \right) P_0(\mu) - \left(\frac{36}{L} + \frac{108}{L^3} \right) P_1(\mu) \right. \\ & + \left(12 + \frac{729}{2L^2} \right) P_2(\mu) + \left(\frac{54}{L} + \frac{232}{L^3} \right) P_3(\mu) \\ & \left. + \frac{1077}{7L^2} P_4(\mu) - \frac{350}{L^3} P_5(\mu) \right). \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых полиномах Лежандра, определим величины P_0^d , F_{in}^d и a_n . Полевой параметр W^d имеет вид $W^d \equiv p^2/4\pi L^6$.

Сила инерции, возникающая из-за ускоренного движения капли в неоднородном поле диполя в результате ее втягивания в область сильного поля, определяется выражением

$$\mathbf{F}_{\text{in}}^d = - \left(\frac{36}{L} + \frac{108}{L^3} \right) P_1(\mu) \mathbf{e}_z.$$

С учетом полученных коэффициентов a_n запишем выражение для формы поверхности $r^d(\theta)$:

$$\begin{aligned} r^d(\theta) = & 1 + 3 \left(1 + \frac{243}{28L^2} \right) W^d P_2(\mu) \\ & + \frac{27}{5} \left(\frac{1}{L} + \frac{116}{27L^3} \right) W^d P_3(\mu) \\ & + \frac{359W^d}{42L^2} P_4(\mu) - \frac{25W^d}{2L^3} P_5(\mu). \quad (22) \end{aligned}$$

В этом выражении на малый параметр L^{-1} также имеется ограничение. Выражение (22) при наличии двух малых параметров W^d и L^{-1} будет асимптотическим выражением и можно ограничиться учетом лишь первой степени по W^d , если будет выполняться условие $(W^d)^2 < W^d L^{-3}$ или $W^d < L^{-3}$. Отсюда получим $L < (W^d)^{-1/3}$. При взятом в расчетах $W^d = 0.05$ капля должна располагаться от диполя на расстоянии, не большем чем $L \propto 3$ (при принятом обезразмеривании на радиус капли это означает, что диполь должен находиться от капли на расстоянии $L > 3R$). В противном случае необходимо учитывать члены разложений, пропорциональные квадрату и более высоким степеням W^d .

При уменьшении полевого параметра и $L \rightarrow \infty$ в обоих случаях неоднородных полей (18), (22) равновесная форма капли стремится к слабо сфероидальной. При выполнении условия

$$W^{\text{un}} = W^p = W^d$$

все предельные формы совпадают. Невольно напрашивается заключение, что сфероидальная деформация капли во всех электростатических полях является общей и главной, а деформация в неоднородных полях $\propto 1/L^n$ накладывается на сфероидальную деформацию поправками более высокого порядка малости.

На рис. 2, а приведены зависимости от параметра $1/L$ коэффициентов a_n^{un} , a_n^p , a_n^d при различных полиномах Лежандра (кроме нулевого и первого) в выражениях для равновесных форм капель в однородном поле (11), в поле точечного заряда (18) и в поле диполя (22) (номер у кривой совпадает с порядком полинома Лежандра). Кривые, относящиеся к однородному полю, нанесены сплошной тонкой линией, относящиеся к полю точечного заряда — пунктиром, к полю диполя — штрихпунктирными линиями. Параметр W входит линейным множителем во все члены разложений (11), (18), (22) и является масштабирующим коэффициентом по оси ординат (для конкретности графики построены

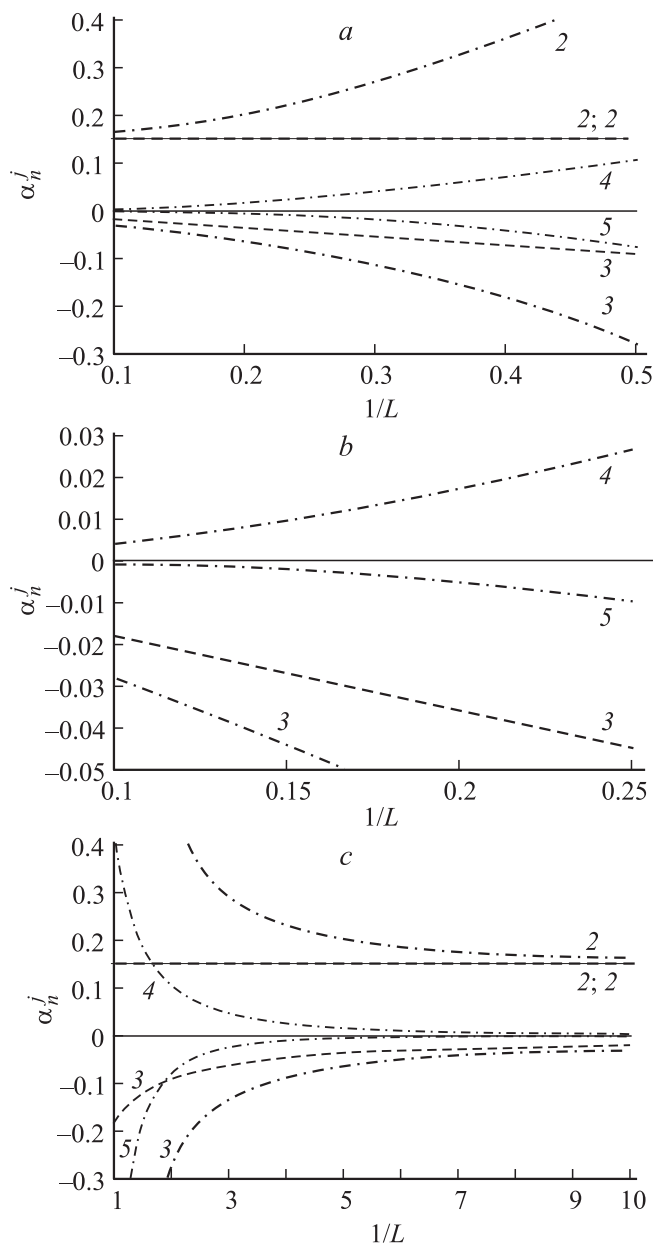


Рис. 2. *a* — зависимости коэффициентов при полиномах Лежандра в разложениях форм поверхности капли a_n^{un} (в однородном поле (11)), a_n^p (в электростатическом поле точечного заряда (18)), a_n^d (в поле точечного диполя (22)) от параметра $1/L$. Рассчитаны при $W = 0.05$. Сплошная линия — однородное поле, пунктирные линии — поле точечного заряда, штрихпунктирные — поле диполя. Цифрами отмечены соответствующие порядки полиномов. *b* — фрагмент графика рис. 1. Показаны более подробно линии для поля точечного заряда и диполя для коэффициентов с номерами 3, 4, 5. *c* — то же, что на рис. 1, но по оси абсцисс отложена величина L — расстояние до заряда (диполя).

при $W = 0.05$). Несложно видеть, что с увеличением порядка полинома Лежандра величина соответствующего коэффициента убывает достаточно быстро (примерно на порядок). Линии (прямые), соответствующие

второму полиному Лежандра для однородного поля и поля точечно заряда, не зависят от L и совпадают. Заметим, что коэффициенты разложений, стоящие при четных полиномах, положительны, а при нечетных отрицательны. Сходимость асимптотических разложений (отношение последующего коэффициента ряда к предыдущему уменьшается) улучшается с увеличением L (т.е. с уменьшением $1/L$).

На рис. 2, *b* показан фрагмент графика рис. 2, *a*, взятый вблизи начала координат (вдоль оси абсцисс) в более крупном масштабе для сравнения величин коэффициентов разложений. На графике приведены линии a_n^p, a_n^d при $n = 3, 4, 5$.

На рис. 2, *c* представлены те же зависимости, что и на рис. 2, *a*, но от величины расстояния до заряда (диполя) L , чтобы отразить анализируемые зависимости во всех диапазонах величины.

Анализ результатов

В рассмотренных выше задачах полевые параметры W^{un}, W^p и W^d формально записываются по-разному, но при этом кривые, рассчитанные с их использованием, сравниваются. Рассмотрим подробнее введение этих параметров для разных потенциалов.

Для удобства сравнения формально определим W через напряженность электрического поля в центре масс капли E (как если бы капля была проницаема для поля). Все рассмотренные поля сделаем эквивалентными по численному значению друг другу через равенство величины их напряженности в центре капли

$$\frac{2|p|}{L^3} \equiv \frac{Q}{L^2} \equiv |E_0|.$$

Так как коэффициент поверхностного натяжения σ во всех случаях одинаков, а параметр Тейлора в размерном виде определяется соотношением

$$W = \frac{P_E}{P_\sigma} = \left(\frac{E^2}{8\pi} \right) / \left(\frac{2\sigma}{R} \right) = \frac{E^2 R}{16\pi\sigma}$$

(в безразмерном виде это соотношение запишется в виде $W = E^2/16\pi$), то условие числовой эквивалентности анализируемых полей фактически выразится в равенстве значений введенных полевых параметров

$$W^d \equiv \frac{p}{4\pi L^6} \equiv W^p \equiv \frac{Q^2}{16\pi L^4} \equiv W^{un} \equiv \frac{E_0^2}{16\pi}.$$

Из рис. 3, *a* и рис. 3, *b* видно, что форма поверхности капли в линейном приближении по величине деформации, имеющая в однородном электростатическом поле вид вытянутого сфероида, в неоднородных электростатических полях точечного заряда или точечного диполя практически с небольшими искажениями таковой и остается. Этот факт можно использовать двояко в зависимости от решаемой проблемы. В задачах о расчете

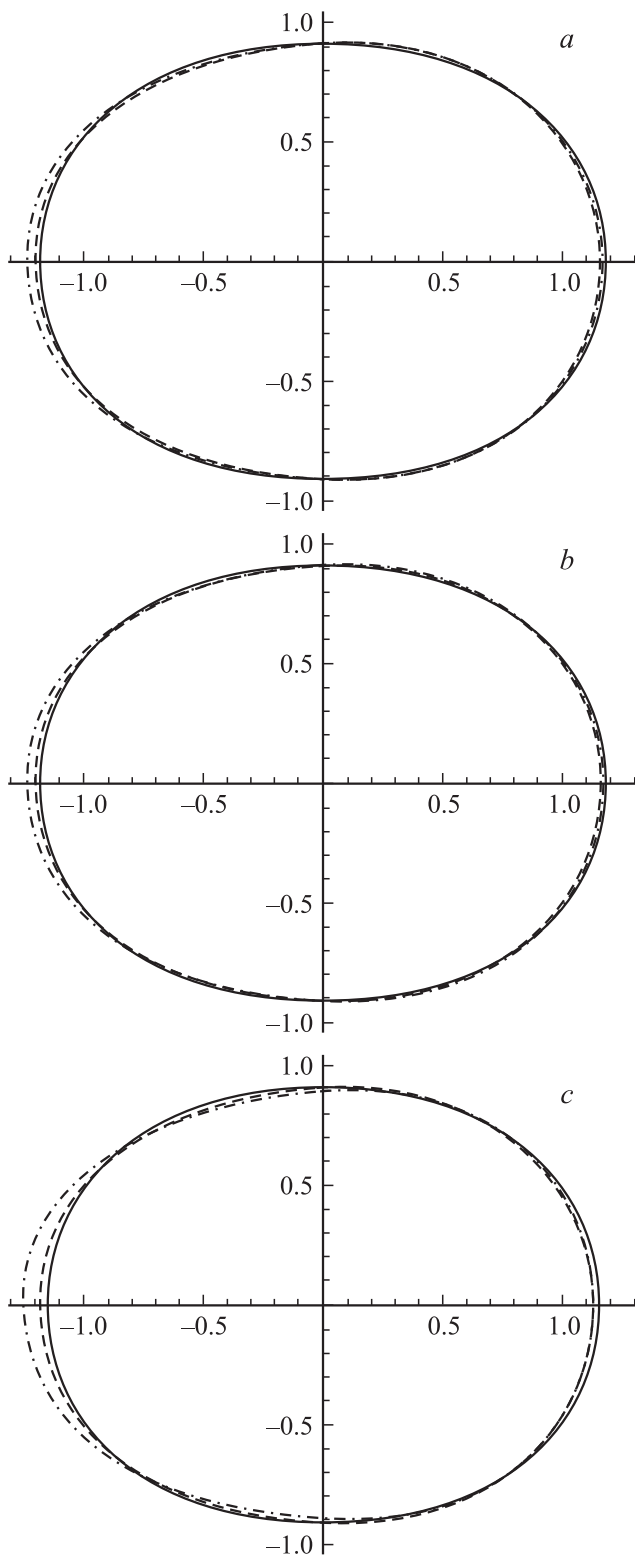


Рис. 3. Формы поверхности капли: в однородном поле — сплошная линия; в поле точечного заряда — штриховая линия, в поле диполя — штрихпунктирная линия. Параметры: a — $W = 0.04$, $L = 10$; b — $W = 0.06$, $L = 10$; c — $W = 0.05$, $L = 6$.

аэродинамического сопротивления движению капель в первом порядке малости различием форм можно пре-

небречь, полагая, что все капли являются вытянутыми сфероидами. Если же требуется найти критерий неустойчивости (как описано во введении) или критические условия реализации электростатической неустойчивости по отношению к индуцированному либо к собственному электрическому заряду с учетом взаимодействия между различными модами осцилляций или решить задачу об аналитическом расчете нелинейных осцилляций и нахождении положений внутренних нелинейных резонансов капли, то искажение равновесной формы капли и неоднородность внешнего поля играют заметную роль.

По мере возрастания степени неоднородности рассматриваемого поля (однородное поле, поле точечного заряда, поле диполя) наблюдается в линейном приближении по малому параметру усиление искажения равновесной формы капель, а также увеличение роли связанности отдельных мод осцилляций капель [10,17,18]. С ростом неоднородности поля проявляется асимметрия поверхности капли относительно плоскости, проходящей через ее центр масс перпендикулярно оси z : в поле диполя она наибольшая, в поле точечного заряда меньше, в однородном поле отсутствует совсем, что проиллюстрировано рис. 3, с. Асимметрия в выражениях (11), (18), (22) для форм поверхности определяется слагаемыми, содержащими нечетные полиномы Лежандра. Наличие на капле собственного заряда, вне зависимости от его знака, только увеличивает эту тенденцию.

Отметим также, что увеличение количества порядков в приближенных значениях потенциалов приводит к необходимости учета большего количества слагаемых в соответствующих электрических давлениях (9), (16), (21), а следовательно, и к увеличению связанности мод при рассмотрении осцилляций капли.

Заключение

При рассмотрении равновесной формы капли в полях различной степени неоднородности получено, что с ростом неоднородности поля возрастают вытянуто-сфероидальное отклонение формы поверхности капли от сферической, а также асимметрия поверхности капли. При рассмотрении более неоднородных полей следует учитывать больше членов разложения по ортогональным полиномам (и по малым параметрам). Величину полей различной степени неоднородности удобно сопоставлять по равенству полевого параметра W (характеризующего отношение электростатического давления на поверхность капли к капиллярному). При одинаковых радиусах капель и коэффициентах поверхностного натяжения жидкостей равенство параметров W сводится к равенству величин напряженности полей разного вида в центре капли.

Доминирование вытянутой сфероидальной деформации капли в однородном и в неоднородных полях позволяет в некоторых расчетах, например, параметров электродиспергирования в неоднородных полях считать

каплю сфероидом [16]. Что касается сформулированной во введении проблемы проверки критерия Рэля сильно заряженной капли, то, по всей видимости, в этом случае приходится иметь дело с системной ошибкой, поскольку силовые поля, независимо от их природы, приводят к деформации сферической формы капли и снижают значение критерия неустойчивости [9]. Чтобы проверить критерий Рэля с большой степенью точности, следует планировать эксперименты, исключающие влияние внешних силовых полей, например, в условиях микрогравитации (невесомости).

Список литературы

- [1] Doyle A., Moffet D.R., Vonnegut B. // J. Coll. Sci. 1964. V. 19. P. 136–143.
- [2] Berg T.G.O., Trainor R.J., Vaughan U. // J. Atmosph. Sci. 1970. V. 27. N 11. P. 1173–1181.
- [3] Schweizer J.D., Hanson D.N. // J. Coll. Int. Sci. 1971. V. 35. N 3. P. 417–423.
- [4] Roulleau M., Desbois M. // J. Atmosph. Sci. 1972. V. 29. N 4. P. 565–569.
- [5] Duft D., Lebius H., Huber B.A. et al. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. N 8. P. 1–4.
- [6] Duft D., Achtzehn T., Muller R. et al. // Nature. 2003. V. 421. P. 128.
- [7] Grimm R.L., Beauchamp J.L. // J. Phys. Chem. B. 2005. V. 109. P. 8244–8250.
- [8] Rayleigh (Strutt J.W.) // Phil. Mag. 1882. V. 14. P. 184–186.
- [9] Григорьев А.И., Жаров А. Н., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 8. С. 44–53.
- [10] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 10. С. 32–40.
- [11] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Мокшеев П.В. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 4. С. 32–40.
- [12] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Мокшеев П.В. // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 3. С. 11–20.
- [13] Kim O.V., Dunn P.F. // Langmuir. 2010. V. 26. P. 15 807–15 813.
- [14] Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.
- [15] Найфе А.Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 536 с.
- [16] Ширяева С.О., Григорьев А.И. Заряженная капля в грозном облаке. Ярославль: Изд. ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2008. 535 с.
- [17] Григорьев А.И. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 50–55.
- [18] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 11. С. 49–56.