

01

# Математическое моделирование электрофизических характеристик многократно рассеивающих сред с фибриллярной структурой.

## I. Теория и модель расчета

© К.Г. Куликов

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,  
195251 Санкт-Петербург, Россия,  
e-mail: kulikov\_kg@hotmail.ru

(Поступило в Редакцию 12 марта 2013 г.)

Представлена математическая модель биологической структуры фибриллярного строения, которая позволяет исследовать спектры поглощения и дисперсии в случае *in vivo*. Приведенные количественные оценки могут быть использованы для прогнозирования изменений оптических свойств исследуемого образца биологической ткани, обусловленных в нем различными биофизическими и биохимическими процессами.

## Введение

В настоящее время оптические методы диагностики биотканей занимают одно из ведущих мест благодаря их высокой информативности, а также их относительной простоты и дешевизны. Известны многочисленные диагностические методы, такие как оптическая когерентная томография, конфокальная микроскопия, флуоресцентная спектроскопия, оптическая диффузионная томография, которые требуют знаний оптических свойств и динамики диффузии различных лекарственных веществ в различных биотканях. Например, в офтальмологии перспективной является лазерная транссклеральная операция, которая позволяет с помощью лазерного излучения воздействовать на сетчатку и цилиарное тело непосредственно через склеру.

Несмотря на значительные успехи в области развития фундаментальных основ и практических приложений оптических методов исследования биотканей, актуальными задачами в настоящее время являются повышение эффективности и расширение функциональных возможностей существующих диагностических методов. Следует также отметить, что, несмотря на значительное количество выполненных теоретических и экспериментальных исследований, в настоящее время в недостаточной степени развиты представления о распространении света в многократно рассеивающих средах с фибриллярной структурой, состоящих из частично ориентированных волокон. Подобные объекты представляют значительный интерес с точки зрения биомедицинских приложений. Отметим некоторые работы, посвященные исследованиям оптической анизотропии тканей с фибриллярным строением. Так, в работе [1] сопоставлены результаты теоретического анализа оптической анизотропии многократно рассеивающих фибриллярных биотканей, проведенного на основе модели эффективной анизотропной среды, с экспериментальными данными по двулучепреломлению *in vivo* дремы крысы, работа [2] посвящена вопросам исследования динамики иммерсионного просветления различных типов биологических тканей и

методики описания распространения светового излучения с различным типом поляризации сквозь анизотропную биоткань, в [3] исследуется вопрос анизотропного рассеяния света на биологических тканях, имеющих цилиндрическую структуру (например, коллагеновые волокна), методом Монте-Карло. Приведенные оценки позволяют определять оптические свойства ткани, а также полезны для диагностики ранних изменений тканей.

В настоящей работе построена математическая модель, которая позволяет варьировать электрофизические параметры и структуру моделируемой биологической ткани фибриллярного строения и на каждый просчитанный вариант представлять результат, который описывает зависимость электрофизических характеристик модельной структуры от длины волны (кривые дисперсии и спектры поглощения).

Задача состояла из нескольких частей. В первой части решена задача светорассеяния на системе параллельных диэлектрических цилиндров, моделирующих коллагеновые волокна. Во второй части рассмотрена задача об отражении плоской волны от слоя с медленно меняющейся толщиной, который моделирует биологическую структуру с фибриллярным строением, в отраженной системе координат.

## 1. Рассеяние на параллельных цилиндрах

В данном разделе рассмотрим распространение поляризованного излучения в многократно рассеивающих средах на примере дермы. Так как в состав дермы входят коллагеновые волокна, состоящие из пучков параллельно расположенных фибрилл толщиной в среднем 50–100 nm, связанных между собой гликозаминогликанами и протеогликанами [4], то применительно к анализу влияния морфологических характеристик многократно рассеивающих случайно-неоднородных сред с фибриллярной структурой в работе рассматривается модель среды, которая состоит из параллельных диэлектрических цилиндров с одинаковыми показателями

преломления  $n_{\text{цил}}$  и радиусами  $a^j$ , где  $j$  — номер цилиндра. При этом цилиндры распределены в изотропной диэлектрической среде с комплексным показателем преломления  $n_0$ . Расстояние между цилиндрами и длина волны падающего излучения сравнимы друг с другом. Для определенности считаем, что цилиндры ориентированы вдоль оси  $Z$ .

Пусть на цилиндры под углом  $\theta$  падает плоская поляризованная волна, при этом декартова система координат  $OXYZ$  используется в качестве неподвижной системы отсчета,  $\varphi$  — азимутальный угол. Рассматривается только простая гармоническая зависимость от времени с угловой частотой  $\omega$ , причем множитель  $\exp(-i\omega t)$  всюду опускается.

Отметим, что в цилиндрической системе координат первичное поле падающей волны  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  допускает представление в виде наложения полей электрического и магнитного типов. Поэтому при решении задачи рассмотрим 2 случая поляризации поля падающей волны. Отметим, что рассеянное поле  $\mathbf{E}_s$ ,  $\mathbf{H}_s$  на цилиндрах может быть найдено в зависимости от характера поляризации первичного поля через магнитный  $U$  и соответственно электрический  $V$  потенциалы Герца. При этом  $U$ ,  $V$  связаны с векторами  $\mathbf{E}_s$ ,  $\mathbf{H}_s$  следующими соотношениями:

$$\mathbf{E} = \frac{i}{k} \nabla \times \nabla \times (\mathbf{e}_z U) + \nabla \times (\mathbf{e}_z V),$$

$$\mathbf{H} = -n_0 \nabla \times (\mathbf{e}_z U) + \frac{i}{k} \nabla \times \nabla \times (\mathbf{e}_z V) \quad (1)$$

и удовлетворяют волновым уравнениям

$$\Delta U + n_0^2 k^2 U = 0,$$

$$\Delta V + n_0^2 k^2 V = 0.$$

Запишем соотношения продольной, азимутальной и радиальной составляющих для электрического и магнитного полей, которые выражаются через  $U$ ,  $V$  в цилиндрической системе координат  $(\rho, \varphi, z)$ :

$$E_\rho = \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial z}, \quad E_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial z}, \quad E_z = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 n_0^2 U, \quad (2)$$

$$H_\rho = -\frac{n_0}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad H_\varphi = n_0 \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad H_z = 0, \quad (3)$$

$$H_\rho = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial z}, \quad H_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial z}, \quad H_z = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + k^2 n_0^2 V, \quad (4)$$

$$E_\rho = -\frac{n_0}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad E_\varphi = n_0 \frac{\partial V}{\partial \rho}, \quad E_z = 0, \quad (5)$$

где  $U$ ,  $V$  удовлетворяют уравнениям вида

$$\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right] \right] + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 n_0^2 U = 0,$$

$$\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right] \right] + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + k^2 n_0^2 V = 0.$$

Поле, падающее на поверхность  $j$ -го цилиндра, состоит из нескольких частей — первоначально падающей волны, первичной волны, рассеянной на  $j$ -цилиндре, и волны, рассеянной на всех других цилиндрах. Тогда запишем общее выражение для поля через скалярные потенциальные функции  $U$ ,  $V$

$$U^j = U_{\text{inc}}^j(\mathbf{R}_{jp}) + U_{\text{scat}}^j(\mathbf{R}_{jp}) + \sum_{k \neq j}^N U_{\text{scat}}^k(\mathbf{R}_{\text{cr}}), \quad (6)$$

$$V^j = V_{\text{inc}}^j(\mathbf{R}_{jp}) + V_{\text{scat}}^j(\mathbf{R}_{jp}) + \sum_{k \neq j}^N V_{\text{scat}}^k(\mathbf{R}_{\text{cr}}), \quad (7)$$

где  $U_{\text{inc}}^j(\mathbf{R}_{jp})$ ,  $V_{\text{inc}}^j(\mathbf{R}_{jp})$  — потенциалы падающего поля на поверхность  $j$ -го цилиндра,  $U_{\text{scat}}^j(\mathbf{R}_{jp})$ ,  $V_{\text{scat}}^j(\mathbf{R}_{jp})$  — потенциалы первичной рассеянной волны на  $j$ -цилиндре,  $U_{\text{scat}}^k(\mathbf{R}_{\text{cr}})$ ,  $V_{\text{scat}}^k(\mathbf{R}_{\text{cr}})$  — потенциалы рассеянного поля на всех других цилиндрах.

Выражения вида (6), (7) могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{pmatrix} U^j \\ V^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{\text{inc}}^j(\mathbf{R}_{jp}) \\ V_{\text{inc}}^j(\mathbf{R}_{jp}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_{\text{scat}}^j(\mathbf{R}_{jp}) \\ V_{\text{scat}}^j(\mathbf{R}_{jp}) \end{pmatrix} + \sum_{k \neq j}^N \begin{pmatrix} U_{\text{scat}}^k(\mathbf{R}_{\text{cr}}) \\ V_{\text{scat}}^k(\mathbf{R}_{\text{cr}}) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Потенциал падающего поля для случая  $p$ - и  $s$ -поляризации примет следующий вид:

$$U_{\text{inc}}^j(\mathbf{R}_{jp}) = e^{-ikz \sin \theta} e^{-ik\mathbf{R}_{jp}}, \quad V_{\text{inc}}^j(\mathbf{R}_{jp}) = 0, \quad (9)$$

$$V_{\text{inc}}^j(\mathbf{R}_{jp}) = e^{-ikz \sin \theta} e^{-ik\mathbf{R}_{jp}}, \quad U_{\text{inc}}^j(\mathbf{R}_{jp}) = 0. \quad (10)$$

Используя разложение плоской волны по цилиндрическим волновым функциям

$$e^{ik\rho \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(k\rho) e^{in\theta} \quad (11)$$

и подставляя выражение (11) в (9), (10), получим

$$U_{\text{inc}}^j(\mathbf{R}_{jp}) = e^{-ikz \sin \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(k\mathbf{R}_{jp} \cos \theta n_0) e^{in\varphi} e^{iny_{jp}},$$

$$V_{\text{inc}}^j(\mathbf{R}_{jp}) = 0, \quad (12)$$

$$V_{\text{inc}}^j(\mathbf{R}_{jp}) = e^{-ikz \sin \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(k\mathbf{R}_{jp} \cos \theta n_0) e^{in\varphi} e^{iny_{jp}},$$

$$U_{\text{inc}}^j(\mathbf{R}_{jp}) = 0, \quad (13)$$

где  $\gamma_{jp}$  — угол по отношению к  $j$ -му цилиндру (рис. 1). Объединяя выражения (12), (13), получим

$$\begin{pmatrix} U_{\text{inc}}^j(\mathbf{R}_{jp}) \\ V_{\text{inc}}^j(\mathbf{R}_{jp}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 - \alpha \end{pmatrix} \times e^{-ikz \sin \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(k\mathbf{R}_{jp} \cos \theta n_0) e^{in\varphi} e^{iny_{jp}}, \quad (14)$$

где  $\alpha = 1$  для случая  $p$ -поляризации, а  $\alpha = 0$  для случая  $s$ -поляризации.

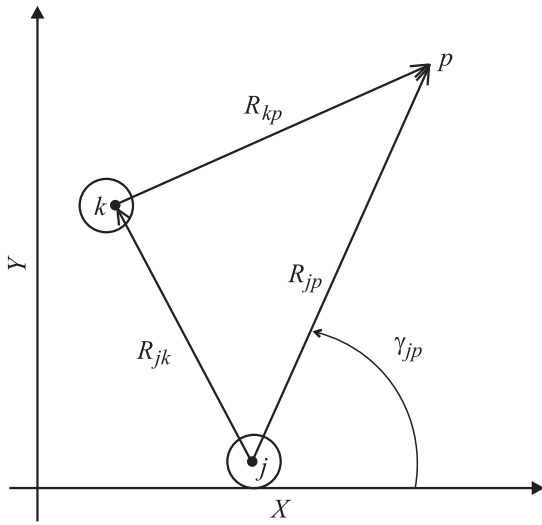


Рис. 1. Геометрическая иллюстрация рассеяния на цилиндрах.

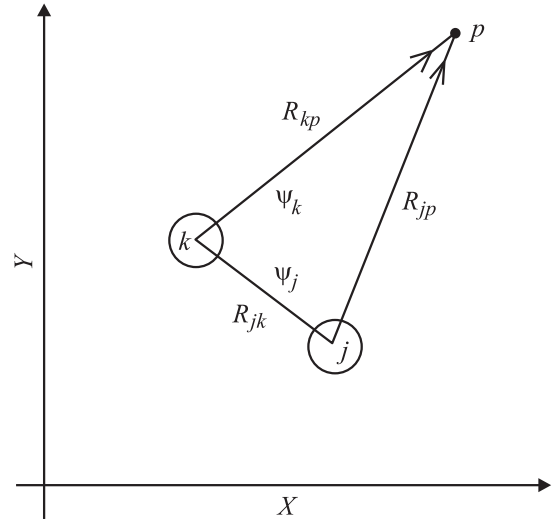


Рис. 2. Геометрическая иллюстрация к теореме сложения.

Аналогично работе [5] запишем выражение для рассеянного поля на  $j$ -цилиндре через скалярные потенциальные функции. Так как рассеянное поле на больших расстояниях от частицы должно быть уходящей волной, то используем функции Ханкеля, тогда имеем

$$U_{\text{scat}}^j(\mathbf{R}_{jp}) = -e^{-ikz \sin \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n H_n^2(k\mathbf{R}_{jp} \cos \theta n_0) e^{iny_{jp}} a_n^j, \quad (15)$$

$$V_{\text{scat}}^j(\mathbf{R}_{jp}) = -e^{-ikz \sin \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n H_n^2(k\mathbf{R}_{jp} \cos \theta n_0) e^{iny_{jp}} b_n^j \quad (16)$$

или

$$\begin{pmatrix} U_{\text{scat}}^j(\mathbf{R}_{jp}) \\ V_{\text{scat}}^j(\mathbf{R}_{jp}) \end{pmatrix} = -e^{-ikz \sin \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n H_n^2(k\mathbf{R}_{jp} \cos \theta n_0) \times e^{iny_{jp}} \begin{pmatrix} a_n^j \\ b_n^j \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где

$$\begin{pmatrix} a_n^j \\ b_n^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_n^{j1} + (1-\alpha) a_n^{j\text{II}} \\ \alpha b_n^{j1} + (1-\alpha) b_n^{j\text{II}} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$a_n^{j1}$ ,  $b_n^{j1}$  и  $a_n^{j\text{II}}$ ,  $b_n^{j\text{II}}$  — коэффициенты рассеяния на цилиндре для  $p$ - и соответственно для  $s$ -поляризаций.

По теореме сложения для пары цилиндров [6] (рис. 2) имеем

$$\begin{aligned} e^{im\psi_k} H_n^2(k\mathbf{R}_{kp} \cos \theta n_0) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{s-n}^2(k\mathbf{R}_{jk} \cos \theta n_0) \\ &\times J_n(k\mathbf{R}_{jp} \cos \theta n_0) e^{is\psi_s}. \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда потенциал рассеянного поля на всех других цилиндрах с учетом выражения (19) примет вид

$$U_{\text{scat}}^k(\mathbf{R}_{kp}) = -e^{-ikz \sin \theta} \sum_{k \neq j}^N \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^s e^{iny_{jp}} \times e^{in(s-n)\gamma_{kj}} H_{s-n}^2(k\mathbf{R}_{jk} \cos \theta n_0) J_n(k\mathbf{R}_{jp} \cos \theta n_0) a_s^k, \quad (20)$$

$$V_{\text{scat}}^k(\mathbf{R}_{kp}) = -e^{-ikz \sin \theta} \sum_{k \neq j}^N \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^s e^{iny_{jp}} \times e^{in(s-n)\gamma_{kj}} H_{s-n}^2(k\mathbf{R}_{jk} \cos \theta n_0) J_n(k\mathbf{R}_{jp} \cos \theta n_0) b_s^k, \quad (21)$$

или

$$\begin{pmatrix} U_{\text{scat}}^k(\mathbf{R}_{kp}) \\ V_{\text{scat}}^k(\mathbf{R}_{kp}) \end{pmatrix} = -e^{-ikz \sin \theta} \sum_{k \neq j}^N \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^s \times e^{iny_{jp}} G_{ks}^{jn} J_n(k\mathbf{R}_{jp} \cos \theta n_0) \begin{pmatrix} a_s^k \\ b_s^k \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где

$$G_{ks}^{jn} = e^{in(s-n)\gamma_{kj}} H_{s-n}^2(k\mathbf{R}_{jk} \cos \theta n_0). \quad (23)$$

Подставим в (6)–(7) выражения (14), (17) и (22), получим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U^j \\ V^j \end{pmatrix} &= -e^{-ikz \sin \theta} \sum_{k \neq j}^N \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n e^{iny_{jp}} \\ &\times \left[ \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix} e^{in\varphi} - \begin{pmatrix} a_s^k \\ b_s^k \end{pmatrix} G_{ks}^{jn} \right] J_n(k\mathbf{R}_{jk} \cos \theta n_0) - e^{-ikz \sin \theta} \\ &\times \sum_{k \neq j}^N \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n e^{iny_{jp}} \begin{pmatrix} a_n^j \\ b_n^j \end{pmatrix} H_n^2(k\mathbf{R}_{jp} \cos \theta n_0), \end{aligned} \quad (24)$$

где  $G_{ks}^{jn}$  определяется формулой (23).

Для того чтобы найти неизвестные коэффициенты  $a_s^k, b_s^k$ , необходимо использовать граничные условия на поверхности каждого цилиндра. Эти граничные условия требуют непрерывности тангенциальной компоненты электрического и магнитного векторов на поверхности цилиндров. Применения граничных условий дают (аналогично работе [5]) следующую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов  $a_s^k, b_s^k$ :

$$\sum_{k \neq j}^N \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \left[ \delta_{jk} \delta_{ns} + (1 - \delta_{jk}) G_{ks}^{jn} a_n^j \right] a_s^k + (1 - \delta_{jk}) G_{ks}^{jn} a_n^{jII} b_s^k \right] = e^{in\theta} (\alpha a_n^j + (1 - \alpha) a_n^{jII}), \quad (25)$$

$$\sum_{k \neq j}^N \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \left[ 1 - \delta_{jk} \right] G_{ks}^{jn} b_n^j a_s^k + \left[ \delta_{jk} \delta_{ns} + (1 - \delta_{jk}) G_{ks}^{jn} b_n^{jII} \right] b_s^k \right] = e^{in\theta} (\alpha b_n^j + (1 - \alpha) b_n^{jII}) \quad (26)$$

или в матричном представлении

$$\begin{pmatrix} \delta_{jk} \delta_{ns} + (1 - \delta_{jk}) G_{ks}^{jn} a_n^j & (1 - \delta_{jk}) G_{ks}^{jn} a_n^{jII} \\ (1 - \delta_{jk}) G_{ks}^{jn} b_n^j & \delta_{jk} \delta_{ns} + (1 - \delta_{jk}) G_{ks}^{jn} b_n^{jII} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_s^k \\ b_s^k \end{pmatrix} = e^{in\theta} \begin{pmatrix} \alpha a_n^j + (1 - \alpha) a_n^{jII} \\ \alpha b_n^j + (1 - \alpha) b_n^{jII} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где  $\delta_{jk}, \delta_{ns}$  — символы Кронекера.

Выражения для составляющих векторов **E**, **H** искомым полем могут быть найдены через потенциалы Герца  $U, V$ . Подстановка выражения (17) с учетом (27) в (2)–(5) позволяет в явном виде получить соответствующие соотношения продольной, азимутальной и радиальной составляющих для электрического и магнитного полей.

$$\begin{aligned} E_{R_{jp}}^{(scat)} &= -k \cos \theta n_0 e^{-ikz \sin \theta} \sum_{j=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n e^{iny_{jp}} \times \left[ \sin \theta H_n^{(2)} a_n^j + \frac{i}{k \cos \theta R_{jp}} H_n^{(2)} b_n^j \right], \\ E_{\gamma_{jp}}^{(scat)} &= k \cos \theta n_0 e^{-ikz \sin \theta} \sum_{j=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n e^{iny_{jp}} \times \left[ -\frac{i}{k \cos \theta R_{jp}} \sin \theta H_n^{(2)} a_n^j + H_n^{(2)} b_n^j \right], \\ E_{(scat)_z} &= -ik \cos^2 \theta n_0 e^{ikz \sin \theta} \sum_{j=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n e^{-iny_{jp}} [H_n^{(2)} a_n^j], \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} H_{(scat)_{R_{jp}}} &= k \cos \theta n_0 e^{-ikz \sin \theta} \sum_{j=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n e^{iny_{jp}} \times \left[ -\sin \theta H_n^{(2)} a_n^j + \frac{i}{k \cos \theta R_{jp}} H_n^{(2)} b_n^j \right], \\ H_{(scat)_{\gamma_{jp}}} &= -k \cos \theta n_0 e^{-ikz \sin \theta} \sum_{j=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n e^{iny_{jp}} \times \left[ \frac{i}{k \cos \theta R_{jp}} \sin \theta H_n^{(2)} a_n^j - H_n^{(2)} b_n^j \right], \\ H_{(scat)_z} &= -ik \cos^2 \theta n_0 e^{ikz \sin \theta} \sum_{j=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n e^{iny_{jp}} [H_n^{(2)} b_n^j]. \end{aligned} \quad (29)$$

## 2. Отражение плоской волны от слоя с медленно меняющейся толщиной с учетом фибриллярной структуры

После того как мы решили задачу светорассеяния на системе параллельных диэлектрических цилиндров, кратко рассмотрим проблему об отражении плоской волны от слоя с медленно меняющейся толщиной.

Рассмотрим следующую оптическую систему. Система состоит из нескольких областей с различными показателями преломления (эпидермис, верхний слой дермы с фибриллярной структурой, форменные элементы крови, нижний слой дермы).

С целью достижения наибольшего соответствия структуре реального объекта исследования представим границы раздела слоев модельной среды в виде некоторых волнистых поверхностей  $z_i = H_i(x, y), i = \overline{1, 3}$ .

Пусть на моделируемый слой падает под углом  $\theta$  плоская  $p$ - или  $s$ -поляризованная волна и требуется найти отраженное поле. Для определенности рассмотрим случай  $p$ -поляризации. Как известно, поля **E** и **H** будут выражаться через некоторую скалярную функцию, например  $E$ , которая будет удовлетворять следующему уравнению:

$$\Delta E + k^2 n_j^2 E = 0, \quad (30)$$

где  $k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0, n_j$  — комплексный показатель преломления в  $j$ -м слое ( $j = \overline{1, 5}$ ),  $n_j = n_j^0 + i\chi_j$ .

Будем искать отраженное поле в виде волн с медленно меняющимися амплитудами и быстро осциллирующими фазами, при этом считаем, что толщины слоев  $H_i(x, y), i = \overline{1, 3}$  являются медленно меняющимися функциями переменных  $x$  и  $y$ . Обозначим отношение характерной толщины слоя к характерному продольному масштабу  $L$  через  $\epsilon$ , тогда получим [7]

$$\begin{aligned} E_1 &= \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{inc}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) + \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{ref}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) A(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \end{aligned} \quad (31)$$

$$E_2 = \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{2elap}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) B^+(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{3ref}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) B^-(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (32)$$

$$E_3 = \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{3elap}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) C^+(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{4ref}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) C^-(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + E_{scat}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (33)$$

$$E_4 = \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{4elap}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) D^+(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{5ref}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) D^-(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + E_{\theta scat}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (34)$$

$$E_5 = \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{5elap}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) E(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (35)$$

где выражение (33) отражает условие включения в поле  $E_3$  рассеяния на параллельных цилиндрах, которые моделируют фибриллярную структуру  $E_{scat}$  и определено выражением (28),  $E_{\theta scat}$  отражает условие включения в поле  $E_4$  рассеяния на неоднородных частицах с нерегулярной формой, которые моделируют эритроциты и определены в [8,9],  $\tau_{inc}$ ,  $\tau_{1ref}$ ,  $\tau_{2elap}$ ,  $\tau_{3ref}$ ,  $\tau_{3elap}$ ,  $\tau_{4ref}$ ,  $\tau_{4elap}$ ,  $\tau_{5ref}$ ,  $\tau_{5elap}$  определены в [7]. Амплитуды  $A$ ,  $B^\pm$ ,  $C^\pm$ ,  $D^\pm$ ,  $E$  ищем в виде рядов по степеням малого параметра  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ , при этом выражения для амплитуд определяются аналогично методу, описанному в работе [7]. Условия непрерывности касательных компонент  $E$  и  $H$  на границах раздела сред порождают рекуррентную систему уравнений. Из этой системы для отраженного поля находится коэффициент отражения  $A$ .

Кратко рассмотрим задачу об отражении гауссова пучка с произвольным поперечным сечением. Задача решалась путем разложения полей встречных волн по плоским волнам в области среды 1 и их отражения слоем 2, обратного преобразования с последующим интегральным преобразованием Гюйгенса–Френеля для получения поля в исходном опорном сечении после обхода резонатора, таким образом, выражение для отраженного поля имеет следующий вид [7]:

$$E_{(ref)} = \frac{A_{00}(\xi''_1 + \xi''_2, k_{1y}, k_{1x}) \Phi(\xi''_1, \xi''_2)}{\alpha} - \frac{\epsilon_x}{\alpha} \left[ A_{10}(\xi''_1 + \xi''_2, k_{1y}, k_{1x}) + \frac{k_{13}}{kn_1} \xi''_1 A_{0000}(\xi''_1 + \xi''_2, k_{1y}, k_{1x}) \right] \Phi(\xi''_1, \xi''_2) - \frac{\epsilon_y}{\alpha} \left[ A_{01}(\xi''_1 + \xi''_2, k_{1y}, k_{1x}) + \frac{k_{23}}{kn_1} \xi''_2 A_{0000}(\xi''_1 + \xi''_2, k_{1y}, k_{1x}) \right] \Phi(\xi''_1, \xi''_2)$$

$$- \frac{\epsilon_x \epsilon_y}{\alpha} \left[ A_{11}(\xi''_1 + \xi''_2, k_{1y}, k_{1x}) + \frac{k_{13}}{kn_1} \xi''_1 A_{0000}(\xi''_1 + \xi''_2, k_{1y}, k_{1x}) \right] \Phi(\xi''_1, \xi''_2) - \frac{\epsilon_x \epsilon_y}{\alpha} \left[ \frac{k_{23}}{kn_1} \xi''_2 A_{0000}(\xi''_1 + \xi''_2, k_{1y}, k_{1x}) \right] \Phi(\xi''_1, \xi''_2) - \left[ \frac{\epsilon_x k_x^0}{ikn_1 \alpha} \left[ \frac{\partial A_{00}(\xi''_1 + \xi''_2, k_{1y}, k_{1x})}{\partial k_{1x}} + \frac{\partial A_{00}(\xi''_1 + \xi''_2, k_{1y}, k_{1x})}{\partial k_{1y}} \right] \frac{\partial \Phi(\xi''_1, \xi''_2)}{\partial \xi''_2} \right] - \left[ \frac{\epsilon_y k_x^0}{ikn_1 \alpha} \left[ \frac{\partial A_{00}(\xi''_1 + \xi''_2, k_{1y}, k_{1x})}{\partial k_{1x}} + \frac{\partial A_{00}(\xi''_1 + \xi''_2, k_{1y}, k_{1x})}{\partial k_{1y}} \right] \frac{\partial \Phi(\xi''_1, \xi''_2)}{\partial \xi''_2} \right] + O(\epsilon^2), \quad (36)$$

где

$$A_{00}(\xi''_1 + \xi''_2, k_{1y}, k_{1x}), \quad A_{10}(\xi''_1 + \xi''_2, k_{1y}, k_{1x}),$$

$$A_{0000}(\xi''_1 + \xi''_2, k_{1y}, k_{1x}), \quad A_{11}(\xi''_1 + \xi''_2, k_{1y}, k_{1x}),$$

$k_x^0, k_y^0, k_{13}, k_{23}, \alpha$  определены в [7].

Отметим, что отраженное поле зависит от параметров падающего пучка (угла падения, распределения поля в фиксированном сечении), геометрии границ отражающей среды. Отраженное поле представлено в виде суммы главного и поправочного членов асимптотики по малому параметру с погрешностью  $O(\epsilon^2)$ . При фиксированных параметрах системы можно выделить два основных фактора, определяющих искажение поля падающего пучка при отражении. Вклад первого фактора назовем геометрическим. Здесь отраженное поле получается умножением падающего поля пучка на коэффициент отражения плоской волны, падающей на среду под тем же углом, что и пучок. Вклад второго фактора назовем диффузионным. Он описывает искажение пучка при отражении за счет поперечной относительно направления распространения отраженного пучка диффузии амплитуды.

Полученные результаты представлены в форме асимптотики по малому параметру, имеющему смысл отношения характерного масштаба изменения профиля границы тела к характерному расстоянию, на котором это изменение произошло. Вычисления проведены с погрешностью порядка квадратичных членов асимптотики.

Полученные формулы конечны при любых значениях параметров системы, за исключением угла падения пучка. По углу падения формулы неравномерны. С ростом угла падения начинают расти поправочные члены асимптотики, что свидетельствует об увеличивающемся искажении пучка, таким образом, отражательные формулы справедливы в диапазоне  $0^\circ - 89^\circ$ .

Таким образом, нами были получены отражательные формулы для поля пучка с произвольным поперечным распределением, набегающего под произвольным углом

падения на некоторую поверхность с произвольным показателем преломления для случаев  $p$ - и  $s$ -поляризации падающего пучка.

Рассмотрим вопрос об определении интенсивности излучения. Интенсивность лазерного излучения определяются следующим образом:

$$I = |E_{\perp}|^2 + |E_{\parallel}|^2, \quad E_{\perp} = \cos(\theta)E_z + \sin(\theta)E_x, \\ E_{\parallel} = \sin(\theta)E_z - \cos(\theta)E_x, \quad (37)$$

где  $E_x, E_z$  даются следующими выражениями:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega\mu_0\mu_j H_x, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu_0\mu_j H_y, \quad (38)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu_0\mu_j H_z, \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon_j E_x, \quad (39)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon_j E_y, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon_j E_z. \quad (40)$$

Выражения (38)–(40) соответствуют системе уравнений Максвелла в декартовой системе координат. Подставим выражение (36) в (37) при условии, что моделируемый слой имеет фибриллярное строение, и тогда получим зависимость интенсивности лазерного излучения от электрофизических параметров (кривые дисперсии и спектры поглощения) моделируемой биологической структуры.

## Выводы

Модель была реализована в виде комплекса программ, что позволяет в автоматическом режиме варьировать на одной установке электрофизические параметры, характерные толщин слоев, а также характерные размеры исследуемой биологической структуры различного строения.

В результате систематического использования данного подхода вполне вероятно обнаружить корреляции между электрофизическими параметрами моделируемой биологической структуры и ее биологическими свойствами.

Построенная модель также позволяет теоретически рассчитывать спектральные характеристики биологических образцов с учетом фибриллярной структуры.

Таким образом, при помощи данной математической модели возможно измерение спектральных различий нормальной и патологической тканей для случая *in vivo* с целью построения спектрального автографа для определения патологических изменений в исследуемых биологических образцах.

## Список литературы

- [1] Зимняков Д.А., Синичкин Ю.П., Ушакова О.В. // Квант. электрон. 2007. Т. 37. Вып. 8. С. 777–783.
- [2] Панаев А.В. Исследование анизотропных оптических свойств и динамики иммерсионного просветления различных биотканей. Автореф. канд. дис. Саратов, 2007.
- [3] Kienle A., Forster F., Hibst R. // Opt. Lett. 2004. Vol. 29. N 22. P. 2617–2619.
- [4] Кантор Ч., Шимел П. Биофизическая химия. Т. 1. М., 1984.
- [5] Schäfer J., Lee Siu-Chun, Kienle A. // JQSRT. 2012. Vol. 113. P. 2113–2123.
- [6] Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. М., 1968.
- [7] Куликов К.Г., Радин А.М. // Опт. и спектр. 2004. Т. 96. № 3. С. 522–534.
- [8] Куликов К.Г. // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 12. С. 16–23.
- [9] Куликов К.Г. // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 12. С. 24–28.