

03

О нахождении аналитических выражений для декрементов в асимптотике маловязкой жидкости

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 13 декабря 2012 г.)

В асимптотике малой вязкости найдены декременты волн и осцилляций (для конечных объемов жидкости) нелинейных дисперсионных уравнений для плоской, цилиндрической и сферической геометрий. Для цилиндрической струи и плоской границы раздела вязких жидкостей декременты затухания определены впервые. Показано, что с уменьшением радиуса поверхности жидкой струи декремент капиллярных волн снижается. Показано, что в системе двух несмешивающихся жидкостей декремент затухания в зависимости от вязкостей сред и отношения их плотностей может быть как больше, так и меньше декремента затухания чистой жидкости, поскольку он определяется разностью коэффициентов кинематической вязкости чистых жидкостей. Оценен декремент для волн, возникающих из-за тангенциального скачка поля скоростей, на границе раздела жидкость–газ.

Введение

В гидродинамике наиболее часто используется модель идеальной жидкости, менее часто — модель вязкой жидкости. Одна из причин такого положения дел, не считая громоздкости и сложности самой математической процедуры нахождения решений задач для вязкой жидкости, в сложности дисперсионных уравнений, не допускающих существования строгих аналитических решений даже в простейших случаях. Но для случая малой вязкости, используя свойства комплексных чисел и асимптотические разложения, можно соответствующие дисперсионные уравнения упростить до решаемого вида. Преследуя методические цели (для иллюстрации предлагаемого метода), рассмотрим как до конца решенные задачи, так и те, решение которых ранее не найдено. Разберем эту проблему для различных геометрий жидких объектов, используя готовые дисперсионные уравнения (в целях экономии места).

Асимптотика малой вязкости не очень ограничивает рассмотрение, поскольку для многих реальных жидкостей (см., например, таблицу) коэффициент кинематической вязкости много меньше единицы. Если в расчетах для волн на плоской поверхности жидкости пользоваться безразмерными единицами, в которых плотность

жидкости, ее коэффициент поверхностного натяжения и ускорение свободного падения приняты за новые единицы измерения, то коэффициент кинематической вязкости будет еще меньше, чем показано в таблице.

Сферическая маловязкая капля

Пусть имеется сферическая капля идеально проводящей несжимаемой вязкой электропроводной жидкости радиуса R с массовой плотностью ρ , коэффициентами кинематической вязкости ν и поверхностного натяжения σ , имеющая электрический заряд Q , совершающая осцилляции в окрестности равновесной сферической формы капли. Задача расчета осцилляций такой капли решена в работе [1]. Временная часть решения ищется в виде $\sim \exp(st)$.

Дисперсионное уравнение для заряженной сферической капли вязкой диэлектрической жидкости с диэлектрической проницаемостью ϵ_* в безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \sigma = 1$, имеет вид [1]

$$s^2 + 2(l-1)(2l+1)\nu s + l(l-1)(l+2)\alpha_l + 2(l-1)^2(l+1) \frac{\nu s}{1 - \frac{\sqrt{s/\nu}}{2} \frac{i_l(\sqrt{s/\nu})}{i_{l+1}(\sqrt{s/\nu})} + (l+1)} = 0, \quad (1)$$

$$\alpha_l \equiv 1 - \frac{Q^2}{4\pi(l+2)} \frac{(l\epsilon_*^2 - (2l-5)\epsilon_* + (l+1))}{[l(\epsilon_* + 1) + 1]\epsilon_*},$$

где s — комплексная частота, l — номер моды, ν — коэффициент кинематической вязкости, $i_l(\sqrt{s/\nu})$ — сферическая функция Бесселя порядка l [2], переход к электропроводной жидкости элементарен: $\epsilon_* \rightarrow \infty$.

Следует отметить, что в принятых безразмерных переменных при записи в безразмерном виде коэффициент кинематической вязкости жидкости является функцией

Физико-химические свойства анализируемых сред

Материал	ν , cm ² /s	σ , g/s ²	ρ , g/cm ³
Вода	0.01	72	1
Ртуть	0.0012	465	13
Глицерин	8.5	60	1.26
Трансформаторное масло	0.23		0.85
Касторовое масло	11.61	36.4	0.96
Бензол	0.0074	23	0.879
Воздух	0.15		0.0012

размера капли. В самом деле, безразмерный коэффициент кинематической вязкости определяется соотношением $\nu\sqrt{\rho/R\sigma}$, т.е. размерный коэффициент кинематической вязкости умножается на $\sqrt{\rho/R\sigma}$. В итоге он зависит кроме радиуса капли еще и от плотности жидкости и ее коэффициента поверхностного натяжения. Для одной и той же жидкости ρ и σ постоянны, а R может меняться. Например, для капли воды с $R = 100\ \mu$, $\rho = 1\ \text{g/cm}^3$, $\sigma = 72\ \text{dyn/cm}$, $\nu = 0.01\ \text{cm}^2/\text{s}$ безразмерный коэффициент кинематической вязкости примерно равен $\nu = 0.0118$, для более крупных капель он будет еще меньше. Следует отметить, что из сказанного следует — требование малости коэффициента безразмерной вязкости не накладывает жесткого ограничения на размер капель, для которых годится полученное ниже выражение для декремента.

Найдем асимптотику (1) при малом ν . При $\nu \rightarrow 0$ аргумент сферических функций Бесселя, входящих в уравнение (1), обращается в бесконечность. Поэтому, чтобы понять, как ведет себя последнее слагаемое в (1) при $\nu \rightarrow 0$, следует воспользоваться асимптотическим разложением для сферических функций Бесселя при больших значениях аргумента [2]

$$i_l(x) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2x}} I_{(l+(1/2))}(x), \quad [2]$$

$$x \rightarrow \infty: \quad i_l(x) \approx \frac{1}{2x} \exp(x) \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right],$$

тогда отношение сферических функций Бесселя ($i_l(x)/i_{l+1}(x)$) при $x \rightarrow \infty$ имеет асимптотику

$$x \rightarrow \infty: \quad \frac{i_l(x)}{i_{l+1}(x)} \approx \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right],$$

следовательно, дробь в уравнении (1) при $x \rightarrow \infty$ предстает в виде

$$x \rightarrow \infty: \quad \frac{x^2}{1 - \frac{x}{2} \frac{i_l(x)}{i_{l+1}(x)} + (l+1)} \approx -\frac{x^2}{x/2} \approx 2x,$$

или в рассматриваемом случае в терминах переменной s получим

$$\begin{aligned} \nu \rightarrow 0: \quad \frac{\nu s}{1 - \frac{\sqrt{s/\nu}}{2} \frac{i_l(\sqrt{s/\nu})}{i_{l+1}(\sqrt{s/\nu})} + (l+1)} &\approx \frac{\nu s}{\frac{1}{2} \sqrt{s/\nu}} \\ &= 2\nu\sqrt{sv} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Видно, что четвертое слагаемое в дисперсионном соотношении (1) $\propto \nu^{3/2}$, а второе слагаемое $\propto \nu$, поэтому в случае маловязких жидкостей сохраним в (1) лишь слагаемые до первого порядка малости по ν включительно. Тогда получим следующее дисперсионное соотношение:

$$s^2 + 2(l-1)(2l+1)\nu s + l(l-1)(l+2)\alpha_l = 0. \quad (2)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде $s = i\omega + \beta$. Получим

$$\begin{aligned} (i\omega + \beta)^2 + 2(l-1)(2l+1)\nu(i\omega + \beta) \\ + l(l-1)(l+2)\alpha_l = 0. \end{aligned}$$

Приравняем нулю отдельно действительную и мнимую части этого уравнения

$$\begin{aligned} -\omega^2 + \beta^2 + 2(l-1)(2l+1)\nu\beta + l(l-1)(l+2)\alpha_l = 0, \\ \beta + (l-1)(2l+1)\nu = 0. \end{aligned}$$

Из второго из полученных уравнений видно, что декремент β равен

$$\beta = -(l-1)(2l+1)\nu.$$

Подставим это выражение в первое уравнение и, отбрасывая члены $\propto \nu^2$, получим частоту

$$\omega = \sqrt{l(l-1)(l+2)\alpha_l}.$$

Аналитическое выражение для декремента затухания капиллярных осцилляций капли можно получить и из других соображений, как, например, это сделано в работе [3], но изложенная процедура существенно проще.

Когда при достаточно большом заряде капли Q коэффициент α_l становится отрицательным, частота ω превращается в инкремент γ электростатической неустойчивости γ , умноженный на мнимую единицу $\omega = -i\gamma$.

В размерном виде декремент для сферической капли имеет вид

$$\beta = -(l-1)(2l+1) \frac{\nu}{R^2} \equiv -\left(\frac{l}{R} - \frac{1}{R}\right) \left(2\frac{l}{R} + \frac{1}{R}\right) \nu.$$

В пределе бесконечно больших размеров капли, вводя замену $k \approx l/R$, в пределе $R \rightarrow \infty$, $l \rightarrow \infty$, получим декремент затухания волн на плоской поверхности жидкости $\beta = -2k^2\nu$ [3].

Плоская поверхность маловязкой жидкости

Задача о волновом движении на заряженной свободной поверхности вязкой электропроводной однородно заряженной поверхности проводящей жидкости решена в [4]. Временная часть решения ищется в виде $\propto \exp(st)$. Дисперсионное уравнение заряженной свободной плоской поверхности жидкости в безразмерном виде, когда $g = \rho = \sigma = 1$, записывается как [4]

$$\begin{aligned} s^2 + 4\nu k^2 s - 4\nu^2 k^4 \left(1 - \sqrt{\frac{s}{\nu k^2} + 1} \right) + \omega_0^2 = 0, \quad (3) \\ \omega_0^2 = k(1 + k^2 - 4\pi k \kappa^2), \end{aligned}$$

где κ — безразмерная поверхностная плотность заряда, k — безразмерное волновое число, ω_0 — безразмерная

частота волн на заряженной поверхности идеальной жидкости.

Прямое решение (3) невозможно. Асимптотика (3) при $\nu \rightarrow 0$, когда членами, содержащими коэффициент кинематической вязкости ν в больших степенях, чем первая, можно пренебречь, имеет вид

$$s^2 + 4\nu k^2 s - \omega_0^2 = 0.$$

Подставим сюда $s \approx i\omega + \beta$ и получим

$$(i\omega + \beta)^2 + 4\nu k^2(i\omega + \beta) + \omega_0^2 \equiv 0.$$

Приравняем нулю отдельно мнимую и действительную части этого уравнения и получим систему уравнений относительно частоты ω и декремента β , имеющую в пренебрежении членами $\propto \nu^2$ решения

$$\begin{aligned} \beta &= -2\nu k^2, \\ \omega^2 &= \omega_0^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Видно, что в линейном по ν приближении кинематическая вязкость не сказывается на частоте волн.

Цилиндрическая струя

Пусть в вакууме цилиндрическая струя радиуса R жидкости с массовой плотностью ρ , кинематической вязкостью ν и коэффициентом поверхностного натяжения σ движется вдоль оси симметрии невозмущенной струи со скоростью U_0 [5]. Временная часть решения ищется в виде $\propto \exp(st)$.

Дисперсионное уравнение для незаряженной струи, связывающее частоту s волн с их волновым числом k в системе отсчета, движущейся вместе со струей, будет иметь в безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \sigma = 1$, вид [5]

$$\begin{aligned} s^2 + 4\nu k^2 s \left[\frac{I_1'(k)}{I_0(k)} - \frac{2kl}{k^2 + l^2} \frac{I_1(k)}{I_0(k)} \frac{I_1'(l)}{I_1(l)} \right] \\ = k(1 - k^2) \frac{I_1(k)}{I_0(k)} \frac{l^2 - k^2}{l^2 + k^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Это дисперсионное уравнение в общем случае весьма сложно, так как l зависит от s и не может быть решено аналитически. Ограничимся рассмотрением предельного случая маловязкой жидкости.

В пределе имеем по известной формуле теории функции Бесселя (при $x \gg 1$) [2,5]

$$\begin{aligned} I_n(x) &\propto \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \\ I_1(x) &\approx I_0(x) \approx \frac{\exp(x)}{\sqrt{2\pi x}}, \\ I_m'(x) &= I_{m-1}(x) - \frac{m}{x} I_m(x). \end{aligned}$$

Поэтому при $l \gg 1$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{I_1'(l)}{I_1(l)} &\equiv \frac{I_0(l) - \frac{1}{l} I_1(l)}{I_1(l)} = 1 - O\left(\frac{1}{l}\right), \\ \frac{I_1(l)}{I_0(l)} &= 1 - O\left(\frac{1}{l}\right), \\ \frac{2kl}{k^2 + l^2} &\rightarrow 0, \quad \frac{l^2 - k^2}{l^2 + k^2} \rightarrow 1 - O\left(\frac{k^2}{l^2}\right). \end{aligned}$$

Если вязкость достаточно мала, то в интересующей области длин волн имеет место неравенство [5]

$$\frac{s}{\nu} \gg k^2 \quad \text{или} \quad l \gg k.$$

При $l \gg k$ уравнение (5) приобретает относительно простой вид

$$s^2 + 4\nu k^2 s \frac{I_1'(k)}{I_0(k)} = k(1 - k^2) \frac{I_1(k)}{I_0(k)}.$$

Подставим сюда $s \equiv i\omega + \beta$. Получим

$$(i\omega + \beta)^2 + 2\nu k^2(i\omega + \beta) \frac{I_1'(k)}{I_0(k)} = k(1 - k^2) \frac{I_1(k)}{I_0(k)}.$$

Приравняем нулю отдельно мнимую и действительную части этого уравнения

$$\begin{aligned} -\omega^2 + \beta^2 + 2\nu k^2 \beta &= k(1 - k^2) \frac{I_1(k)}{I_0(k)}, \\ \beta + 2\nu k^2 \frac{I_1'(k)}{I_0(k)} &= 0. \end{aligned}$$

Из второго из полученных уравнений находим аналитическое выражение для декремента

$$\beta = -2\nu k^2 \frac{I_1'(k)}{I_0(k)}. \quad (6)$$

Подставим это выражение в первое уравнение и, отбрасывая члены $\sim \nu^2$, получим частоту

$$\omega = \pm \sqrt{k(k^2 - 1)} \frac{I_1(k)}{I_0(k)}. \quad (7)$$

Наличие на струе электрического заряда декремента не меняет и сказывается лишь на частоте капиллярных волн [6]. Выражение для декремента затухания капиллярных волн на струе получено впервые.

Из соотношений (6) и (7) можно видеть, что если выражения для декремента затухания и частоты капиллярных волн (на незаряженной струе) записать в размерном виде, то они при $R_0 \rightarrow \infty$ превращаются в соответствующие выражения для капиллярных волн на плоской свободной поверхности жидкости.

На рис. 1 приведены графики зависимости отношения безразмерного декремента, описываемого соотношением (6), к безразмерной вязкости для струи и для плоской

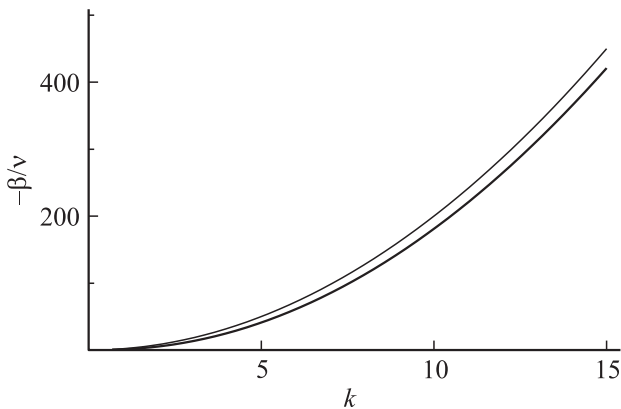


Рис. 1. Зависимости отношения безразмерного декремента затухания к безразмерному же коэффициенту кинематической вязкости от безразмерного волнового числа k . Тонкой линией приведена зависимость $2k^2$ по (4), толстой — $2k^2 I_1'(k)/I_0(k)$ по (6).

поверхности (декремент затухания для нее описывается (4)). Увеличение кривизны поверхности струи приводит к снижению как декрементов затухания, так и частот капиллярных волн по сравнению с плоской поверхностью жидкости.

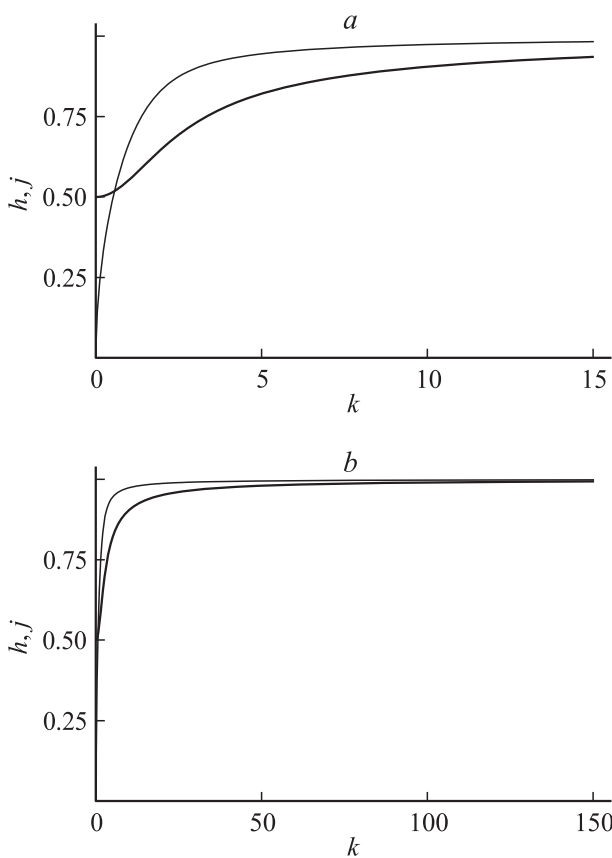


Рис. 2. Зависимости от безразмерного волнового числа коэффициентов $h \equiv I_1'(k)/I_0(k)$ (толстая линия), $j \equiv \sqrt{I_1(k)}/I_0(k)$ (тонкая линия): a — в большем масштабе, b — в мелком масштабе.

На рис. 2 для наглядности приведена зависимость от волнового числа (в разных масштабах) коэффициентов $h \equiv I_1'(k)/I_0(k)$ (толстой линией), $j \equiv \sqrt{I_1(k)}/I_0(k)$ (тонкой линией), происходящих из-за кривизны поверхности и присутствующих в (6), (7). Видно, что при больших значениях безразмерного k (при больших значениях размерного радиуса кривизны поверхности) эти коэффициенты становятся весьма близкими к единице. Видно, что для не очень больших k , а конкретнее при $k \leq 10$ (для тонких струй и не очень коротких длин волн), влияние кривизны поверхности, по которой бегут волны, заметно сказывается как на величине их декрементов затухания, так и на частотах. При больших k влияние кривизны поверхности жидкости, по которой бежит волна, не существенно.

Заряженная граница раздела несмешивающихся вязких жидкостей

Пусть вязкие, несжимаемые жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 , где $\rho_1 \geq \rho_2$, с коэффициентами кинематической вязкости ν_1 и ν_2 , заполняют в поле сил тяжести \mathbf{g} полупространства $z \leq 0$ и $z > 0$ соответственно, а σ_{ij} — коэффициент поверхностного натяжения границы раздела. Временная часть решения ищется в виде $\propto \exp(st)$.

Точное дисперсионное уравнение задачи расчета волнового движения в безразмерных переменных, в которых $\rho_1 = g = \sigma_{ij} = 1$, имеет вид [7]

$$\begin{aligned}
 & [k(1 - \rho)^2 - (1 + \rho)(\rho q_1 + q_2)]s^2 \\
 & + 4k^2(\nu_1 - \rho\nu_2)[k(1 - \rho) + \rho q_1 - q_2]s \\
 & + 4k^3(k - q_1)(k - q_2)(\nu_1 - \rho\nu_2)^2 \\
 & + k(k^2 - Wk + 1 - \rho)[k(1 + \rho) - (\rho q_1 + q_2)] = 0, \\
 & \rho \equiv \rho_2/\rho_1,
 \end{aligned}$$

$$q_1 = k\sqrt{1 + \frac{s}{\nu_1 k^2}}, \quad q_2 = k\sqrt{1 + \frac{s}{\nu_2 k^2}}, \quad W = \frac{\varepsilon_* E_0^2}{4\pi}.$$

Прямое решение этого уравнения невозможно в виду его нелинейности, поэтому выпишем его асимптотику в расчете на получение в итоге разрешаемого уравнения. В пределе маловязких жидкостей $\nu_2 \ll 1$ и $\nu_1 \ll 1$ (когда $q_1 \gg k$, $q_2 \gg k$) дисперсионное соотношение имеет более простой вид. Подставим в него $s \equiv -i\omega - \beta$. Получим

$$\begin{aligned}
 (-i\omega - \beta)^2 - \frac{4k^2}{(1 + \rho)} \frac{(\rho\sqrt{\nu_2} - \sqrt{\nu_1})}{(\rho\sqrt{\nu_2} + \sqrt{\nu_1})} (\nu_1 - \rho\nu_2)(-i\omega - \beta) \\
 + \frac{k(k^2 - Wk + 1 - \rho)}{(1 + \rho)} = 0.
 \end{aligned}$$

Приравняем нулю отдельно мнимую и действительную части этого уравнения

$$-\omega^2 - \beta^2 - \frac{4k^2}{(1+\rho)} \frac{(\rho\sqrt{v_2} - \sqrt{v_1})}{(\rho\sqrt{v_2} + \sqrt{v_1})} (v_1 - \rho v_2)\beta - \omega_0^2 = 0,$$

$$-\beta + \frac{2k^2}{(1+\rho)} \frac{(\rho\sqrt{v_2} - \sqrt{v_1})}{(\rho\sqrt{v_2} + \sqrt{v_1})} (v_1 - \rho v_2) = 0.$$

Из второго из полученных уравнений найдем декремент

$$\beta = -\frac{2k^2}{(1+\rho)} \frac{(\sqrt{v_1} - \rho\sqrt{v_2})}{(\sqrt{v_1} + \rho\sqrt{v_2})} (v_1 - \rho v_2). \quad (8)$$

Подставим это выражение в первое уравнение и, отбрасывая члены $\sim v^2$, получим аналитическое выражение для частоты

$$\omega = \sqrt{\frac{k(k^2 - Wk + 1 - \rho)}{(1+\rho)}},$$

совпадающее с полученным ранее [7,8].

Несложно видеть из (8), что убирая любую из жидкостей (т.е. полагая $v_2 \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$ или $v_1 \rightarrow 0$, $\rho^{-1} \rightarrow 0$), мы осуществляем переход к (4). В том же случае, когда присутствуют обе среды, то на величину декремента затухания влияют физико-химические характеристики обеих жидкостей.

Следует отметить, что волны, порождаемые границей раздела сред, отличаются по своим характеристикам и зависимостям от волн, порождаемых свободной поверхностью жидкости. Этот вопрос частично исследован в работах [9,10]. Но, тем не менее, вопрос о декременте затухания волн, порождаемых границей раздела сред, даже не ставился, как слишком сложный для исследования.

В таблице приведены коэффициенты поверхностного натяжения для чистых веществ на границе с собственным насыщенным паром. Для оценки величины коэффициента поверхностного натяжения границы раздела i -й и j -й сред (σ_{ij}), будем пользоваться правилом Антонова [11], согласно которому $\sigma_{ij} = |\sigma_i - \sigma_j|$. Из таблицы видно, кроме прочего, что для многих жидкостей (особенно в безразмерном виде) коэффициенты кинематической вязкости (особенно в безразмерном виде) удовлетворяют условию $\nu \ll 1$, а потому настоящие оценки и расчеты к ним применимы без ограничений.

На рис. 3 приведены результаты расчетов по (4) и по (8). Видно, что учет наличия внешней среды может приводить как к снижению декрементов, так и к их увеличению по сравнению с однородной жидкостью в зависимости от соотношения вязкостей конкретных сред. Интересной особенностью найденного декремента является то, что он определяется не произведением коэффициентов кинематической вязкости контактирующих жидкостей, а их разностью, и величина декремента слоисто-неоднородной жидкости будет превышать декремент чистой жидкости, если разность коэффициентов кинематической вязкости для слоев больше, чем его величина для чистой жидкости, и наоборот.

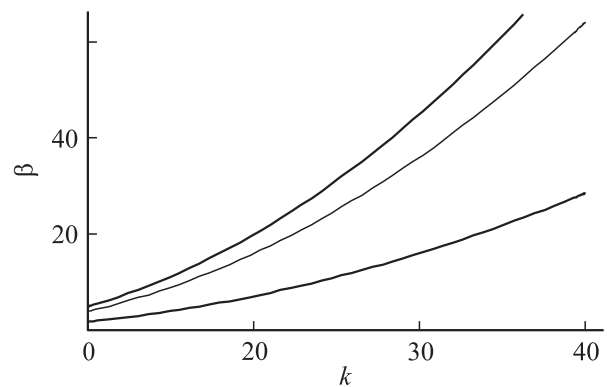


Рис. 3. Результаты расчетов декрементов по (4) и по (8).

Все кривые рассчитаны в безразмерном виде. Следует отметить, что из соображений представительности графика кривые на рис. 3 рассчитаны не для кинематических вязкостей конкретных жидкостей, а при абстрактно выбранных коэффициентах кинематической вязкости, впрочем, лежащих в пределах изменения характеристик жидкостей, приведенных в таблице.

Учтено, что масштабы обезразмеривания вязкости ($\nu^* \equiv \sqrt[4]{\sigma_1^3 / \rho_1^3 g}$) для случая границы жидкости с вакуумом и для границы раздела двух жидкостей различаются (учитываем, что коэффициент поверхностного натяжения свободной поверхности больше, чем коэффициент поверхностного натяжения границы раздела сред в соответствии с правилом Антонова [11]), поскольку при практически неизменных ρ_1 и g коэффициент поверхностного натяжения границы раздела сред σ изменяется. Расчеты по (4) проводились при $\nu_1 = 0.02$ (изображено тонкой линией), а расчеты по (8) (изображено толстыми линиями) — при $\nu_2 = 0.08$ (нижняя толстая линия на графике) и $\nu_2 = 0.12$ (верхняя толстая линия). Принималось также, что отношение плотностей сред $\rho = 0.95$.

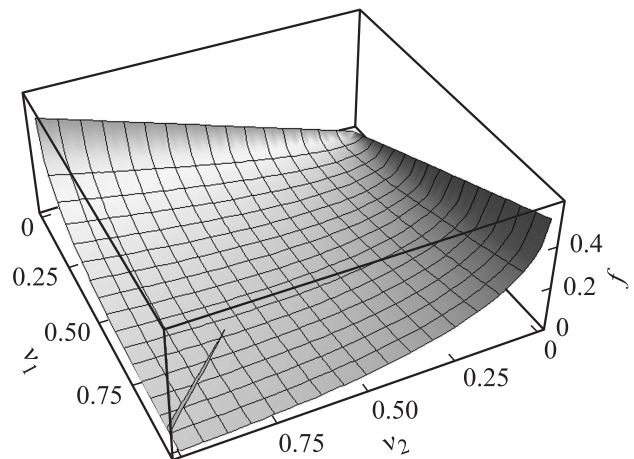


Рис. 4. Зависимость коэффициента f от величины безразмерных коэффициентов кинематических вязкостей сред.

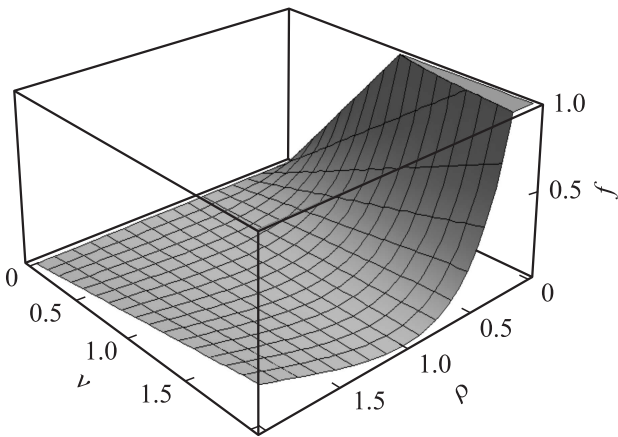


Рис. 5. Зависимость множителя f от безразмерного коэффициента кинематической вязкости при $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ и от отношения плотностей сред ρ .

Несложно видеть, что (4) и (8) различаются только множителем

$$f \equiv \frac{1}{(1 + \rho)} \frac{(\rho\sqrt{\nu_2} - \sqrt{\nu_1})}{(\rho\sqrt{\nu_2 + \nu_1})} (\rho\nu_2 - \nu_1),$$

вид которого приведен на рис. 4. Несложно видеть, что множитель f , определяющийся разностью коэффициентов кинематической вязкости для контактирующих жидкостей, сравним с единицей или существенно превышает ее, только когда коэффициент кинематической вязкости одной из жидкостей мал, а второй велик. Правда, коэффициент кинематической вязкости верхней жидкости умножается на отношение плотностей, которое играет, таким образом, существенную роль. Чтобы убедиться в этом, положим $\nu_1 = \nu_2$ и получим

$$f \equiv \frac{(1 - \rho)^2}{(1 + \rho)^2} \nu.$$

Соответствующая зависимость f от ρ и от ν приведена на рис. 5. Например, для пары сред вода–воздух (коэффициент кинематической вязкости воздуха в 15 раз больше такового для жидкой воды), если моделировать их идеальными жидкостями, но для этого случая мало отношение плотностей, порядка тысячных долей. Поэтому в целом воздух оказывает малое влияние на величину декремента волн на поверхности воды. Это обстоятельство позволяет относительно легко исследовать влияние вязкости жидкости на величину декремента затухания волн, порождаемых тангенциальным разрывом поля скоростей несмешивающихся жидкостей (волн, возникающих при реализации неустойчивости Кельвина–Гельмгольца), учитывая лишь вязкость нижней жидкости и моделируя верхнюю среду идеальной несжимаемой жидкостью.

Из рис. 5 видно, что при $\rho \rightarrow 1$ декремент затухания волн, порождаемых границей раздела сред, стремится к нулю, что соответствует исчезновению границы раздела.

При $\rho > 1$ граница раздела сред снова возникает. При этом верхняя жидкость имеет большую массовую плотность, чем нижняя, и в системе реализуется неустойчивость Рэлея–Тейлора, а соответствующие точки поверхности, приведенной на рис. 5, отражают снижение инкремента нарастания этой неустойчивости.

Точки поверхности, приведенной на рис. 5 при $\nu \gg 0$ носят чисто иллюстративный характер.

Тангенциальный разрыв поля скоростей несмешивающихся жидкостей (неустойчивость Кельвина–Гельмгольца)

Пусть имеются две несмешивающиеся несжимаемые жидкости, верхняя из которых идеальная, диэлектрическая с диэлектрической постоянной ϵ_* , имеет плотность ρ_1 и заполняет в поле сил тяжести \mathbf{g} полубесконечное пространство $z > 0$ ($\mathbf{g}_{||} - \mathbf{n}_z$, \mathbf{n}_z — орт декартовой оси), а нижняя, вязкая с коэффициентом кинематической вязкости ν , идеально проводящая, плотности ρ_2 , заполняет полупространство $z \leq 0$. Для общности примем, что граница раздела сред однородно заряжена с постоянной плотностью $\kappa \equiv \epsilon_* E_0 / 4\pi$ так, что в верхней среде имеется электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}_0 \equiv E_0 \mathbf{n}_z$. Примем также, что $\rho_2 > \rho_1$, хотя на иллюстрационных графиках принимается, что $(\rho_1/\rho_2) > 1$. Неустойчивость Рэлея–Тейлора, реализующаяся при таких соотношениях между плотностями, не является предметом настоящего исследования. Плоскость $z = 0$ совпадает с невозмущенной границей раздела сред, характеризуемой коэффициентом поверхностного натяжения σ . Пусть верхняя среда движется параллельно границе раздела с постоянной скоростью V вдоль орта \mathbf{n}_x , а начальные условия имеют вид

$$t = 0: \quad u = V, \quad \xi(x, t) = \xi \cos kx, \quad \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} = 0,$$

где k — волновое число, ξ — амплитуда волны, $\xi(x, t)$ — функция, описывающая малое вертикальное отклонение границы раздела сред от равновесного в поле силы тяжести состояния. Временная часть решения ищется в виде $\sim \exp(-ist)$.

Дисперсионное уравнение такой задачи похоже на дисперсионное уравнение о плоских волнах в вязкой жидкости [4,5], только частота определяется с учетом аэродинамического давления [8,12], и имеет вид

$$(1 + \rho)s^2 + (i4k^2\nu - 2\rho kV)s - 4k^4\nu^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{is}{k^2\nu}}\right) = \omega_0^2,$$

$$\omega_0^2 \equiv k[g(1 - \rho) + \rho_2^{-1}\sigma k^2 - k(\rho V^2 + 4\pi\epsilon^{-1}\rho_2^{-1}\kappa^2)],$$

$$\rho \equiv \rho_1/\rho_2. \tag{9}$$

В приближении малой вязкости (при $k^2\nu \ll 1$, что имеет место при $k < 1/\sqrt{\nu}$) дисперсионное уравнение упрощается

$$(1 + \rho)s^2 + (i4k^2\nu - 2\rho kV)s - \omega_0^2 = 0.$$

Подставим сюда $s \equiv -\omega - i\beta$ и приравняем нулю отдельно мнимую и действительную части этого уравнения

$$(\omega^2 - \beta^2)(1 + \rho) - (2\rho kV\omega + 4k^2\beta) - \omega_0^2 = 0, \quad (10)$$

$$(1 + \rho)\omega\beta - 2k^2\nu\omega + \rho kV\beta = 0. \quad (11)$$

Из (11) найдем декремент

$$\beta = \frac{2\nu k^2\omega}{(1 + \rho)\omega + \rho kV}. \quad (12)$$

Из (10), с точностью до слагаемых $\sim \nu^2$ получим уравнение для нахождения частоты

$$\omega^2(1 + \rho) - 2\rho kV\omega - \omega_0^2 = 0.$$

Видно, что в линейном приближении по ν частоты волн не зависят от вязкости, зависимость от нее появляется лишь в следующем приближении.

На рис. 6 приведена поверхность, иллюстрирующая зависимость величины декремента от скорости потока верхней жидкости (от величины параметра $We \equiv \rho V^2$) и от безразмерного волнового числа, построенная по (12) в безразмерных переменных, в которых $\rho_2 = g = \sigma = 1$, для ситуации, когда безразмерный коэффициент вязкости $\nu = 0.002$, безразмерное отношение плотностей $\rho = 0.001$, а безразмерный параметр $W \equiv \varepsilon_* E_0^2 / 4\pi = 0.5$ (для границы раздела воды и воздуха, который моделируется идеальной несжимаемой диэлектрической жидкостью). Расчеты показывают, что зависимость декремента от вязкости жидкости и отношения плотностей в рассматриваемой ситуации пренебрежимо слаба. Все сказанное относится к ветви

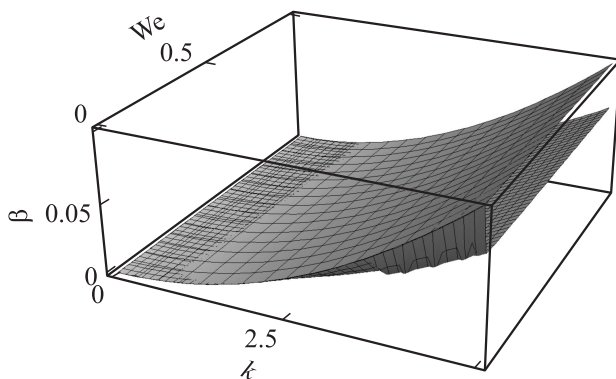


Рис. 6. Зависимость величины безразмерного декремента для волн на границе раздела воды и воздуха от скорости потока воздуха (от величины безразмерного параметра We) и от безразмерного волнового числа k , рассчитанная при $\nu = 0.002$, $\rho = 0.001$, $W = 0.5$.

частоты со знаком „+“ перед радикалом. При расчетах принималось, что $\omega^2 > 0$.

При больших значениях напряженности поля в определенной области по k , где реализуется электрогидродинамическая неустойчивость или неустойчивость Рэлея–Тейлора, выражение для квадрата частоты меняет знак на противоположный $\omega^2 < 0$. В этом случае в (10) вместо чисто вещественной частоты ω следует подставить комплексную $\omega \equiv -i\gamma + \omega_V$, где $\omega_V \equiv \frac{\rho V k}{(1 + \rho)}$, а

$$i\gamma \equiv \sqrt{\frac{\rho^2 V^2 k^2 + \omega_0^2 (1 + \rho)}{(1 + \rho)^2}}.$$

Вместо ω_0^2 следует подставить $-\omega_0^2$, тогда, пренебрегая слагаемыми $\sim \nu^2$, получим

$$[\omega_V^2 - (\beta - \gamma)^2](1 + \rho) + [2\rho kV\omega_V + 4k^2\nu(\beta - \gamma)] + \omega_0^2 = 0,$$

$$(1 + \rho)\omega_V(\beta - \gamma) - 2k^2\nu\omega_V + \rho kV(\beta - \gamma) = 0.$$

Из второго из полученных уравнений с учетом того, что $\omega_V \equiv \frac{\rho V k}{(1 + \rho)}$, получим

$$\beta - \gamma = \frac{\nu k^2}{(1 + \rho)}.$$

Видно, что в этом случае декремент затухания только снижает величину инкремента неустойчивости за счет вязкого затухания движений границы раздела сред, и меньше, чем для однородной жидкости.

Заключение

В приближении малой вязкости (накладываемое ограничение на вязкость мало ограничивает набор жидкостей, к которым анализ применим) исследовано влияние вязкости жидкости на капиллярное волновое движение. Найдены аналитические асимптотические декременты затухания капиллярных волн для струи и капли, а также для границы раздела несмешивающихся жидкостей. Показано, что в системе двух несмешивающихся жидкостей декремент затухания в зависимости от кинематических вязкостей компонент и отношения плотностей может быть как больше, так и меньше декремента затухания чистой жидкости. На границе раздела вода–воздух влиянием воздушной среды на затухание капиллярных волн можно в первом приближении пренебрегать.

Список литературы

- [1] Ширяева С.О., Григорьев А.И. Скаляризация векторных краевых задач гидродинамики. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2010. 180 с.
- [2] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
- [3] Лэмб Г. Гидродинамика. М.–Л.: ОГИЗ, 1947. 928 с.

- [4] Григорьев А.И., Григорьев О.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 9. С. 12–21.
- [5] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматлит, 1959. 699 с.
- [6] Ширяева С.О., Григорьев А.И. Спонтанный распад струй. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2012. 204 с.
- [7] Григорьев А.И., Пожарицкий Д.М., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 9. С. 26–32.
- [8] Григорьев А.И., Суханов С.А., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 4. С. 99–109.
- [9] Григорьев А.И., Федоров М.С., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 5. С. 130–140.
- [10] Григорьев А.И., Федоров М.С., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 11. С. 31–39.
- [11] Рид Р., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей. Л.: Химия, 1971. 704 с.
- [12] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Суханов С.А. // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 3. С. 48–53.