

Метод расчета монохроматического поля в слоистой среде

© И.А. Конников

e-mail: konnikov_i@mail.ru

(Поступило в Редакцию 14 декабря 2012 г.)

Предложен приближенный метод расчета монохроматического поля, описываемого волновым уравнением, в слоистой среде. Метод основан на использовании эквивалентной постоянной распространения и позволяет снизить объем вычислений по сравнению с другими методами, основанными на строго динамическом подходе. Проведена оценка области корректного использования метода на примере задач, для которых известно точное решение.

Введение

Волновое уравнение — практически точная макроскопическая математическая модель электромагнитного поля, используемая при решении целого ряда актуальных задач во многих технических приложениях. Как известно [1,2], строгое аналитическое решение волнового уравнения на частоте $\omega > 0$ для электромагнитного поля в слоистой среде описывается интегралом на действительной полуоси от комплекснозначной функции, известным как решение Зоммерфельда.

Методы вычисления указанного интеграла хорошо известны. Значения интеграла вычисляются приближенно, для чего применяются различные численные схемы, либо асимптотические методы (чаще всего это метод перевала), либо их комбинации. Для решения многих прикладных задач и, особенно, для проведения научных исследований такие методы обычно являются вполне приемлемыми. Однако, опуская детальный разбор известных решений, обобщая полученные к настоящему времени результаты, можно констатировать, что для некоторых технических приложений решение Зоммерфельда все же мало пригодно для практического использования. В частности, для решения проектных задач радиоэлектроники (например, для количественной оценки перекрестных помех), где поле иногда требуется вычислять сотни и даже тысячи раз. При использовании компьютеров широко доступного класса решение Зоммерфельда совершенно непригодно вследствие непомерно высоких затрат машинного времени. Тем же недостатком обладают и хорошо известные методы расчета поля, использующие пространственную дискретизацию моделируемого объекта на мелкой сетке (метод конечных элементов, метод моментов и др. [3]). Не сможет существенно изменить ситуацию и предназначенный специально для решения задач радиоэлектроники метод эквивалентной схемы частичного элемента (PEEC-method) [4,5], разработку которого, по-видимому, можно считать в основном завершенной. Дальнейшее снижение вычислительной емкости методов расчета поля для решения проектных задач остается по-прежнему актуальным. Необходим прагматичный, „технический“ подход к решению задачи, получивший в теоретической физике решение, не всегда пригодное для практического использования.

Предлагаемый метод

Вычислительную емкость задач, включающих расчет поля, можно значительно снизить, если использовать электродинамический подход на основе предложенного в работе [6] метода эквивалентной постоянной распространения (ЭПР). Основная идея метода состоит в том, что функция Грина G , которая является решением волнового уравнения, для слоистой среды описывается выражением того же вида, что и для однородной среды:

$$G = M \exp(-ik_{\text{эпр}}R)/R, \quad (1)$$

где M — амплитудный множитель, $k_{\text{эпр}} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e \mu_0 \mu_e}$ — ЭПР, R — расстояние между точкой, где вычисляется поле, и точкой, где расположен элементарный источник поля, константа Кулона $\varepsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi)$, константа Био-Савара $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$, ε_e и μ_e — эквивалентные относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости слоистой среды соответственно, ω — угловая частота, через i обозначена мнимая единица.

Однако предложенные в [6] формулы для ε_e и μ_e целесообразно упростить. Модифицированные формулы имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_e(r) &= \frac{1}{R} \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) F_0(\lambda) d\lambda, \\ \mu_e(r) &= R \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \Phi_0(\lambda) d\lambda, \end{aligned} \quad (2)$$

где $F_0(\lambda)$ — полученная при решении электростатической задачи математическая модель слоистой среды, которая соответствует конструкции электронного модуля [7], $\Phi_0(\lambda)$ — полученная при решении магнитостатической задачи математическая модель той же среды, J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, x, y, z — абсцисса, ордината и аппликата точки, где вычисляется поле, x_0, y_0, z_0 — абсцисса, ордината и аппликата точки, где расположен источник поля, несобственные интегралы вычисляются по методике, описанной в работе [8].

При таком определении величин ε_e и μ_e они не зависят ни от размеров источника, ни от его формы, что

существенно снижает требуемый объем вычислений по сравнению с вариантом, предложенным в работе [6].

Идея описания электромагнитного процесса динамической математической моделью, один из параметров которой рассчитывается в квазистационарном приближении, не нова. Этот прием был использован, например, для описания электромагнитных процессов в линиях с распределенными параметрами с помощью уравнения Гельмгольца [9]. Решение этого уравнения хорошо известно. Оно описывает распространение падающей и отраженной волн в канале распространения электромагнитной энергии, включающем проводник, и представляет собой сумму двух слагаемых с экспоненциальной зависимостью от расстояния. Показатели экспонент отличаются знаком и вычисляются через распределенные параметры линии, в том числе — через емкость и индуктивность, которые рассчитываются на основе решения уравнений Лапласа для потенциалов электрического и магнитного полей, т.е., строго говоря, на постоянном токе. Тем не менее, полученная математическая модель эффективно используется в весьма широком диапазоне частот. На этой основе была построена мощная теория, известная как теория линий с распределенными параметрами, область корректного применения которой весьма обширна и давно известна. Корректность использования указанного приема для описания аналогичных процессов в канале распространения электромагнитной энергии, не содержащем проводник, обсуждалась в [10]. Рассмотрим этот вопрос более подробно, проведя оценку степени адекватности математической модели (1) на примере задач, допускающих строгое решение.

Вертикальный диполь в слоистой среде

Как известно [2], строгое решение волнового уравнения относительно векторного потенциала поля A_v , создаваемого вертикальным элементом тока (вертикальным элементарным диполем) в ν -м слое среды с плоскопараллельными границами раздела слоев, на частоте $\omega > 0$ описывается интегралом

$$A_v(r, z, z_0, \omega) = M \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \Phi_v(\lambda, z, z_0, \omega) d\lambda,$$

где комплекснозначная функция $\Phi_v(\lambda, z, z_0, \omega)$ — математическая модель слоистой среды [7], определяемая на частоте ω из граничных условий для векторного потенциала на границах раздела слоев, M — амплитудный множитель.

В квазистатике при $\omega \rightarrow 0$

$$A_{0v}(r, z, z_0) = M \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \Phi_{0v}(\lambda, z, z_0) d\lambda,$$

где $\Phi_{0v}(\lambda, z, z_0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \Phi_v(\lambda, z, z_0, \omega)$.

С помощью простейшего тождественного преобразования это выражение может быть представлено в виде

$$A_{0v}(r, z, z_0) = \frac{M}{R} \left[\frac{\int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \Phi_{0v}(\lambda, z, z_0) d\lambda}{1/R} \right].$$

Поскольку для диполя по определению (2) выражение в квадратных скобках есть эквивалентная магнитная проницаемость μ_e , принятая в методе ЭПР, то

$$A_{0v}(r, z, z_0) = \frac{M\mu_e}{R}.$$

Таким образом, при одинаковых обозначениях выражение, с помощью которого поле описывается методом ЭПР, совпадает с известным выражением для векторного потенциала на постоянном токе, которое является решением уравнения Лапласа. Аналогичный вывод с разницей лишь в обозначениях можно провести для скалярного электрического потенциала поля. Следовательно, можно полагать, что на постоянном токе метод ЭПР дает точные значения поля. Это значит, что наибольшей точностью метод обладает в области нижних (не значит низких) частот, где корректность его использования бесспорна. Как показал вычислительный эксперимент, рабочие частоты метода могут составлять единицы, десятки и даже сотни гигагерц.

Вертикальный диполь на идеально проводящей плоскости

Как известно, решение волнового уравнения для вектора-потенциала вертикального элементарного диполя на идеально проводящей плоскости, над которой находится свободное полупространство, имеет вид [2]

$$A_v = 2M \frac{\exp(-ik_0R)}{R},$$

где $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ — постоянная распространения электромагнитной волны в верхнем (свободном) полупространстве.

То же на постоянном токе (частота $\omega = 0$)

$$A_v = \frac{2M}{R}.$$

Отсюда эквивалентная относительная магнитная проницаемость, по определению равная отношению потенциалов магнитного поля, создаваемого проводником в свободном пространстве и в рассматриваемой структуре (т.е. в свободном полупространстве над идеально проводящей плоскостью), $\mu_e = 2$.

Общеизвестно (и нетрудно проверить), что потенциал электростатического поля в области над идеально проводящей плоскостью также удваивается и эквивалентная относительная диэлектрическая проницаемость, по определению равная отношению потенциалов электрического поля, создаваемого его источником в свободном

пространстве и в рассматриваемой структуре, $\varepsilon_e = 1/2$. Тогда ЭПР

$$k_{\text{епр}} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e \mu_0 \mu_e} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = k_0,$$

а определяемый по методу ЭПР векторный потенциал электромагнитного поля

$$A_{\text{епр}} = 2M \frac{\exp(-ik_0 R)}{R}.$$

Таким образом, $A_{\text{епр}} = A_v$.

Аналогично определяемый по методу ЭПР электрический скалярный потенциал равен

$$\varphi_{\text{епр}} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_e} \frac{\exp(-ik_0 R)}{R} = \frac{1}{2\pi \varepsilon_0} \frac{\exp(-ik_0 R)}{R},$$

и, следовательно, в рассматриваемой структуре метод ЭПР дает точные значения как векторного, так и скалярного потенциалов электромагнитного поля вертикального диполя над идеально проводящей плоскостью на любой частоте. Таким образом, точность метода тем выше, чем больше проводимость подстилающей поверхности.

Горизонтальный диполь на плоской границе полупространств

Более важен и информативен случай горизонтального диполя на плоской границе однородных изотропных полупространств с постоянными распространения k_{v-1} и k_v , для которого также известно строгое решение. Именно через поле горизонтального диполя вычисляются помехи в коммутационных проводниках микросхем и печатных плат. Кроме того, именно поле горизонтального источника на плоской границе полупространств является главной (т.е. наиболее весомой) составляющей его поля в слоистой среде, особенно на малых расстояниях, характерных для микроэлектроники [11]. Известно, что решение волнового уравнения для горизонтальной компоненты вектора-потенциала поля горизонтального диполя в такой структуре может быть описано формулой Ван-дер-Поля [2]

$$A_x = \frac{2m}{r(k_v^2 - k_{v-1}^2)} \frac{d}{dr} \left[\frac{\exp(-ik_{v-1}r)}{r} - \frac{\exp(-ik_v r)}{r} \right],$$

которую, взяв производную, можно представить в виде

$$A_x = \frac{2M}{r^3(k_v^2 - k_{v-1}^2)} [-\exp(-ik_{v-1}r) + \exp(-ik_v r) + (-ik_{v-1}r) \exp(-ik_{v-1}r) - (-ik_v r)].$$

Выделив модуль и аргумент, это выражение можно представить в виде

$$A_x = |A_x| \exp(i\theta_x),$$

где главное значение аргумента $\theta_x = -\arctg b/a$,

$$b = k_{v-1}r \cos(ik_{v-1}r) - k_v r \cos(ik_v r) - \sin(ik_{v-1}r) + \sin(ik_v r),$$

$$a = -k_{v-1}r \sin(ik_{v-1}r) + k_v r \sin(ik_v r) - \cos(ik_{v-1}r) + \cos(ik_v r),$$

а модуль

$$|A_x| = \frac{2M}{r^3(k_v^2 - k_{v-1}^2)} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

В соответствии с методом ЭПР поле на плоской границе полупространств описывается выражением

$$A_{\text{епр}} = \frac{M}{r} \exp(i\theta_{\text{епр}}),$$

где фаза $\theta_{\text{епр}} = -k_{\text{епр}}r$, $k_{\text{епр}} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e \mu_0 \mu_e} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\varepsilon_{v-1} + \varepsilon_v}{2\varepsilon_v}}$.

Представляет особый интерес ход частотной зависимости модуля и аргумента (фазы) вектора-потенциала на нижних частотах. При выполнении условия $|k_{v-1}r| < |k_v r| \ll 1$, взяв производную в формуле Ван-дер-Поля и разложив экспоненты в ряд Маклорена, ограничившись членами разложения со степенями частоты менее 4, получим

$$A_x \approx \frac{M}{r} \left[1 - i \frac{2r(k_v^3 - k_{v-1}^3)}{3(k_v^2 - k_{v-1}^2)} \right],$$

где главное значение аргумента и модуль на нижних частотах описываются формулами

$$\theta_x \approx -\arctg \frac{2ir(k_v^3 - k_{v-1}^3)}{3(k_v^2 - k_{v-1}^2)},$$

$$|A_x| \approx \frac{M}{r} \sqrt{1 + \left[\frac{2r(k_v^3 - k_{v-1}^3)}{3(k_v^2 - k_{v-1}^2)} \right]^2}.$$

Таким образом, при $\omega = 0$ функция $\theta_x(\omega)$, точно описывающая частотную зависимость аргумента, и ее производная, особенностей не имеют. С изменением частоты значение аргумента θ_x изменяется на нижних частотах квазилинейно, а аргумент $\theta_{\text{епр}}$ изменяется линейно во всем диапазоне частот, причем $\lim_{\omega \rightarrow 0} \theta_x = 0$ и $\lim_{\omega \rightarrow 0} \theta_{\text{епр}} = 0$. Однако отношение аргументов θ_x и $\theta_{\text{епр}}$ на постоянном токе есть конечная величина

$$0 < \left| \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\theta_x}{\theta_{\text{епр}}} \right| < \infty,$$

что подтверждается и вычислительным экспериментом. При $r \rightarrow 0$ модуль $|A_x| \rightarrow M/r$ и в пределе совпадает со значением, которое дается точным решением уравнения Лапласа. Следовательно, при $r \rightarrow 0$ погрешность

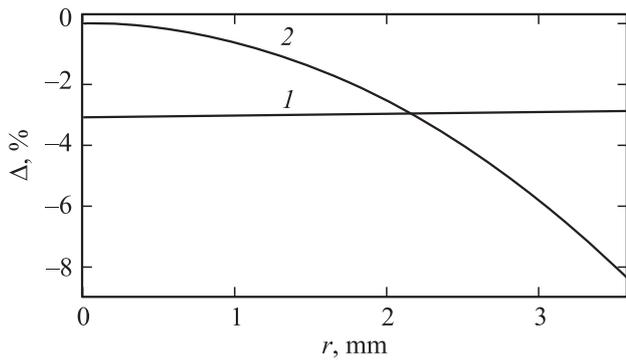


Рис. 1. Зависимость относительной погрешности моделирования аргумента (кривая 1) и модуля (кривая 2) векторного потенциала от расстояния до диполя r при $\epsilon_2 = 8.5$ на частоте $f = 10$ GHz.

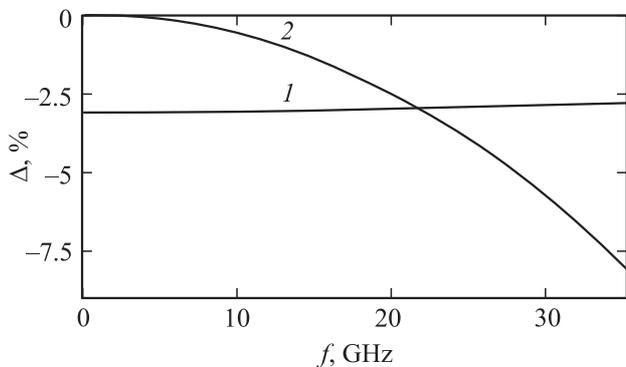


Рис. 2. Частотная зависимость относительной погрешности моделирования аргумента (кривая 1) и модуля (кривая 2) векторного потенциала на расстоянии до диполя $r = 1$ мм при $\epsilon_2 = 8.5$.

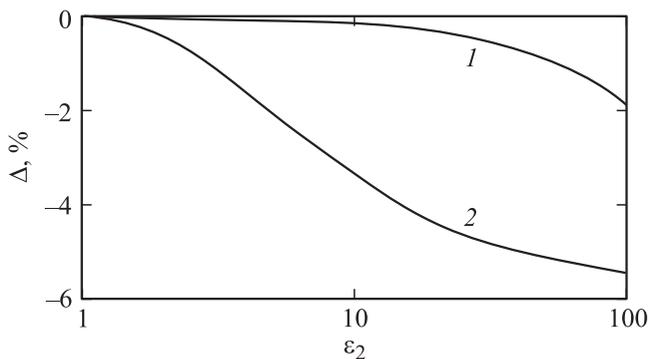


Рис. 3. Зависимость относительной погрешности моделирования модуля (кривая 1) и аргумента (кривая 2) векторного потенциала от относительной диэлектрической проницаемости подстилающего слоя на расстоянии до диполя $r = 2$ мм на частоте $f = 2$ GHz.

моделирования модуля стремится к нулю, т.е. точность метода ЭПР растет с уменьшением расстояния до источника поля, что также подтверждается вычислительным экспериментом, часть результатов которого представле-

на на рис. 1–3. При проведении эксперимента погрешность вычисления модуля рассчитывалась по формуле $100(1 - |A_{\text{эпр}}|/|A_x|)\%$. Погрешность вычисления аргумента также рассчитывалась в процентах по формуле $100(1 - \theta_{\text{эпр}}/\theta_x)\%$. Для снижения влияния погрешности округления вычисления проводились с учетом 32 десятичных знаков мантиссы каждого операнда.

Протяженные источники поля

Что касается зависимости точности (погрешности) моделирования поля протяженных проводников конечной длины от частоты, от относительной диэлектрической проницаемости подстилающего полупространства и от расстояния, то она носит характер, схожий с аналогичной зависимостью для элементарного диполя. При проведении соответствующего вычислительного эксперимента для расчета „точных“ значений модуля A_x и аргумента θ_x вектора-потенциала при интегрировании по длине прямолинейного источника поля использовалась квадратная формула Гаусса на два узла с разбиением интервала интегрирования на 2000 шагов. Оценка по внутренней сходимости показывает, что при таком способе вычисления значение интеграла имеет по меньшей мере 10 верных десятичных знаков. Повышение точности метода ЭПР с уменьшением расстояния до источника поля позволяет ориентировать указанный метод на использование в микроэлектронике (например, для количественной оценки перекрестных помех при проектировании микросхем и печатных плат).

Заключение

Предлагаемый метод ЭПР позволяет моделировать поле далеко за пределами области квазистационарного приближения. Он приводит к математическим моделям, которые несколько уступают моделям, использующим строго динамический подход, по ширине частотной области корректного использования, но значительно превосходят их по экономичности (требуемому расходу машинного времени и требуемой емкости оперативной памяти).

Описанный подход может применяться для моделирования описываемых волновым уравнением полей различной физической природы произвольно ориентированных излучателей в различных технических областях.

Список литературы

- [1] Франк Ф.Р., Мизес М. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Ч. 2. Л.: ОНТИ. Гл. ред. общетехнической лит-ры, 1937. 1000 с.
- [2] Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М., Л.: АН СССР, 1948. 728 с.
- [3] Агапов С.В., Чермошенцев С.Ф. // Информационные технологии. 2003. № 11. С. 2–12.

- [4] *Kochetov S.V., Wollenberg G.* // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. 2007. Vol. 49. N 1. P. 25–33.
- [5] *Antonini G., Deschrijver D., Dhaene T.G.* // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. 2007. Vol. 49. N 1. P. 35–43.
- [6] *Конников И.А.* // Научная сессия ГУАП. Сб. докл. в 3 ч. Ч. II. Технические науки СПб: СПб ГУАП, 2008. С. 109–110.
- [7] *Конников И.А.* // Математическое моделирование. 2007. № 4. С. 37–44.
- [8] *Конников И.А.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 1. С. 15–20.
- [9] *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи с распределенными параметрами. М.: Высшая школа, 1980. 152 с.
- [10] *Конников И.А.* // Научная сессия ГУАП. Сб. докл. в 3 ч. Ч. II. Технические науки СПб: СПб ГУАП, 2008. С. 111–115.
- [11] *Конников И.А.* // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. № 11. С. 52–60.