

03

Метод теоретического описания динамических процессов в гетерогенных средах

© Н.Б. Волков,^{1,2} В.В. Погорелко,² А.П. Яловец^{1,2}

¹ Институт электрофизики УрО РАН,
620016 Екатеринбург, Россия

² Южно-Уральский государственный университет,
454080 Челябинск, Россия
e-mail: yalovets.alex@rambler.ru

(Поступило в Редакцию 15 мая 2012 г. В окончательной редакции 27 сентября 2012 г.)

Описана многоскоростная модель гетерогенной среды, учитывающая процессы теплопроводности, теплообмена и трения между компонентами, релаксацию их напряжений. Проведены численные исследования зависимости скорости звука в суспензиях от объемной доли и размеров включений. Показано, что амплитуда распространяющейся в суспензии волны напряжений, ее ширина и затухание определяются объемной долей и размерами частиц. Моделирование воздействия ударника на твердотельный композит дает совпадающие с экспериментом значения амплитуд напряжений для режимов соударений, не вызывающих химических превращений.

Введение

Гетерогенные, неоднородные или многофазные среды — это газовзвеси (смеси газа с твердыми частицами), аэрозоли (смеси газа с жидкими каплями), суспензии (смеси жидкости с твердыми частицами), эмульсии (смеси жидкости с каплями другой жидкости), пузырьковые жидкости (смеси жидкости с пузырьками газа или пара), композитные материалы и т.д. Композиционный материал — это материал, состоящий из двух или нескольких отличающихся по своей природе или химическому составу компонентов, которые объединены в единую монолитную структуру с границей раздела между структурными составляющими (компонентами). Все эти среды характеризуются в отличие от гомогенных сред (смесей газов, растворов, сплавов) наличием макроскопических (по отношению к молекулярным масштабам) неоднородностей или включений.

В составе гетерогенной среды (ГС) обычно выделяют дисперсную фазу, к которой относятся капли, пузырьки или твердые частицы, и дисперсионную фазу, под которой понимается окружающая несущая фаза. В составе композиционного материала дисперсионную фазу обычно называют матрицей, а дисперсную фазу армирующим компонентом, включениями или наполнителем. Как следует из данных [1,2], в составе суспензии или твердотельного композита включения имеют размеры от 10 nm до 100 μ m и занимают различную объемную долю.

Взаимодействие компонент (механическое, тепловое, электрическое, химическое и прочее) в значительной мере определяет свойства ГС. В настоящей работе нас в первую очередь будет интересовать механическое взаимодействие компонент и его влияние на поведение суспензии или композиционного материала в условиях динамического, в том числе ударно-волнового нагружения.

Для описания течения суспензий или композиционного материала в условиях динамического нагружения будем опираться на получивший широкое распространение подход многоскоростных взаимопроникающих и взаимодействующих континуумов [3–7]. В рамках этого подхода поведение каждого компонента определяется законами сохранения массы, импульса и энергии. Для замыкания системы уравнений требуется формулировка условий совместного деформирования и движения компонент. В ряде случаев, как показано в [3], формулировка этих условий сводится к записи уравнений для объемных долей компонент. Часто в основе формулировки этих уравнений применяются либо условие равенства давлений компонент, либо условие несжимаемости одной из фаз. Если приближение несжимаемости твердых частиц в газовзвесах, например [8], или условие равенства давлений в пузырьковых жидкостях, например [9], не вызывает сомнений, то при описании динамических процессов в конденсированных ГС такие предположения справедливы только при определенных размерах частиц и определенных условиях нагружения.

В настоящей работе в рамках многоскоростных взаимопроникающих и взаимодействующих континуумов предлагается модель гетерогенной среды, учитывающая процессы теплопроводности, теплообмена и трения между компонентами, релаксацию их напряжений. Сформулированная система уравнений обеспечивает строгое выполнение законов сохранения всей системы. Настоящая работа является развитием метода описания динамики парокапельной смеси [10].

Хотя в настоящей работе исследуются динамические процессы в суспензиях и композиционных материалах, сформулированный подход применим и для описания процессов в газовзвесах, аэрозолях, пузырьковых жидкостях.

Термодинамика деформирования гетерогенной среды

Рассмотрим многокомпонентную среду, состоящую из несущей среды (матрицы) и включений разного размера и термодинамического состояния. Будем считать, что размеры включений в смеси во много раз больше расстояний между молекулами. Данное допущение позволяет рассматривать гетерогенную среду как совокупность многоскоростных взаимодействующих континуумов [3–7].

Пусть δV — физически малый элемент объема гетерогенной смеси, $\delta V^{(j)}$, $\delta m^{(j)}$ — элемент объема и масса j -компоненты в элементе δV . Тогда объемная доля j -компоненты $\alpha^{(j)} = \delta V^{(j)} / \delta V$, ее приведенная плотность — $\rho^{(j)} = \delta m^{(j)} / \delta V = \alpha^{(j)} \bar{\rho}^{(j)}$, где $\bar{\rho}^{(j)}$ — истинная (физическая) плотность компоненты.

Средняя плотность гетерогенной среды имеет вид $\rho = \delta m / \delta V = \sum_j \rho^{(j)} = \sum_j \alpha^{(j)} \bar{\rho}^{(j)}$, где $\delta m = \sum_j \delta m^{(j)}$ — масса смеси, заключенная в δV . Обозначим через $\mathbf{u}^{(j)}$, $\mathbf{v}^{(j)}$ векторы смещения и массовой скорости j -компоненты, а $u_{ik}^{(j)}$, $v_{ik}^{(j)}$ — тензоры деформации и скоростей деформации компоненты, определенные обычным образом из полей смещений $\mathbf{u}^{(j)}$ и скоростей $\mathbf{v}^{(j)}$.

Сформулируем основные положения модели.

А. Время релаксации к состоянию локального термодинамического равновесия каждой компоненты много меньше времени релаксации к локальному термодинамическому равновесию смеси. Отсюда следует, что в каждой точке гетерогенной среды каждая компонента характеризуется своим набором термодинамических параметров, но в общем случае компоненты находятся в различных термодинамических состояниях.

Б. Все компоненты среды равноправны и движутся в самосогласованном поле напряжений, создаваемом всеми компонентами. Это положение является следствием континуального описания, при котором гетерогенная среда рассматривается подобно многокомпонентному газу.

Поскольку каждая компонента дает вклад в поле напряжений, определяющее динамические процессы всей гетерогенной среды, то каждая компонента совершает работу по ее деформированию. Найдем элементарную работу $\delta A^{(j)}$, совершаемую j -компонентой по деформированию гетерогенной среды в единице объема смеси. Пусть напряженное состояние j -компоненты характеризуется тензором напряжений $\sigma_{ik}^{(j)}$, а сила внутренних напряжений, создаваемая отдельной компонентой, $F_i^{(j)} = \partial \sigma_{ik}^{(j)} / \partial x_k$. Полагаем, что деформации тела малы так, что вектор смещения $u_i^{(j)}$ меняется на малую величину $\delta u_i^{(j)}$. Тогда работа, производимая $F_i^{(j)}$ на смещение $\delta u_i^{(j)}$ произвольной компоненты j' во всем

объеме тела, имеет вид

$$\int \frac{\partial \sigma_{ik}^{(j)}}{\partial x_k} \delta u_i^{(j')} dV^{(j')} = \int \alpha^{(j')} \frac{\partial \sigma_{ik}^{(j)}}{\partial x_k} \delta u_i^{(j')} dV = \int \delta A^{(jj')} dV, \quad (1)$$

где $\delta A^{(jj')}$ — работа сил внутренних напряжений j -компоненты на смещение $\delta u_i^{(j')}$ в единице объема. Производя в (1) суммирование по всем компонентам j' , включая компоненту j , найдем работу в единице объема гетерогенной среды сил внутренних напряжений j -компоненты на смещение всех компонент

$$\delta A^{(j)} = \sum_{j'} \delta A^{(jj')} = \frac{\partial \sigma_{ik}^{(j)}}{\partial x_k} \delta u_i,$$

где $\delta u_i = \sum_{j'} \alpha^{(j')} \delta u_i^{(j')}$. Следуя [11], для неограниченной среды имеем

$$\int \delta A^{(j)} dV = - \int \sigma_{ik}^{(j)} \delta u_{ik} dV, \quad (2)$$

где тензор деформации u_{ik} вычисляется через усредненное по объему гетерогенной среды поле векторов смещения

$$u_i = \sum_{j'} \alpha^{(j')} u_i^{(j')}. \quad (3)$$

Из (2) следует выражение для работы $\delta A^{(j)}$, производимой j -компонентой по изменению тензора деформации в единице объема гетерогенной среды

$$\delta A^{(j)} = -\sigma_{ik}^{(j)} \delta u_{ik}. \quad (4)$$

Обозначим через $E^{(j)} = \alpha^{(j)} \bar{E}^{(j)}$ внутреннюю энергию j -компоненты в единице объема гетерогенной среды, где $\bar{E}^{(j)}$ — истинное (физическое) значение внутренней энергии в единице объема j -компоненты. Отметим, что здесь идет речь об единице объема недеформированных тел. Применяя для $E^{(j)}$ основное термодинамическое соотношение для деформированных тел [11], получим с учетом (4)

$$dE^{(j)} = T^{(j)} dS^{(j)} + \sigma_{ik}^{(j)} du_{ik}, \quad (5)$$

где $S^{(j)}$ — энтропия единицы объема компоненты в смеси. Из выражения (5) следует выражение для тензора напряжения j -компоненты

$$\sigma_{ik}^{(j)} = \left(\frac{\partial E^{(j)}}{\partial u_{ik}} \right)_{S^{(j)}} = \alpha^{(j)} \bar{\sigma}_{ik}^{(j)} = \alpha^{(j)} \bar{\sigma}_{0ik}^{(j)} \frac{\partial u_{ik}^{(j)}}{\partial u_{ik}}, \quad (6)$$

где $\bar{\sigma}_{0ik}^{(j)} = (\partial \bar{E}^{(j)} / \partial u_{ik}^{(j)})$ — обычный тензор напряжений компоненты, определяемый ее термодинамическим состоянием.

Деформация гетерогенной среды вызывает различную деформацию ее компонент и, как следствие, их различные напряженные состояния, что приводит к процессам установления равновесия между компонентами. В дальнейшем процесс установления равновесия между компонентами по напряжениям будем для краткости называть релаксацией напряжений. Именно производная $\partial u_{ik}^{(j)}/\partial u_{ik}$ должна отражать эти процессы. В настоящей работе представим (6) в виде

$$\sigma_{ik}^{(j)} = \alpha^{(j)} \left(\bar{\sigma}_{0ik}^{(j)} + \Delta \bar{\sigma}_{ik}^{(j)} \right), \quad (7)$$

где $\Delta \bar{\sigma}_{ik}^{(j)}$ отвечает за неравновесные процессы, протекающие в смеси при взаимодействии компонент.

Поскольку $\sigma_{ik}^{(j)}$ есть i -я проекция силы, которая действует со стороны j -компоненты гетерогенной среды на единичную площадку, ориентированную перпендикулярно k -й оси, определим полный тензор напряжения в гетерогенной среде как сумму

$$\sigma_{ik} = \sum_j \sigma_{ik}^{(j)}. \quad (8)$$

На любую компоненту смеси, заключенную в объеме $V^{(j)}$, действуют силы со стороны окружающих этот объем частей тела. Поэтому i -я проекция силы, действующей на j -ю компоненту смеси, имеет вид $\oint \sigma_{ik} df_k^{(j)}$, где интегрирование ведется по поверхности, окружающей $V^{(j)}$. Очевидные преобразования позволяют записать

$$\oint \sigma_{ik} df_k^{(j)} = \int_{V^{(j)}} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV^{(j)} = \int_{V^{(j)}} \alpha^{(j)} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV. \quad (9)$$

Из (9) следует выражение для проекций силы, которая действует на j -компоненту, заключенную в единице объема смеси $\alpha^{(j)}(\partial \sigma_{ik}/\partial x_k)$.

Уравнения механики для компонент ГС

Уравнение непрерывности для j -компоненты имеет стандартный вид

$$\frac{\partial \alpha^{(j)}}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha^{(j)} v_k^{(j)})}{\partial x_k} = 0. \quad (10)$$

Фактически уравнение (10) содержит два неизвестных: объемную долю $\alpha^{(j)}$ и физическую плотность $\bar{\rho}^{(j)}$. Перепишем (10) в виде

$$\frac{\partial \alpha^{(j)}}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha^{(j)} v_k^{(j)})}{\partial x_k} = - \frac{\alpha^{(j)}}{\bar{\rho}^{(j)}} \frac{d_j \bar{\rho}^{(j)}}{dt}, \quad (11)$$

где $d_j/dt = \partial/\partial t + (v_k^{(j)} \frac{\partial}{\partial x_k})$ — полная производная по времени в подвижной системе координат, связанной с j -компонентой. Изменение физической плотности j -компоненты в гетерогенной среде (в отсутствие химических превращений) обусловлено двумя факторами.

Во-первых, изменение плотности компоненты происходит вследствие изменения объема при ее деформации в поле напряжений смеси (8). Во-вторых, деформация компонент в поле напряжений смеси может привести к их различным напряженным состояниям, что вызывает изменение термодинамического состояния каждой компоненты в процессе релаксации напряжений к некоторому общему значению. Из сказанного следует, что уравнение для физической плотности имеет вид

$$\frac{d_j \bar{\rho}^{(j)}}{dt} = -\bar{\rho}^{(j)} \frac{\partial v_k^{(j)}}{\partial x_k} + \left(\frac{d_j \bar{\rho}^{(j)}}{dt} \right)_{\text{rel}}, \quad (12)$$

где $(d_j \bar{\rho}^{(j)}/dt)_{\text{rel}}$ — скорость изменения плотности компоненты за счет релаксации напряжений, явный вид которой определяется конкретной структурой гетерогенной среды.

Уравнение движения для j -компоненты в поле напряжений (8) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^{(j)} v_i^{(j)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \rho^{(j)} v_i^{(j)} v_k^{(j)} \\ = \alpha^{(j)} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - \sum_{j'} B^{(jj')} (v_i^{(j)} - v_i^{(j')}), \end{aligned} \quad (13)$$

где в правой части первое слагаемое описывает действующую на компоненту силу внутренних напряжений (9), второе — силу трения между компонентами, $B^{(jj')}$ — коэффициент трения между j - и j' -компонентами, для которого справедливо соотношение: $B^{(jj')} = B^{(j'j)}$. В общем случае $B^{(jj')}$ является функцией относительной скорости компонент.

Уравнение для внутренней энергии j -компоненты следует из первого начала термодинамики. С учетом (4) это уравнение запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^{(j)} U^{(j)}}{\partial t} + \frac{\partial \rho^{(j)} U^{(j)} v_k^{(j)}}{\partial x_k} = \sigma_{ik}^{(j)} v_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k} q_k^{(j)} \\ - \sum_{j'} Q^{(jj')} (T^{(j)} - T^{(j')}) \\ + \sum_{j'} \beta^{(jj')} B^{(jj')} (v^{(j)} - v^{(j')})^2, \end{aligned} \quad (14)$$

где слагаемые в правой части уравнения соответственно учитывают работу, совершаемую за единицу времени компонентой по деформированию единицы объема смеси, теплопроводность, теплообмен между компонентами, работу сил трения. Тензор деформации v_{ik} вычисляется через усредненное по объему гетерогенной среды поле скоростей, которое вычисляется по формуле, аналогичной (3). Тепловой поток $q_k^{(j)}$ определяется в односвязной области компоненты в соответствии с законом Фурье. В уравнении (14) введены обозначения: $Q^{(jj')}$ — коэффициенты теплообмена между j - и j' -компонентами через межфазную границу, $\beta^{(jj')}$ — доля тепла, передаваемая j -компоненте при трении с j' -компонентой [3], причем $\beta^{(jj')} = 1 - \beta^{jj'}$.

Удобно представить $\sigma_{ik}^{(j)} = -P^{(j)}\delta_{ik} + S_{ik}^{(j)}$, где $P^{(j)} = \alpha^{(j)}\bar{P}^{(j)}$ — шаровая часть, $S_{ik}^{(j)} = \alpha^{(j)}\bar{S}_{ik}^{(j)}$ — девиатор тензора напряжений для j -компоненты, где $\bar{P}^{(j)}$, $\bar{S}_{ik}^{(j)}$ — физические значения давления и девиатора тензора напряжений. Шаровая часть тензора напряжений находится из уравнения состояния по термодинамическим параметрам компоненты, найденным с учетом процессов установления равновесия между компонентами, которые учтены в (12). Как и в уравнении для физической плотности (12), в уравнении для девиатора тензора напряжений j -компоненты необходимо учесть вклад в изменение ее напряженного состояния за счет процесса релаксации

$$\frac{\partial \bar{S}_{ik}^{(j)}}{\partial t} + \left(v_k^{(j)} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \bar{S}_{ik}^{(j)} = 2\mu^{(j)} \tilde{v}_{ik}^{(j)} + \left(\frac{d_j \bar{S}_{ik}^{(j)}}{dt} \right)_{\text{rel}}, \quad (15)$$

где $\tilde{v}_{ik}^{(j)} = v_{ik}^{(j)} - \frac{1}{3} v_{ll}^{(j)} \delta_{ik}$, $\mu^{(j)}$ — модуль сдвига для j -компоненты, $(d_j \bar{S}_{ik}^{(j)} / dt)_{\text{rel}}$ — скорость изменения напряженного состояния компоненты вследствие релаксации напряжений.

Для жидкой компоненты модуль сдвига будем полагать равным нулю. Пластическое течение твердых тел описывается путем сохранения девиатора тензора напряжений на пределе текучести (условие текучести Мизеса) [12].

Из уравнений (10), (13) и (14) нетрудно получить уравнения для среды в целом в виде законов сохранения массы, импульса и полной энергии. Проводя суммирование по всем компонентам в уравнениях (10) и (13) с учетом, что $\sum_{jj'} B^{(jj')} (v_i^{(j)} - v_i^{(j')}) = 0$, получим стандартный вид уравнения непрерывности и уравнения движения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_{ck})}{\partial x_k} = 0. \quad (16)$$

$$\frac{\partial \rho v_{ci}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_{ci} v_{ck} - \sigma_{c,ik}) = 0, \quad (17)$$

где $v_c = \sum_j \rho^{(j)} v^{(j)} / \rho$ — поле скоростей в системе центра масс, $\sigma_{c,ik} = \sigma_{ik} - \Pi_{ik}$ — тензор напряжений смеси в системе центра масс, $\Pi_{ik} = \sum_j \rho^{(j)} v_i^{(j)} \xi_k^{(j)}$,

$$\xi_k^{(j)} = v^{(j)} - v_c.$$

Из уравнений (10) и (13) можно получить уравнение для кинетической энергии компоненты, для чего умножим обе его части скалярно на $v^{(j)}$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho^{(j)} v^{(j)2}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\rho^{(j)} v^{(j)2}}{2} v_k^{(j)} \right) \\ & = \alpha^{(j)} v_i^{(j)} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - \sum_{j'} B^{(jj')} (v^{(j)2} - v^{(j')} v^{(j)}). \end{aligned} \quad (18)$$

Суммируя (14) и (18) по всем компонентам, принимая во внимание равенства

$$\begin{aligned} & \sum_{jj'} Q^{(jj')} (T^{(j)} - T^{(j')}) = 0, \\ & \sum_{jj'} B^{(jj')} (v^{(j)2} - v^{(j')} v^{(j)}) \\ & + \sum_{jj'} \beta^{(jj')} B^{(jj')} (v^{(j)} - v^{(j')})^2 = 0, \end{aligned}$$

получим закон сохранения полной энергии

$$E_{\text{tot}} = \sum_j \rho^{(j)} \left(U^{(j)} + \frac{v^{(j)2}}{2} \right)$$

в виде

$$\frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (v_{ck} E_{\text{tot}} - v_{ci} \sigma_{c,ik} + \tilde{q}_k) = 0, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{q}_k = \sum_j & \left(q_k^{(j)} + \rho^{(j)} \left(U^{(j)} + \frac{v^{(j)2}}{2} \right) \xi_k^{(j)} \right. \\ & \left. - \alpha^{(j)} \xi_i^{(j)} \sigma_{c,ik} - \alpha^{(j)} v_i^{(j)} \Pi_{ik} \right) \end{aligned}$$

— полная плотность потока энергии в смеси, обусловленная теплопроводностью и относительным движением компонент.

Отметим, что законы сохранения для смеси (16), (17) и (19) имеют тот же вид, что и для однокомпонентной среды [13].

В ряде случаев возникает необходимость описания течения среды в лагранжевых переменных. Для гетерогенной среды лагранжевой системой координат является система центра масс. Кроме того, для построения разностных схем, основанных на применении интегральных теорем, необходима интегральная формулировка записанных выше уравнений.

Интегральную форму записанных выше уравнений легко получить, применяя формулу дифференцирования по времени интеграла, взятого по подвижному объему [14]:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\mathbf{r}, t) dV = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla(f \mathbf{v}) \right) dV, \quad (20)$$

где \mathbf{v} — поле скоростей, с которыми движутся точки объема V , f — произвольная функция или тензор. Если объем V представляет собой гетерогенную среду, то в формуле (20) полем скоростей является поле скоростей центров масс элементарных объемов, образующих V .

С помощью формулы (20) нетрудно получить интегральную форму уравнений (10)–(14).

Интегральная форма уравнения непрерывности для j -компоненты имеет вид

$$\frac{dm^{(j)}}{dt} = - \oint \rho^{(j)} \xi_k^{(j)} df_k, \quad (21)$$

где $m^{(j)} = \int_V \rho^{(j)} dV$ — масса компоненты в объеме V .

Объем, занимаемый какой-либо компонентой, представим в виде $V^{(j)} = \int_V \alpha^{(j)} dV$. Тогда с помощью (20) и уравнений (11), (12) получим

$$\begin{aligned} \frac{dV^{(j)}}{dt} = \int_V \left[\alpha^{(j)} (\nabla v_c) - (\xi^{(j)} \nabla \alpha^{(j)}) - \frac{\alpha^{(j)}}{\bar{\rho}^{(j)}} \left(\frac{d_j \bar{\rho}^{(j)}}{dt} \right)_{\text{rel}} \right] dV. \end{aligned} \quad (22)$$

Интегральные формы уравнений движения и энергии имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho^{(j)} v_k^{(j)} dV = \int \left[\alpha^{(j)} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - \sum_{j'} B^{(jj')} (v_i^{(j)} - v_i^{(j')}) \right] dV - \oint_{(V)} (\rho^{(j)} v_i^{(j)} \xi_k^{(j)}) df_k, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho^{(j)} U^{(j)} dV = \int \alpha^{(j)} \sigma_{ik}^{(j)} v_{ik} dV - \int_V \left[\frac{\partial q_k^{(j)}}{\partial x_k} + \sum_{j'} Q^{(jj')} (T^{(j)} - T^{(j')}) - \sum_{j'} \beta^{(jj')} B^{(jj')} (v^{(j)} - v^{(j')})^2 \right] dV - \oint_{(V)} \rho^{(j)} U^{(j)} \xi_k^{(j)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнения релаксации компонент к равновесию

Уравнения (11)–(15) представляют собой систему, описывающую динамику произвольной гетерогенной среды. Учет релаксационных процессов в уравнениях (12) и (15) позволяет найти тензор напряжений каждой компоненты (7).

Для замыкания системы уравнений (11)–(15) или их интегральных аналогов (21)–(24) необходимо определить $(d_j \bar{\rho}^{(j)}/dt)_{\text{rel}}$ и $(d_j \bar{S}_{ik}^{(j)}/dt)_{\text{rel}}$, для чего требуется задание конкретной геометрии компонент, образующих данную гетерогенную среду, и решение задачи о релаксации напряжения каждого структурного элемента этой среды. Отсюда следует, что получить универсальные уравнения для описания релаксационных процессов в компонентах произвольной гетерогенной среды не представляется возможным.

Рассмотрим наиболее простую структуру гетерогенной среды — матрицу со сферическими включениями разных размеров. Примером такой среды является суспензия — жидкая среда с твердыми сферическими включениями разных размеров [1] или твердые композиционные материалы [2]. Будем пренебрегать взаимодействием включений между собой. Рассмотрим случай одноосного нагружения, когда ненулевой является компонента тензора деформации $u_{zz}^{(j)}$. Пусть напряженное состояние отдельного включения радиуса $R^{(j)}$ характеризуется тензором $\bar{\sigma}_{ik}^{(j)}$, матрицы — $\bar{\sigma}_{ik}^{(m)}$, причем для суспензий $\bar{\sigma}_{ik}^{(m)} = -P^{(m)} \delta_{ik}$. С учетом того, что $\bar{S}_{xx}^{(j)} + \bar{S}_{yy}^{(j)} + \bar{S}_{zz}^{(j)} = 0$, уравнение движения вещества в отдельном включении запишем как

$$\bar{\rho}^{(j)} \frac{d_j \mathbf{w}^{(j)}}{dt} = \nabla \bar{\sigma}_{xx}^{(j)} + \frac{3}{2} \mathbf{e}_z \frac{\partial \bar{S}_{zz}^{(j)}}{\partial z}, \quad (25)$$

где \mathbf{e}_z — орт, направленный вдоль оси z , $\mathbf{w}^{(j)}$ — массовая скорость вещества во включении.

Будем пренебрегать нарушением сферической симметрии включений при нагружении среды, т.е. $\mathbf{w} = \mathbf{e}_r w$, где \mathbf{e}_r — орт, направленный по радиусу-вектору, $(\mathbf{e}_r \mathbf{e}_z) (\partial \bar{S}_{zz}^{(j)} / \partial z) \approx \partial \bar{S}_{zz}^{(j)} / \partial r$. Переходя в (25) к сферическим координатам с учетом сохранения сферической симметрии включения, получим

$$\bar{\rho}^{(j)} \frac{d_j w^{(j)}}{dt} = \frac{\partial \bar{\sigma}_{zz}^{(j)}}{\partial r}. \quad (26)$$

Для нахождения скорости изменения радиуса включения $w^{(j)}(R^{(j)}, t) = d_j R^{(j)} / dt$ оценку правой части (26) для малого промежутка времени t представим в виде

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{zz}^{(j)}}{\partial r} \approx \frac{\bar{\sigma}_{zz}^{(m)} - \bar{\sigma}_{zz}^{(j)}}{(c_l^{(j)} + c_l^{(m)})t},$$

где $c_l^{(j)}, c_l^{(m)}$ — продольные скорости звука во включении и матрице. В этом случае интегрирование (26) позволяет найти скорость относительного изменения объема отдельного включения, которая равна $3w^{(j)}/R^{(j)}$, и, следовательно, изменение его плотности

$$\begin{aligned} -\frac{1}{V^{(j)}} \left(\frac{d_j V^{(j)}}{dt} \right)_{\text{rel}} &= \frac{1}{\bar{\rho}^{(j)}} \left(\frac{d_j \bar{\rho}^{(j)}}{dt} \right)_{\text{rel}} \\ &= \frac{3}{\bar{\rho}^{(j)} R^{(j)} (c_l^{(j)} + c_l^{(m)})} (\bar{\sigma}_{zz}^{(j)} - \bar{\sigma}_{zz}^{(m)}). \end{aligned} \quad (27)$$

Из (27) следует

$$\left(\frac{d_j \bar{S}_{zz}^{(j)}}{dt} \right)_{\text{rel}} = \frac{4}{3} \mu^{(j)} \frac{1}{V^{(j)}} \left(\frac{d_j V^{(j)}}{dt} \right)_{\text{rel}}. \quad (28)$$

Поскольку релаксация напряжений компонент вызывает локальные деформации около включений, имеет место равенство

$$\left(\frac{dV^{(m)}}{dt} \right)_{\text{rel}} = - \sum_j \left(\frac{d_j V^{(j)}}{dt} \right)_{\text{rel}}. \quad (29)$$

Изменение объемов компонент среды при выравнивании напряжений влечет изменение их внутренних энергий. Уравнения (27)–(29) позволяют записать соответствующие уравнения для включений и матрицы в виде

$$\begin{aligned} \bar{\rho}^{(j)} \frac{d_j U^{(j)}}{dt} &= \bar{\sigma}_{zz}^{(j)} \frac{1}{V^{(j)}} \left(\frac{d_j V^{(j)}}{dt} \right)_{\text{rel}}, \\ \bar{\rho}^{(m)} \frac{dU^{(m)}}{dt} &= \sigma_{zz}^{(m)} \frac{1}{V^{(m)}} \left(\frac{dV^{(m)}}{dt} \right)_{\text{rel}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Таким образом, решения уравнений (12), (14) и (27)–(30) позволяют найти физическую плотность компонент и ее внутреннюю энергию, что позволяет из уравнений состояния найти шаровую часть тензора напряжений каждой компоненты, а с учетом (15) — компоненты тензора напряжений.

Для нахождения коэффициента теплообмена $Q^{(jm)}$ между сферическими включениями радиуса $R^{(j)}$ с температурой $T^{(j)}$, концентрация которых $n^{(j)}$, и окружающей средой с температурой $T^{(m)}$ найдем тепловой поток с отдельного включения. Минимальная оценка теплового потока следует из решения стационарного уравнения теплопроводности с граничными условиями: $T|_{R^{(j)}} = T^{(j)}$, $T|_{r=\infty} = T^{(m)}$. Эта оценка наиболее приемлема, когда размеры включений менее $0.1 \mu\text{m}$, поскольку в этом случае характерное время теплопроводности $\tau_\chi \ll \tau_H$, где $\tau_H = L/c$ — характерное гидродинамическое время системы, L, c — характерные линейный масштаб и скорость звука.

Поток тепла с единицы поверхности включения в окружающую среду имеет вид

$$q^{(jm)}|_{R^{(j)}} = -\kappa^{(m)} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R^{(j)}} = \frac{\kappa^{(m)} (T^{(j)} - T^{(m)})}{R^{(j)}},$$

а поток с поверхности всех включений в единице объема $4\pi(R^{(j)})^2 q^{(jm)}|_{R^{(j)}} n^{(j)} = Q^{(jm)} (T^{(j)} - T^{(m)})$. Отсюда коэффициент теплообмена между включениями и несущей средой

$$Q^{(jm)} = 4\pi n^{(j)} R^{(j)} \kappa^{(m)}.$$

Коэффициенты трения $B^{(jm)}$ для суспензии находились по формуле Стокса с поправками на режим обтекания [3]. Взаимодействие сферического включения с твердотельной матрицей описывалось в соответствии с [15].

В настоящей работе система уравнений (21)–(24), (27)–(30) решалась численно методом, описанным в работе [16].

Динамические процессы в суспензиях

Для случая, когда частицы в суспензии малы так, что имеет место полное увлечение их жидкостью, в работе [17] были найдены аналитически выражения для скоростей звука в суспензии для двух предельных случаев. Первый случай соответствует описанию суспензии с частицами малого размера, при которых происходит мгновенная релаксация компонент по напряжению.

В этом случае скорость распространения продольной волны равна

$$c = c^{(m)} \sqrt{\frac{\beta\gamma}{(1-\alpha+\alpha\beta\gamma)(1-\alpha+\alpha\beta)}}, \quad (31)$$

где $\beta = \bar{\rho}^{(j)}/\bar{\rho}^{(m)}$, $\gamma = (c_l^{(j)}/c^{(m)})^2$, α — объемная доля включений. Область применимости формулы (31) определяется условием $R/c_l^{(j)} \ll 1/\omega$, где ω — частота распространяющейся в суспензии волны.

Второй предельный случай соответствует описанию суспензии с крупными частицами, когда релаксация напряжений компонент отсутствует:

$$c = c^{(m)} \sqrt{\frac{1 + (\beta\gamma - 1)\alpha}{1 + (\beta - 1)\alpha}}. \quad (32)$$

Справедливость формулы (31) проверялась ее сравнением с результатами, полученными в экспериментах [1], где была измерена зависимость скорости звука в воде с частицами SiO₂ (Ludox) радиуса 30 nm от их объемной доли. Согласно данным [2], массовая плотность частиц SiO₂ (Ludox) равна 2140 kg/m³.

На рис. 1 проведено сравнение с экспериментальными данными [1] результатов, полученных по формуле (31), а также результатов расчетов по изложенной выше модели. Как видно из рис. 1, результаты расчета скорости звука по формуле (31) и на основе сформулированной здесь модели динамики суспензии хорошо согласуются с результатами эксперимента [1]. Отметим, что при определении скорости звука в суспензии на основе данной модели решалась задача о распространении одиночной

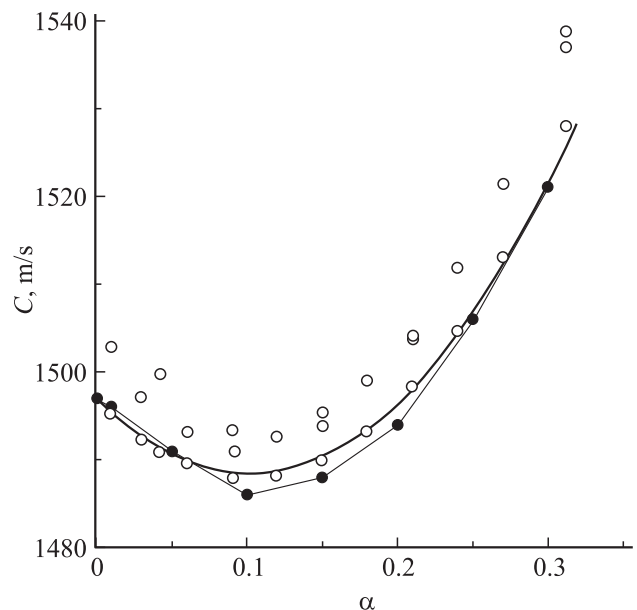


Рис. 1. Зависимость скорости звука в суспензии от объемной доли включений стекла SiO₂. Радиус включений $R = 30 \text{ nm}$. \circ — экспериментальные данные работы [1], — аналитическая кривая по формуле (31), \bullet — численные расчеты.

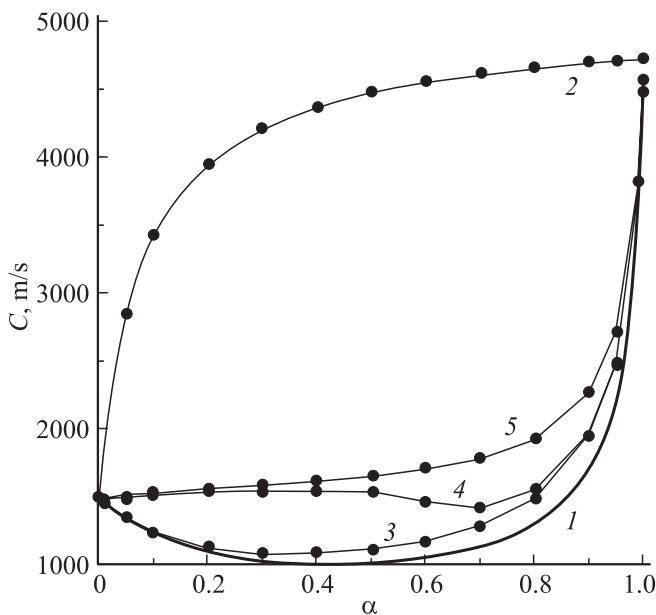


Рис. 2. Зависимость скорости звука в суспензии от объемной доли включений железа: 1 — аналитическая кривая по формуле (31), 2 — аналитическая кривая по формуле (32). Численные расчеты (маркеры): 2 — $R = 10 \mu\text{m}$ (расчеты без релаксации), 3 — $R = 0.1$, 4 — $R = 1$, 5 — $R = 10 \mu\text{m}$.

волны малой амплитуды ($10^2 - 10^3 \text{ Pa}$), возбуждаемой на границе по закону: $P(t) = P_0 \sin(\omega t)$, при $0 \leq t \leq \pi/\omega$ с $\omega = 3 \text{ MHz}$. Для расчетов были использованы двухчленное уравнение состояния воды и уравнение состояния Ми-Грюнайзена для включений.

На рис. 2 приведены результаты численных исследований зависимости скорости звука в суспензии (вода + сферические включения железа) от объемной доли включений и размеров частиц. Скорость звука, как и в предыдущем случае, находилась из решения задачи о распространении одиночного возмущения малой амплитуды.

Из рисунка следует, что при малых радиусах частиц ($R = 0.1 \mu\text{m}$) полученное численное значение скорости звука (кривая 3) стремится к аналитическому решению (31) (кривая 1). Некоторое отличие численного и аналитического решений при малых радиусах включений обусловлено применением приближения полного увлечения включений жидкостью при выводе формулы (31). Численное решение задачи о распространении волны в суспензии без учета процесса релаксации между компонентами дает зависимость, представленную маркерами, совпадающими с кривой 2, которая рассчитана по формуле (32).

Увеличение радиуса частиц при их неизменной объемной доле приводит к уменьшению суммарной поверхности включений и, как следствие, к уменьшению силы трения с жидкостью. Поэтому увеличение размеров частиц в суспензии сопровождается запаздыванием их смещения относительно смещения жидкости.

На рис. 2 кривая 3 соответствует почти полному увлечению частиц жидкостью, кривая 5 ($R = 10 \mu\text{m}$) — минимальному увлечению частиц. Кривая 4 ($R = 1 \mu\text{m}$) при малых объемных долях, когда мала суммарная поверхность частиц и мала сила трения, соответствует случаю минимального увлечения частиц жидкостью. По мере увеличения объемной доли и, как следствие, увеличения силы трения включения тормозят жидкость, и кривая 4 стремится к кривой 3, что соответствует режиму полного увлечения.

Часто в суспензиях имеет место коагуляция частиц, когда мелкие частицы объединяются в более крупные кластеры. Поэтому в настоящей работе были проведены исследования влияния наличия кластеров на скорость звука в суспензии. Если при заданной объемной доле включений α некоторая их часть $\varepsilon \alpha$ объединилась в кластеры радиуса $R_c = R \sqrt[3]{n}$ (n — количество частиц в кластере), то количество таких кластеров в объеме суспензии V будет равно $N_c = \varepsilon N_0/n$, где N_0 — количество частиц радиуса R в этом же объеме, соответствующее объемной доле включений α .

Исследования зависимости скорости звука в суспензии от доли кластеров радиуса R_c в общем числе включений показали, что объединение включений в кластеры приводит к увеличению скорости звука в суспензии. Если кластеры образуются из частиц малых размеров, то имеет место существенное увеличение скорости звука. Например, при фиксированной объемной доле включений $\alpha = 0.2$ образование кластеров радиуса $R_c = 1 \mu\text{m}$ из частиц $R = 0.1 \mu\text{m}$ приводит к увеличению скорости звука от 1140 до 1520 м/с при изменении доли ε в интервале 0–1. Если же кластеры образуются из крупных частиц, то скорость звука в такой суспензии меняется мало. Так, в случае образования кластеров радиуса $R_c = 10 \mu\text{m}$ из частиц радиусом $R \sim 1 \mu\text{m}$ скорость звука меняется в интервале 1540–1550 м/с при всех ε .

Относительно рис. 2 следует сделать замечание. Поскольку при моделировании динамических явлений в суспензии учитывалось взаимодействие частиц только с жидкостью, то представленные аналитические и численные расчеты при больших объемных долях включений (более 0.7) носят лишь демонстрационный характер. Кроме того, максимальная объемная доля включений ограничена предельно возможной упаковкой.

Рассмотрим далее закономерности формирования полей напряжений в суспензиях с различной объемной долей и радиусами включений. Исходное давление в суспензии полагалось равным атмосферному $P_a = 0.1 \text{ MPa}$.

Поля напряжений в суспензии генерировались путем задания смещения левой границы суспензии по представленному выше закону. Амплитуда P_0 обеспечивала в объеме суспензии распространение упругой волны с амплитудой напряжения несколько сотен Паскалей.

На рис. 3 приведены поля приращений напряжений $\delta\sigma_{zz} = \sigma_{zz} + P_a$ на момент времени $t = 3 \mu\text{s}$ при прохождении волны в различных суспензиях, отличающихся размерами включений и их объемными долями.

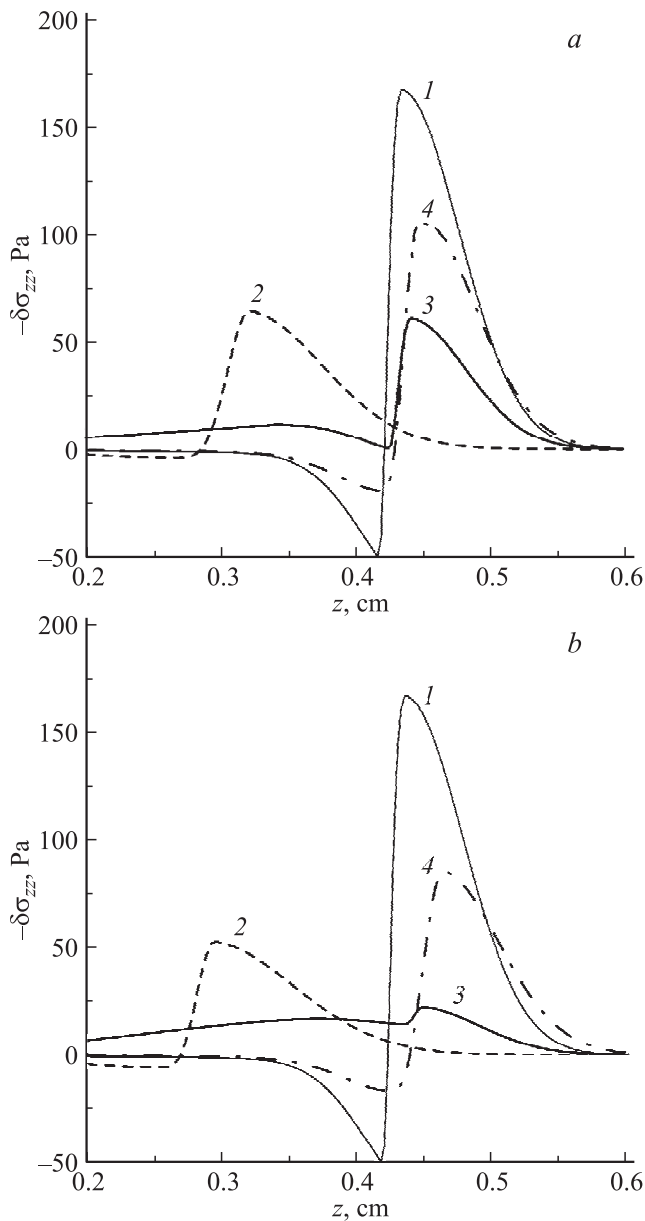


Рис. 3. Поля напряжений в суспензии на момент времени $t = 3 \mu s$. Объемная доля включений железа (a) $\alpha = 0.2$, (b) $\alpha = 0.4$. Вода с включениями железа различных радиусов: кривая 2 — $R = 0.1$, 3 — $R = 1$, 4 — $R = 10 \mu m$. Кривая 1 — чистая вода.

В случае, когда радиус включений мал ($R = 0.1 \mu m$), частицы, благодаря трению, полностью увлекаются жидкостью, волна распространяется со скоростью звука, которая меньше скорости звука в чистой жидкости (рис. 2). Когда радиус включений велик ($R = 10 \mu m$), то имеет место их минимальное увлечение жидкостью. В этом случае, как следует из рис. 2, волна распространяется со скоростью, которая несколько превышает скорость звука в чистой жидкости.

Иная картина формирования поля напряжения в суспензии наблюдается при промежуточных значениях радиуса включений $R = 1 \mu m$, когда характерное время

выравнивания скоростей компонент за счет трения сопоставимо со временем пребывания включения в поле волны. В этом случае ускорившиеся в поле волны частицы продолжают движение и после прохождения волны напряжения. Следствием такого характера движения является формирование за волной возмущения сжатой области. Данный эффект усиливается при увеличении объемной доли включений (рис. 3, b).

Кроме существенного влияния включений на скорость распространения волн в суспензии значительно изменяется и их амплитуда. Из рис. 3 следует, что добавка включений приводит к снижению амплитуды волны в сравнении с амплитудой волны в чистой жидкости. Этот эффект обусловлен большим различием модулей всестороннего сжатия металла и жидкости. При одинаковых относительных приращениях объемов компонент абсолютное значение приращения напряжения в металле будет много большим, чем в жидкости. Поэтому изменение напряженного состояния смеси будет в первую очередь определяться включениями при малом изменении напряженного состояния жидкости. Данное обстоятельство объясняет относительно слабую зависимость амплитуды волны от объемной доли включений, а также результаты моделирования течений в рассмотренной ниже задаче о поршне.

Относительное движение компонент смеси также играет большую роль в формировании полей напряжения. Как следует из рис. 3, в случае частичного увлечения частиц (кривая 3) амплитуда волны с ростом объемной доли включений сильно уменьшается из-за большой дисперсии.

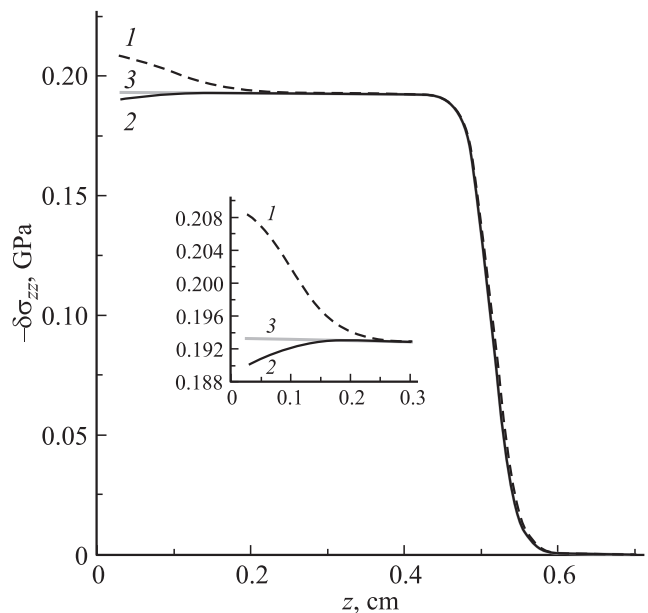


Рис. 4. Поля истинных напряжений в компонентах суспензии, толкаемой поршнем, на момент времени $t = 3 \mu s$. Скорость движения поршня $V = 100 \text{ m/s}$. Вода с включениями железа $R = 10 \mu m$ с объемной долей включений $\alpha = 0.1$. Кривые: 1 — железо, 2 — вода, 3 — суспензия.

Для исследования формирования полей напряжений в нелинейной области была рассмотрена задача о возбуждении течения в суспензии движением поршня со скоростью 100 м/с. В этом случае в среде возникает ударная волна с амплитудой ~ 0.2 ГПа.

На рис. 4 приведены поля истинных напряжений в компонентах суспензии на момент времени $t = 3 \mu\text{s}$. На этом рисунке видно, что напряжения в железе (кривая 1) превышают напряжения в жидкости (кривая 2), что, как отмечалось выше, обусловлено большим различием модулей всестороннего сжатия компонент. По мере распространения волны возмущений релаксационные процессы приводят к установлению равновесия между компонентами.

Динамические процессы в твердотельном композите

В работе [18] приведены результаты экспериментальных исследований скоростного соударения пластин из композиционного материала, представляющего собой алюминиевую матрицу с включениями двуокиси кремния SiO_2 , средний размер которых составлял $10 \mu\text{m}$. Объемная доля включений составляла $\alpha = 0.5$.

В рамках описанной здесь модели было проведено моделирование динамики скоростного соударения пластин. В расчетах использовалось уравнение состояния Ми-Грюнайзена. Толщины ударника и мишени составляли по 0.5 см. Из рис. 5 следует, что при данных скоростях ударника расчеты достаточно хорошо согласуются с экспериментом. При скоростях ударника более 1 км/с расчеты по данной модели дают завышенные значения максимальных напряжений в композите, что может быть связано либо с разрушением включений SiO_2 , либо с имеющими место при данных условиях химическими реакциями [19], которые в данной модели не учтены.

На рис. 6 приведены результаты моделирования скоростного соударения пластин из композиционного материала, представляющего собой алюминиевую матрицу с включениями железа радиуса $100 \mu\text{m}$, на момент времени $t = 5 \mu\text{s}$. Толщины ударника и мишени составляли 0.5 и 4.5 см соответственно. Скорость ударника составляла 800 м/с. При моделировании использовались динамические пределы текучести — 0.298 ГПа для алюминия и 0.78 ГПа для железа.

Поля напряжений при различных объемных долях включений показывают, что наличие включений оказывает существенное влияние на амплитуду и форму волны напряжения в композите.

Особенностью распространения ударной волны в композите является наличие двух площадок текучести за фронтом пластической волны. Это связано с достижением предела текучести и началом пластического течения сначала в одной, а затем в другой компоненте композита. Поскольку сила трения между компонентами композита настолько велика, что исключает относительное движение компонент, то при $r \leq 100 \mu\text{m}$ профиль

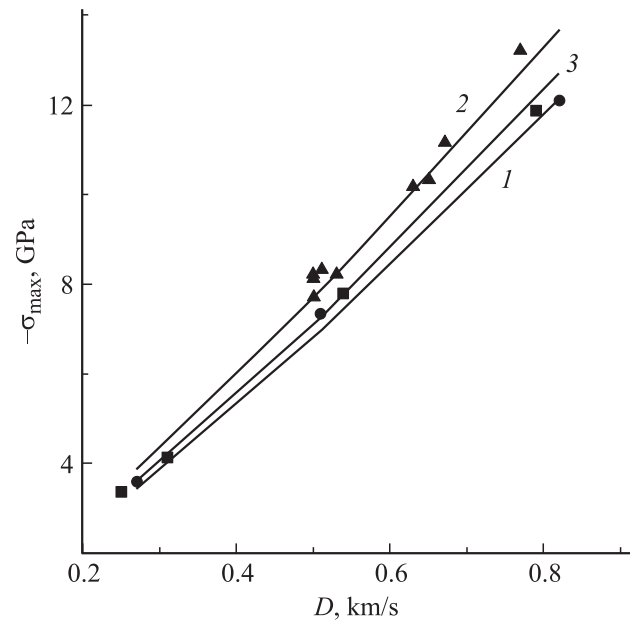


Рис. 5. Зависимость максимальных напряжений в композиционном материале ($\text{Al} + \text{SiO}_2$) от скорости ударника. Радиус включений SiO_2 $r = 10 \mu\text{m}$. Объемная доля включений $\alpha = 0.5$. Экспериментальные данные работы [18]: ■ — SiO_2 , ▼ — Al , ● — ($\text{Al} + \text{SiO}_2$). Наши расчеты: 1 — SiO_2 , 2 — Al , 3 — ($\text{Al} + \text{SiO}_2$).

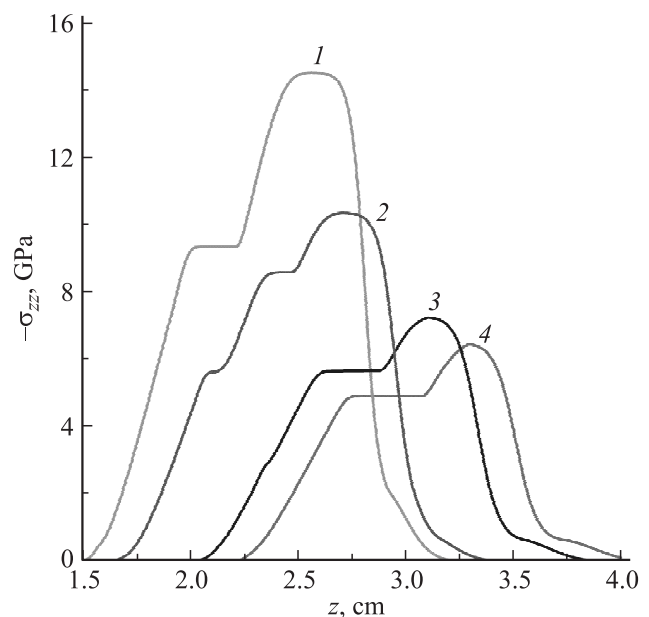


Рис. 6. Поля напряжений в композиционном материале ($\text{Al} + \text{Fe}$) на момент времени $t = 5 \mu\text{s}$ при различных объемных долях включений железа. Радиус включений $r = 100 \mu\text{m}$. Объемная доля включений железа: 2 — $\alpha = 0.5$, 3 — $\alpha = 0.1$. Кривая 1 — чистое железо, 4 — чистый алюминий.

волны напряжений не зависит от радиуса включений. При больших радиусах существенную роль начинает играть процесс релаксации между компонентами к об-

шему напряжению, что приводит к изменению профиля волны напряжений с увеличением радиуса включений. При рассматриваемом режиме соударения температура среды меняется незначительно (порядка нескольких Кельвинов), поэтому процесс теплообмена не играет существенной роли.

Заключение

В рамках модели многоскоростных взаимопроникающих и взаимодействующих континуумов сформулирована замкнутая система уравнений для гетерогенной среды. Важным элементом модели является учет процессов релаксации компонент к равновесному состоянию, которые определяются структурой смеси. Сформулированная система уравнений обеспечивает строгое выполнение законов сохранения.

Исследования динамических процессов в суспензиях и твердотельных композитах со сферическими включениями показали, что формирование течений в среде определяется не только упругими свойствами компонент, но и их относительным движением.

Исследования показали, что в области возбуждения течений напряжения в компонентах, как правило, отличаются весьма значительно. По мере распространения возмущения по объему среды напряжения компонент релаксируют к некоторому общему значению. Время релаксации определяется как геометрическими параметрами компонент, так и характером их относительного движения.

Список литературы

- [1] *Dukhin A.S., Goetz P.G.* Ultrasound for characterizing colloids. Elsevier. 2002. 372 p.
- [2] *Van Thiel M.* // Lawrence Livermore Laboratory Report UCRL-50108. 1977. P. 356–357.
- [3] *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М: Наука, 1987. 464 p.
- [4] *Блохин А.М., Доровский В.Н.* Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума. М: Наука, 1994. 184 с.
- [5] *Massoudi M.* // Chem. Eng. Sci. 2002. Vol. 57. P. 3687–3701.
- [6] *Van Wachem B.G.M., Almstedt A.E.* // Chem. Eng. J. 2003. Vol. 96. P. 81–98.
- [7] *Куропатенко В.Ф.* // ДАН. 2005. Т. 403. № 6. С. 761–763.
- [8] *Федоров А.Ф., Кратова Ю.В., Хмель Т.А., Фомин В.М.* // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2008. Т. 7. С. 1–6.
- [9] *Суров В.С.* // Математическое моделирование. 2001. Т. 13. № 10. С. 27–42.
- [10] *Волков Н.Б., Фенько Е.Л., Яловец А.П.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 10. С. 1–11.
- [11] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М: Физматлит, 1987. 248 с.
- [12] *Уилкинс М.Л.* Расчет упруго-пластических течений. Вычислительные методы в гидродинамике. М: Мир, 1967. 384 с.
- [13] *Годунов С.К.* Элементы механики сплошной среды. М: Наука, 1978. 303 с.
- [14] *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М: Наука, 1976. 492 с.
- [15] *Kiselev S.P., Kiselev V.P.* // Int. J. Impact Eng. 2002. Vol. 27. P. 135–152.
- [16] *Яловец А.П.* // ПМТФ. 1997. Т. 38. № 1. С. 151–166.
- [17] *Майер А.Е., Погорелко В.В., Яловец А.П.* // Акустический журнал. 2011. Т. 57. № 2. С. 153–160.
- [18] *Подурец М.А., Симаков Г.В., Трунин Р.Ф.* // Изв. АН СССР. Физика земли. 1988. В. 4. С. 28–32.
- [19] *Voskoboinikov M.* // Combust. Explo. Shock. 2007. Vol. 43. N 2. P. 222–224.