

01

Об одном механизме конвективной неустойчивости в двухкомпонентных жидкостях

© Л.Х. Ингель

Научно-производственное объединение „Тайфун“,
249038 Обнинск, Калужская область, Россия
e-mail: ingeli@obninsk.ru

(Поступило в Редакцию 9 августа 2012 г.)

Обращено внимание на неисследованный ранее механизм конвективной неустойчивости в двухкомпонентных средах, таких как соленая морская вода. Течения в таких средах, вообще говоря, по-разному переносят различные субстанции (например, тепло и соль) в зависимости от скоростей их диффузии. Поэтому возможны ситуации с частичным разделением этих субстанций и возникновением конвективной неустойчивости.

Несколько десятилетий назад впервые было обнаружено, что в двухкомпонентных жидкостях (например, в соленой морской воде) существует специфический механизм конвективной неустойчивости, обусловленный различием скоростей диффузии двух субстанций, определяющих стратификацию плотности (тепла и соли) [1]. В таких средах неустойчивость может возникать даже при гидростатически устойчивой стратификации (убывании фоновой плотности с высотой). В последние годы обнаружен ряд других механизмов конвективной неустойчивости двухкомпонентных сред, иногда даже при одинаковых скоростях диффузии (см., например, недавний обзор [2]). В настоящей работе обращается внимание на еще один механизм неустойчивости, существующий при наличии горизонтальных фоновых течений среды.

Физическая идея заключается в следующем. В отсутствие течений в двухкомпонентной среде, как известно, возможно продолжительное существование „скомпенсированных“ неоднородностей распределений температуры и примеси. Имеются в виду ситуации, когда неоднородности распределений двух упомянутых субстанций компенсируют друг друга (полностью или частично) в поле плотности, так что отклонения плавучести отсутствуют. Распространенное существование таких неоднородностей в морской воде замечено довольно давно; в океанологии для них даже появилось специальное название — спайсы (spices) (см., например, [2,3] и библиографию в этих работах). Когда подобные неоднородности оказываются в поле течения среды, сильно и слабо диффундирующие субстанции в некоторых ситуациях могут „сноситься“ течением в разной степени. Таким образом, наличие течений может приводить к „разделению“ упомянутых субстанций. Например, если отрицательная плавучесть относительно холодного объема воды при отсутствии течения компенсировалась меньшей его соленостью, то в поле течения эта компенсация, вообще говоря, может нарушаться, т.е. могут возникать нескомпенсированные отклонения плавучести и, следовательно, конвекция. Ниже приведена простая

теоретическая модель, иллюстрирующая такую возможность.

Рассматриваем полуограниченную жидкую среду в области $z \leq 0$ (ось z направлена вертикально вверх). Для определенности в качестве примера двухкомпонентной среды будем рассматривать случай соленой морской воды, уравнение состояния которой с большой точностью аппроксимируется линейным уравнением [1]:

$$\rho = \rho_*(1 - \alpha T + \beta S), \quad (1)$$

где ρ_* — значение плотности ρ при постоянных средних значениях температуры T_* и солености S_* , T , S — соответствующие отклонения от средних, α — коэффициент термического расширения, β — концентрационный коэффициент (коэффициент соленостного сжатия).

На верхней границе $z = 0$ предполагаем заданными кусочно-постоянные возмущения температуры и солености

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= -T_0[\eta(x + L/2) - \eta(x - L/2)], \\ S(x, 0) &= -S_0[\eta(x + L/2) - \eta(x - L/2)]. \end{aligned} \quad (2)$$

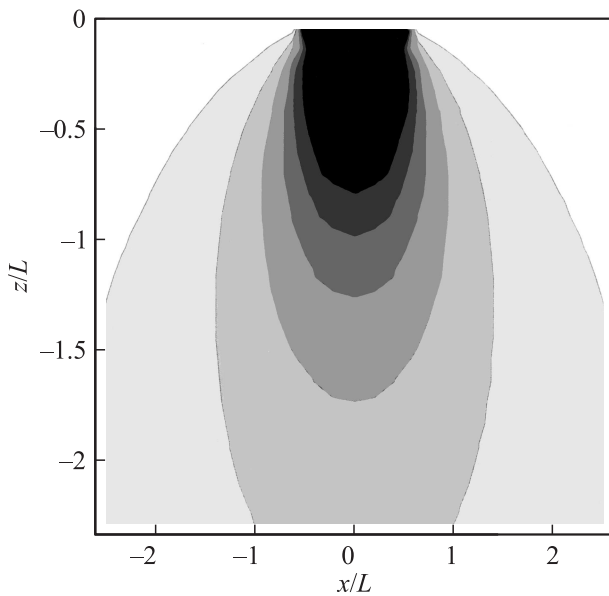
Здесь x — горизонтальная координата (для простоты ограничиваемся двумерной задачей), η — символ единичной функции Хевисайда, L — масштаб длины. Амплитуды T_0 , S_0 (положительные) выбраны таким образом, что выполняется соотношение

$$\alpha T_0 = \beta S_0. \quad (3)$$

Предполагаем, что в отсутствие возмущений среда однородна. Вдали от источника возмущений (при $z \rightarrow -\infty$) предполагается их затухание. Уравнения переноса тепла и примеси имеют вид

$$\frac{dT}{dt} = \kappa \nabla^2 T, \quad \frac{dS}{dt} = \chi \nabla^2 S, \quad (4)$$

где κ — коэффициент температуропроводности, χ — коэффициент диффузии примеси.



Изолинии температуры и концентрации примеси в случае покоящейся среды.

Если искать статическое решение при отсутствии фоновых движений среды, то для возмущений обеих субстанций (4) сводятся к уравнениям Лапласа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = 0$$

$$(-\infty < x < \infty, -\infty < z \leq 0). \quad (5)$$

Решение краевой задачи на рассматриваемой полуплоскости в наших обозначениях выражается следующим образом [4]:

$$T(x, z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{zT(x', 0)dx'}{(x' - x)^2 + z^2}.$$

С учетом (2) решение имеет вид

$$T = \frac{T_0}{\pi} \left(\arctg \frac{x + L/2}{z} - \arctg \frac{x - L/2}{z} \right),$$

$$S = \frac{S_0}{\pi} \left(\arctg \frac{x + L/2}{z} - \arctg \frac{x - L/2}{z} \right). \quad (6)$$

С учетом того что $z < 0$, возмущения обеих субстанций отрицательны. Это вполне понятно, поскольку на верхней границе заданы отрицательные отклонения этих субстанций. Приведенные на рисунке изолинии температуры и солёности дают представление о пространственной структуре возникающего возмущения. С учетом (1) и (3) рассматриваемые возмущения взаимно компенсируют друг друга в поле плотности и не приводят к отклонениям плавучести.

Рассмотрим теперь случай, когда существует однородное фоновое течение вдоль горизонтальной оси x , обозначим его скорость через U . В линейном приближении

первое из уравнений (4) в этом случае имеет вид

$$U \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (7)$$

(второе уравнение отличается лишь коэффициентом обмена). Если рассматривать горизонтальные масштабы, много бóльшие чем κ/U , то, как видно из масштабного анализа, эффект диффузии в горизонтальном направлении пренебрежимо мал по сравнению с адвекцией (левой частью (7)), так что это уравнение можно приближенно заменить

$$U \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (8)$$

(для слабо диффундирующей соли такая замена еще более обоснована). Соответствующие краевые задачи легко решаются. Решение в области $-L/2 < x < L/2$ имеет вид

$$T = -T_0 \operatorname{erfc} [z(U/4\kappa x)^{1/2}],$$

$$S = -S_0 \operatorname{erfc} [z(U/4\chi x)^{1/2}], \quad (9)$$

где erfc — символ дополнительной функции ошибок.

В отличие от случая покоящейся среды (6) решения для возмущений различных субстанций теперь зависят от значений коэффициентов обмена. В соленой морской воде коэффициент температуропроводности κ на два порядка больше, чем коэффициент диффузии соли χ . Поэтому толщина слоя, охлажденного от поверхности ($\sim (\kappa x/U)^{1/2}$), на порядок больше толщины „распределенного“ слоя $(\chi x/U)^{1/2}$. Это означает, что взаимная компенсация возмущений плавучести, связанных с оттоками двух субстанций, в данном случае отсутствует. Имеется неустойчиво стратифицированный охлажденный слой толщиной $\sim (\kappa x/U)^{1/2}$ с вертикальным градиентом температуры порядка $T_0(U/\kappa x)^{1/2}$, чему соответствует эффективное число Рэлея

$$Ra \sim \frac{\alpha g T_0}{\nu} \left(\frac{\kappa x^3}{U^3} \right)^{1/2}.$$

Здесь g — ускорение свободного падения, ν — коэффициент кинематической вязкости. Число Рэлея неограниченно возрастает вниз по течению. Если обозначить его критическое значение через Ra_* , то при

$$x > x_* \equiv -\frac{L}{2} + U \left[\frac{1}{\kappa} \left(\frac{\nu Ra_*}{\alpha g T_0} \right)^2 \right]^{1/3}$$

должна возникнуть область конвективной неустойчивости (предполагается, что $L > 2x_*$). Может показаться странным отсутствие в последнем результате предельного перехода к решению для покоящейся среды при $U \rightarrow 0$. Дело в том что при выводе уравнения (8) использовалось предположение о не слишком малом значении U .

Отметим, что медленно диффундирующая примесь, которая в решении (6) стабилизировала среду, в последнем случае практически не влияет на устойчивость. Даже если изменить краевые условия (2) „в ее пользу“ — существенно усилить сток примеси на верхней границе, т. е. сделать суммарный приток плавучести в среду положительным и достаточно интенсивным, эффект этого притока плавучести будет сосредоточен лишь в тонком слое $\Delta z \sim (\chi x/U)^{1/2}$, в то время как относительно малоинтенсивный сток плавучести за счет охлаждения будет тем не менее эффективно дестабилизировать среду.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 10-05-01128-а, 12-05-00400-а).

Список литературы

- [1] *Тернер Дж.* Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 431 с. (J.S. Turner. Buoyancy effects in fluids. University Press, Cambridge, 1973).
- [2] *Ингель Л.Х., Калашник М.В.* // УФН. 2012. Т. 182. № 4. С. 379–406.
- [3] *Laurian A., Lazar A., Reverdin G.* // J. Phys. Oceanogr. 2009. Vol. 39. P. 1003–1018.
- [4] *Полянин А.Д., Вязьмин А.В., Журов А.И., Казенин Д.А.* Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса. М.: Факториал, 1998. 367 с.