

Влияние продольного распределения плотности тока в токовых слоях на структуру их магнитного поля и динамику их формирования.

II. Динамика формирования токовых слоев различной конфигурации

© Г.В. Островская

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: galya_ostr@mail.ru

(Поступило в Редакцию 10 июля 2012 г.)

Выполнены численные расчеты структуры сил Ампера, ответственных за динамику формирования классических и двугорбых токовых слоев в магнитных полях с нулевой линией. Проведен сравнительный анализ расчетных данных и результатов экспериментальных исследований структуры и динамики токовых слоев, выполненных с помощью магнитных измерений и методами голографической интерферометрии.

Введение

В работе [1] были выполнены расчеты и проведен сравнительный анализ магнитных полей токовых слоев двух типов: „классических“ слоев с односторонним распределением тока вдоль оси слоя и „двугорбых“ слоев, продольное распределение тока в которых имеет минимум в центре слоя и два симметричных боковых максимума. Токовые слои первого типа возникают в однородной высокоионизованной плазме при протекании через нее тока J_z в направлении, перпендикулярном начальному магнитному полю с x -линиями вида

$$\mathbf{V}^0(x, y) = (-h_0x, -h_0y), \quad (1)$$

где h_0 — градиент начального поперечного поля.

Структура магнитного поля и динамика формирования классических токовых слоев детально исследованы как экспериментально, так и теоретически ([2] и цитируемая там литература).

Слои же с двугорбым распределением электронной плотности наблюдались впервые в экспериментальных работах [3–5] в условиях слабой ионизации исходной плазмы. Детальное исследование влияния начальной степени ионизации плазмы на структуру и динамику плазменных слоев было проведено в работах [6,7] на основе данных голографической интерферометрии. Спецификой формирования слоев в слабо ионизованной плазме являются определяющая роль дополнительной ионизации плазмы, протекающим через нее током, ярко выраженная двугорбая структура слоев и стремительное перемещение максимумов N_e от нулевой линии к периферии слоя. Столь необычная структура и динамика плазменных слоев, по-видимому, связаны с особенностями продольного распределения токов $I(x)$ в двугорбых слоях и с соответствующим изменением структуры их магнитных полей.

Ввиду отсутствия сведений о прямых измерениях магнитных полей B^J и распределении токов в данном режиме формирования токовых слоев в работе [1] на

основе расчетных данных был проведен сравнительный анализ магнитных полей классических и двугорбых токовых слоев. К числу выявленных особенностей магнитного поля двугорбых слоев относятся: усиление в центральной части слоя y -компоненты полного магнитного поля $\mathbf{V}^{\text{tot}} = \mathbf{V}^0 + \mathbf{V}^J$ относительно исходного поля, т.е. $|B_y^{\text{tot}}| > |B_y^0|$, и резкое уменьшение $|B_y^{\text{tot}}|$ на краях слоя, вплоть до изменения знака $|B_y^{\text{tot}}|$ относительно $|B_y^0|$.

Разд. 1 настоящей работы посвящен расчету и сравнительному анализу распределений сил Ампера, ответственных за формирование классических и двугорбых токовых слоев. В разд. 2 будет проведено сравнение расчетных данных с данными прямых магнитных измерений [2,8], а также с результатами исследований структуры и эволюции плазменных слоев, полученными методом голографической интерферометрии [3–7].

1. Динамика токовых слоев

1.1. Формирование токовых слоев в магнитных полях x -линией (1)

Как известно, динамика формирования токовых слоев определяется силами Ампера, равными $\mathbf{f} = [\mathbf{j}_z \times \mathbf{V}^{\text{tot}}]/c$, где \mathbf{j}_z — локальная плотность тока J_z , а $\mathbf{V}^{\text{tot}} = \mathbf{V}^J + \mathbf{V}^0$. В соответствие с этим компоненты силы \mathbf{f} равны

$$f_x = -B_y^{\text{tot}} j_z(x, y)/c, \quad f_y = B_x^{\text{tot}} j_z(x, y)/c, \quad (2)$$

где $B_y^{\text{tot}} = B_y^0 + B_y^J$ и $B_x^{\text{tot}} = B_x^0 + B_x^J$. Характерно, что при выбранных направлениях тока J_z и поля \mathbf{V}^0 , заданного соотношением (1), x -компоненты полей \mathbf{V}^0 и \mathbf{V}^J имеют одинаковый знак, т.е. усиливают друг друга, а силы f_y во всем пространстве направлены в сторону оси x , обеспечивая тем самым сжатие тока и плазмы в окрестности этой оси.

В свою очередь y -компоненты полей \mathbf{V}^0 и \mathbf{V}^J слоев классической формы имеют в пределах слоя противоположные знаки, и, таким образом, направления сум-

марного поля B_y^{tot} , а стало быть и силы f_x зависят от соотношения модулей B_y^0 и B_y^J .

Если $|B_y^0| > |B_y^J|$, то силы f_x направлены от центра координат к периферии и обеспечивают растяжение слоя вдоль оси x . В противном случае, когда $|B_y^0| < |B_y^J|$, силы f_x направлены к центру и приводят к сжатию плазмы в этом направлении, т.е. к пинч-эффекту. При равенстве же полей $|B_y^0| = |B_y^J|$ на всем протяжении токового слоя возникает нейтральный токовый слой, в пределах которого магнитное поле равно нулю (см. [9–11], а также разд 1.2 в работе [1]).

В случае двугорбого токового слоя y -компонента магнитного поля B_y^J в центральной части слоя имеет тот же знак, что и B_y^0 , соответственно $|B_y^{tot}| > |B_y^0|$. В области же, примыкающей к краям слоя, B_y^J и B_y^0 антипараллельны, что при определенных условиях может приводить к появлению в пределах слоя сил, действующих навстречу друг другу ([1], рис. 7, c).

1.2. Распределение сил Ампера, определяющих динамику классических токовых слоев

Тангенциальная составляющая сил Ампера, ответственных за динамику плазмы вдоль оси слоя в расчете на единицу ширины слоя, равна

$$F_x(x) = -\frac{I_z(x)[B_y^0(x) + B_y^J(x)]}{c} \quad (3)$$

При протекании через плазму импульсного тока $J_z(t)$ и изменении со временем ширины слоя b под действием сил Ампера соотношение между величинами B_y^J и B_y^0 может существенно измениться со временем.

Рассмотрим влияние величины тока J_z , протекающего в пределах слоя, на характер изменения функции $F_x(x)$ на примере классического токового слоя с распределением

$$I(x) = \frac{2J_z}{\pi b} \sqrt{1 - (x/b)^2}.$$

Магнитное поле такого слоя равно $B_y^J(x) = h^J x$ в его пределах, где $h^J = 4J_z/cb^2 = h_0 J_z/J_z^0$ — градиент собственного поля токового слоя (см. разд. 1.2 в работе [1]), а

$$J_z^0 = \frac{cb^2 h_0}{4} \quad (4)$$

— ток, соответствующий возникновению нейтрального токового слоя (см. [9–11]).

Подставив в (3) распределение $I(x)$, а также $B_y^0 = -h_0 x$ и $B_y^J(x) = h^J x (J_z/J_z^0)$, получим

$$F_x(x) = \frac{J_z h_0}{\pi c} \left[1 - \frac{J_z}{J_z^0} \right] f(x), \quad (5)$$

где

$$f(x) = 2 \frac{x}{b} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{b}\right)^2}$$

— безразмерная функция, не зависящая от величины тока J_z , протекающего через слой. Нетрудно показать, что функция $f(x)$ имеет максимум, равный единице, при $(x/b)^2 = 0.5$. В свою очередь функция $\frac{J_z h_0}{\pi c} [1 - J_z/J_z^0]$,

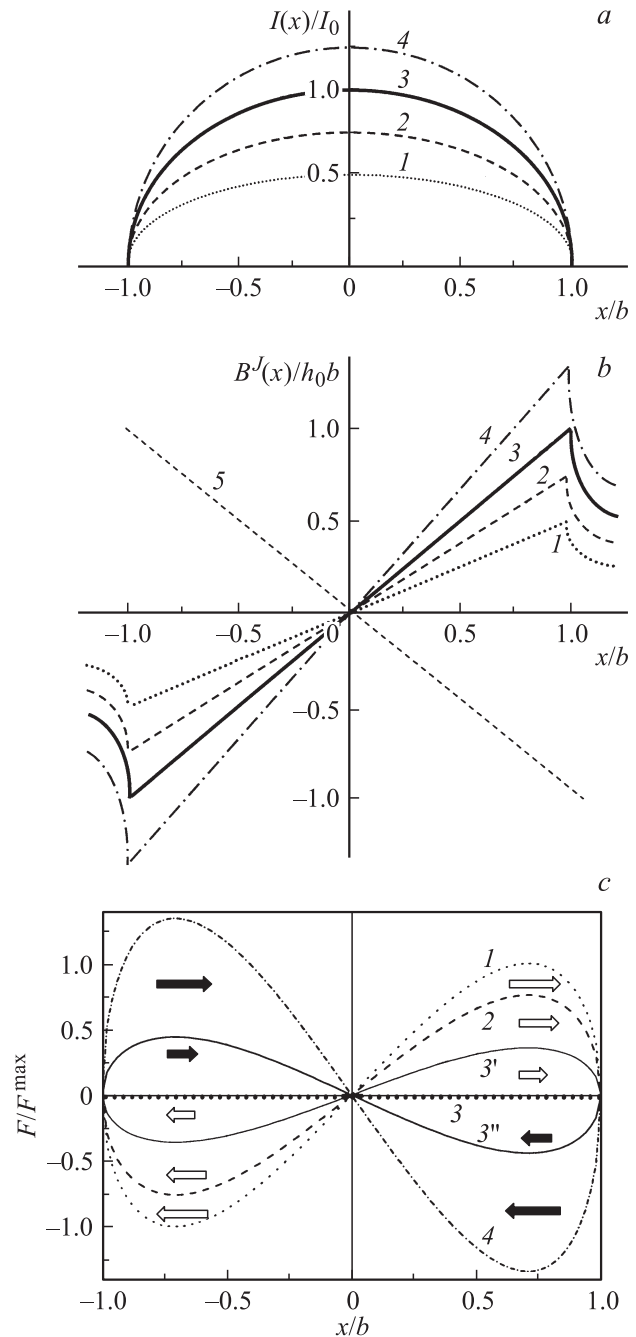


Рис. 1. Влияние силы тока J_z , текущего в пределах слоя, на динамику классических токовых слоев: *a* — продольные распределения тока $I(x)$; *b* — продольные распределения нормальной компоненты магнитного поля $B_y^J(x)$; *c* — продольные распределения сил Ампера F_x . Значения J_z/J_z^0 , соответствующие кривым 1–4, равны 0.5 (1), 0.75 (2), 1.0 (3), 1.25 (4). Прямая линия 5 — начальное магнитное поле $B_y^0(x)$. Белыми стрелками показано направление сил, приводящих к растяжению слоев, черными стрелками — направление сил, ведущих к сжатию слоев.

определяющая зависимости силы Ампера от тока J_z , имеет максимум, равный $F_x^{\max} = 0.25J_z^0 h^0 / \pi c$, при $J_z = 0.5J_z^0$. Поделив обе части выражения (5) на F_x^{\max} , получим безразмерную формулу для расчета продольного распределения сил

$$\frac{F_x(x)}{F_x^{\max}} = \frac{8J_z}{J_z^0} \left[1 - \frac{J_z}{J_z^0} \right] \frac{x}{b} \sqrt{1 - (x/b)^2}. \quad (6)$$

Влияние изменения величины тока J_z на динамику токовых слоев иллюстрирует рис. 1. На рис. 1, а представлены продольные распределения тока при четырех значениях полного тока $J_z = 0.5J_z^0$ (1), $J_z = 0.75J_z^0$ (2), $J_z = J_z^0$ (3) и $J_z = 1.25J_z^0$ (4). Все значения $I(x)$ отнесены к $I_0 = 2J_z^0 / \pi b$.

На рис. 1, б изображены распределения у-компоненты магнитного поля $B_y^J(x)$ этих слоев (кривые 1–4) и исходного поля B_y^0 (прямая 5), отнесенные к величине $h_0 b$.

Продольные распределения $F_x(x)/F_x^{\max}$ при значениях J_z/J_z^0 , соответствующих рис. 1, а, б, представлены на рис. 1, с. Как видно из рисунка, во всех случаях, когда $J_z/J_z^0 < 1$, силы направлены от нулевой линии к краям слоя (белые стрелки) и приводят к расширению слоя. При $J_z/J_z^0 = 0.5$ (кривая 1) амплитуда растягивающей силы достигает своего абсолютного максимума, равного F_x^{\max} . Увеличение тока до $J_z/J_z^0 = 0.75$ (кривая 2) ведет к уменьшению максимального значения силы до $0.75F_x^{\max}$, а при $J_z/J_z^0 = 1$, что соответствует условию формирования нейтрального токового слоя, силы Ампера равны нулю (прямая 3). При токах $J_z > J_z^0$ происходит скачкообразное изменение направления сил Ампера и переход к режиму сжатия. Направление сил, приводящих к сжатию слоя, показано черными стрелками. На рис. 1, с нанесены две кривые, соответствующие значениям J_z/J_z^0 , отличающимся от единицы всего на 10%, и иллюстрирующие переход от режима расширения к режиму сжатия слоя: кривая 3' соответствует $J_z/J_z^0 = 0.9$, а кривая 3'' — $J_z/J_z^0 = 1.1$. Дальнейшее увеличение J_z/J_z^0 (кривая 4) приводит к быстрому (квадратичному) росту сил сжатия, т.е. к пинч-эффекту.

Следует отметить, что столь резкий переход от режима растяжения к режиму сжатия может происходить только при продольном распределении тока вида $I(x) = I(0)\sqrt{1 - (x/b)^2}$. При других одnogорбых продольных распределениях тока одновременной полной компенсации магнитных полей $B_y^J(x)$ и B_y^0 вдоль всей ширины слоя не происходит (см. [1] рис. 3).

1.3. Динамика двугорбых токовых слоев

Динамику двугорбых токовых слоев рассмотрим на примере слоя с продольным распределением плотности тока, описываемым функцией

$$I(x) = I(0)[1 + 5(x/b)^2 - 6(x/b)^4]. \quad (7)$$

При этом полный ток, протекающий в пределах слоя, равен

$$J_z = \int_{-b}^b I(x) dx \approx 2.94bI(0)$$

и соответственно

$$I(0) \approx 0.34J_z/b.$$

Магнитное поле $B_y^J(x)$, соответствующее этому распределению тока, равно [1]

$$B_y(x) \cong -\frac{2J_z}{3cb} \left\{ (1 + 5(x/b)^2 - 6(x/b)^4) \ln \left| \frac{x-b}{x+b} \right| + 6(x/b)[1 - 2(x/b)^2] \right\}. \quad (8)$$

Расчет сил взаимодействия тока с магнитным полем B_y^{tot} в этом случае осуществлялся по формуле (3). Для удобства сравнения абсолютных значений токов, магнитных полей и сил для двугорбого слоя с аналогичными величинами для классического слоя, величины $I(x)$, так же как и на рис. 1, отнесены к $I_0 = 2J_z^0 / \pi b$, магнитные поля — к $h_0 b = 4J_z^0 / cb$, а силы — к $F_x^{\max} = 0.25J_z^0 h^0 / \pi c$.

Соответствующие безразмерные формулы имеют вид

$$\frac{I(x)}{I_0} = 0.53 \frac{J_z}{J_z^0} [1 + 5(x/b)^2 - (x/b)^4], \quad (9)$$

$$\frac{B_y^{\text{tot}}(x)}{h_0 b} \cong -\frac{x}{b} - \frac{J_z}{6J_z^0} \left\{ (1 + 5(x/b)^2 - 6(x/b)^4) \ln \left| \frac{x-b}{x+b} \right| + 6(x/b)[1 - 2(x/b)^2] \right\}, \quad (10)$$

$$\frac{F_x(x)}{F_x^{\max}} = -8 \frac{I_z(x)}{I_0} \frac{B_y^{\text{tot}}}{bh_0}. \quad (11)$$

Продольные распределения, рассчитанные с помощью (9)–(11), представлены на рис. 2: $I(x)/I_0$ (а), $B_y^{\text{tot}}/h_0 b$ (б) и F_x/F_x^{\max} (с). Кривые 1–4 соответствуют тем же значениям J_z/J_z^0 , что и на рис. 1. Как видно из рис. 2, б, в центральной части слоя нормальная компонента поля B_y^J имеет тот же знак, что и исходное поле $B_y^0 = -h_0 x$, т.е. B_y^J и B_y^0 не компенсируют, а, наоборот, усиливают друг друга. В то же время на краях слоя (при $|x/b| > 0.5$) происходит изменение знака поля B_y^J , а при токах $J_z \geq J_z^0$ так же и знака поля B_y^{tot} .

Продольное распределение сил Ампера F_x , ответственных за перемещение токов и плазмы вдоль оси x , представлено на рис. 2, с, из которого следует, что при токах $J_z/J_z^0 < 1$ (кривые 1, 2) силы на всем протяжении слоя направлены от центра к периферии. При $J_z \geq J_z^0$ (кривые 3 и 4) на краях слоя возникает область, где силы направлены к центру. По мере увеличения J_z/J_z^0 размеры этой области расширяются, а модуль сил растет.

Следует также обратить внимание на абсолютную величину сил Ампера: силы эти в несколько раз больше,

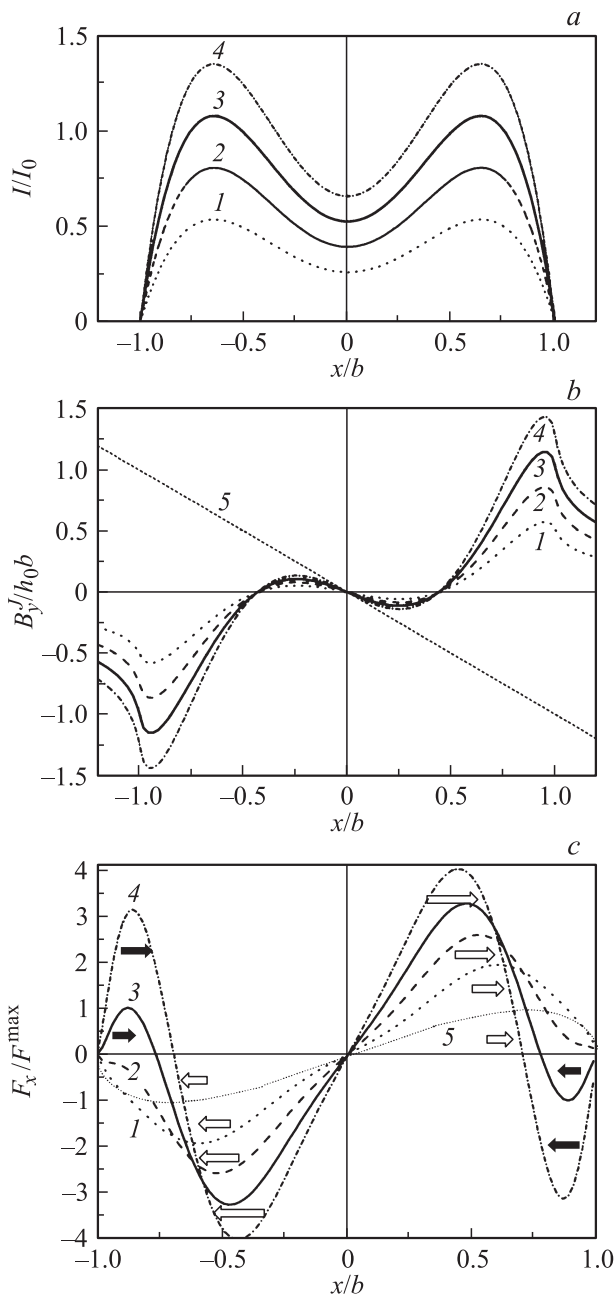


Рис. 2. Влияние силы тока J_z на динамику двугорбых токовых слоев: *a* — продольные распределения плотности тока $I(x)$ в токовых слоях; *b* и *c* — продольные распределения $B_y^0(x)$ и $F_x(x)$. Значения J_z/J_z^0 , соответствующие кривым 1–4, те же, что на рис. 1, 5 на рис. 2, *b* — $B_y^0(x)$, а на рис. 2, *c* 5 — распределение сил Ампера для классического токового слоя при $J_z/J_z^0 = 0.5$.

чем в случае классического слоя. Для удобства сравнения на рис. 2, *c* нанесено распределение сил (кривая 5) для классического слоя при $J_z/J_z^0 = 0.5$, что соответствует максимально возможному значению силы, равному F^{\max} . Как при меньших, так и при больших значениях J_z/J_z^0 силы, действующие на растяжение классического слоя, убывают, а при превышении значения $J_z/J_z^0 = 1$ силы меняют свое направление (рис. 1, *c*).

При сравнении абсолютных величин сил Ампера следует, однако, учитывать, что безразмерные значения токов J_z/J_z^0 , которым соответствуют функции, приведенные на рис. 1 и 2, вообще говоря, могут заметно отличаться для одногорбых и двугорбых слоев, поскольку величина J_z^0 в соответствии с (4) зависит от ширины слоя b . Скорость же расширения классических и двугорбых слоев существенно отличается, и они достигают данного значения b в разные моменты времени и соответственно при разных значениях тока J_z .

На основании проведенных расчетов можно утверждать, что структура поля сил, определяющих динамику двугорбых слоев, существенным образом отличается от поля сил, действующих в пределах классического слоя. Перечислим основные особенности динамики двугорбых токовых слоев.

1. Абсолютная величина сил, действующих на двугорбый слой, существенно больше, чем в случае классического слоя.
2. Силы, действующие в центральной части слоя, всегда направлены от центра к периферии. При увеличении тока эти силы растут и не меняют своего направления.
3. При больших токах на краях слоя возникают области, в которых силы направлены от краев к центру слоя навстречу растягивающим силам, что должно приводить к сжатию тока и плазмы на границе этих областей.

2. Сравнение данных о структуре и динамике токовых слоев, полученных экспериментально, с результатами расчетов

2.1. Экспериментальная установка и методы измерения

Большинство из цитированных выше экспериментальных работ (а именно [2–8]) были выполнены на установке ТС-3D [12,13], позволяющей создавать как 2D-магнитное поле с нулевой линией, так и 3D-поле с однородным продольным магнитным полем B_z . Обсуждаемые в настоящей работе результаты были получены в отсутствие продольного поля (при $B_z^0 = 0$), т.е. в двумерном магнитном поле с нулевой линией.

На рис. 3, *a* приведен вид сверху на плазменную камеру и голографическую установку, а на рис. 3, *b* — поперечное сечение плазменной камеры. Кварцевая вакуумная камера 3 диаметром 18 см заполняется исследуемыми газами (He, Ar, Kr, Xe). Плазма в камере с концентрацией $N_e \approx 10^{14} - 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ создается с помощью θ -разряда 5 при предварительной ионизации искровыми инжекторами. Поперечное магнитное поле (1) возникает при протекании токов через стержни 1. Ток J_z в камере возбуждается при подаче импульсного напряжения на сетчатые электроды, расположенные вблизи торцов плазменной камеры. Взаимодействие тока J_z с магнитным полем приводит к формированию токовых слоев 4.

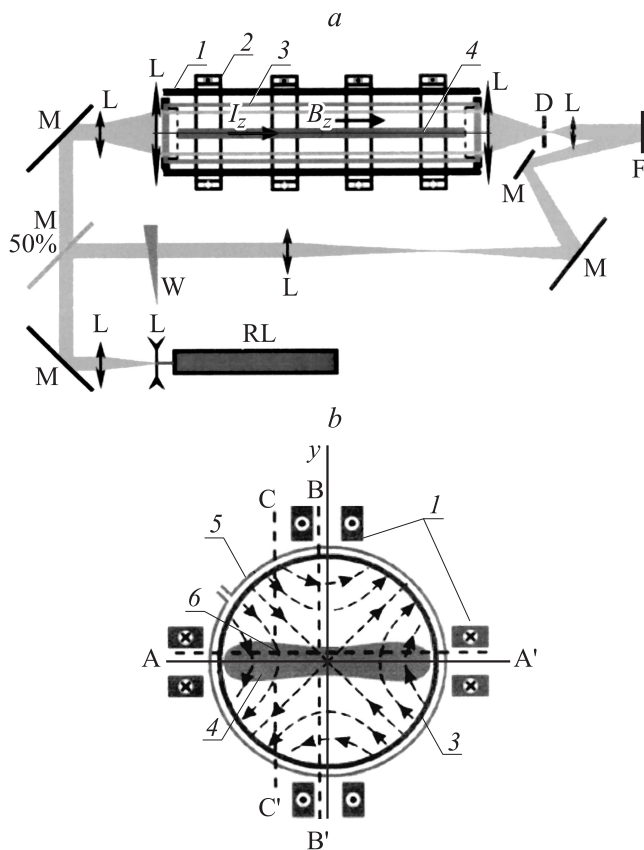


Рис. 3. Схема установки ТС-3D и голографического интерферометра: *a* — вид сверху на плазменную установку и голографический интерферометр. *b* — поперечное сечение плазменной камеры. 1 — стержни, протекание тока по которым создает поперечное магнитное поле B^0 ; 2 — катушки с током, создающие продольное магнитное B_z^0 ; 3 — кварцевая плазменная камера; 4 — токовый слой; 5 — система витков θ -разряда; 6 — линии, вдоль которых перемещались магнитные зонды (AA', BB', CC'), RL — импульсный рубиновый лазер, L — линзы, M — зеркала, W — стеклянный клин, D — диафрагма, F — плоскость регистрации голограмм.

В работах [2,8,14–16] магнитные поля исследовались с помощью системы магнитных зондов, позволяющих одновременно измерять все три составляющих магнитного поля, в точке, где расположен зонд. Структурная структура магнитного поля исследовалась путем передвижения магнитных зондов вдоль поверхности слоя (прямая AA') и поперек слоя (прямые BB' и CC'), рис. 3, *b*.

Другим методом, использованным для исследования структуры и динамики токовых слоев на установке ТС-3D, является метод голографической интерферометрии [3–7,17,18] (см. также [19,20] и цитированную там литературу). Схема голографического интерферометра приведена на рис. 3, *a*. Двухэкспозиционные голограммы регистрировались по схеме сфокусированных изображений в свете многомодового рубинового лазера ($\lambda = 694.3 \text{ nm}$, $\tau = 25 \text{ ns}$, $W = 20 \text{ MW}$). Предметный

пучок просвечивал плазму строго вдоль оси z плазменной камеры. Подробное описание голографической установки и методики получения и обработки голографических интерферограмм дано в [17]. Благодаря малой длительности лазерного импульса по сравнению с плазменными процессами каждая интерферограмма является мгновенным снимком плазмы в фиксированный момент времени. Поскольку все компоненты магнитного поля не зависят от координаты z , можно считать, что в первом приближении параметры плазмы также не зависят от z . Таким образом, сдвиги полос на голографических интерферограммах, полученных при просвечивании вдоль оси z , дают непосредственное представление о пространственном распределении электронной плотности N_e в плоскости (x, y) .

Временная эволюция токовых слоев исследовалась с помощью серий интерферограмм, полученных при изменении времени задержки между моментом включения импульсного тока J_z и импульсом лазерного излучения.

Ниже будет дан сравнительный анализ проведенных в [1] и в настоящей работе расчетов и экспериментальных результатов, полученных методами магнитных измерений и голографической интерферометрии.

2.2. Сравнение расчетов магнитных полей с данными магнитных измерений

Экспериментальному исследованию структуры магнитных полей и токов при формировании токовых слоев в магнитном поле с x -линиями посвящены работы [2,8,11,14–16]. В наиболее ранней из этих работ [11] наблюдалась практически полная компенсация y -компоненты начального магнитного поля аналогичной компонентой поля токового слоя, что соответствует получению нейтрального токового слоя. Наиболее детальное исследование структуры магнитных полей и токов выполнено на установке ТС-3D в работах [2,8,14].

Не вдаваясь в детали методики измерений магнитных полей, заметим только, что в отличие от использованного в наших расчетах начального поля (1), равного $B^0(x, y) = (-h_0x, -h_0y)$, при магнитных измерениях начальное поперечное поле имело вид $B^0(x, y) = (h_0x, h_0y)$, что в совокупности с изменением направления тока J_z не сказывается на направлении сил Ампера, ответственных за динамику токовых слоев.

Для удобства сравнения наших расчетов магнитных полей и сил Ампера, представленных на рис. 1 и 2 в безразмерном виде, с экспериментальными данными, полученными авторами работы [2], прежде всего нужно привести сравниваемые величины к одинаковым единицам. Сделаем это на примере рис. 4, заимствованного из работы [2], на котором приведены типичные результаты измерения продольных (*a*) и поперечных (*b, c*) распределений компонент магнитного поля. На рис. 4, *a* приведено также продольное распределение тока $I(x)$, вычисленное авторами [2] с помощью уравнения Максвелла на основании данных магнитных измерений. Это

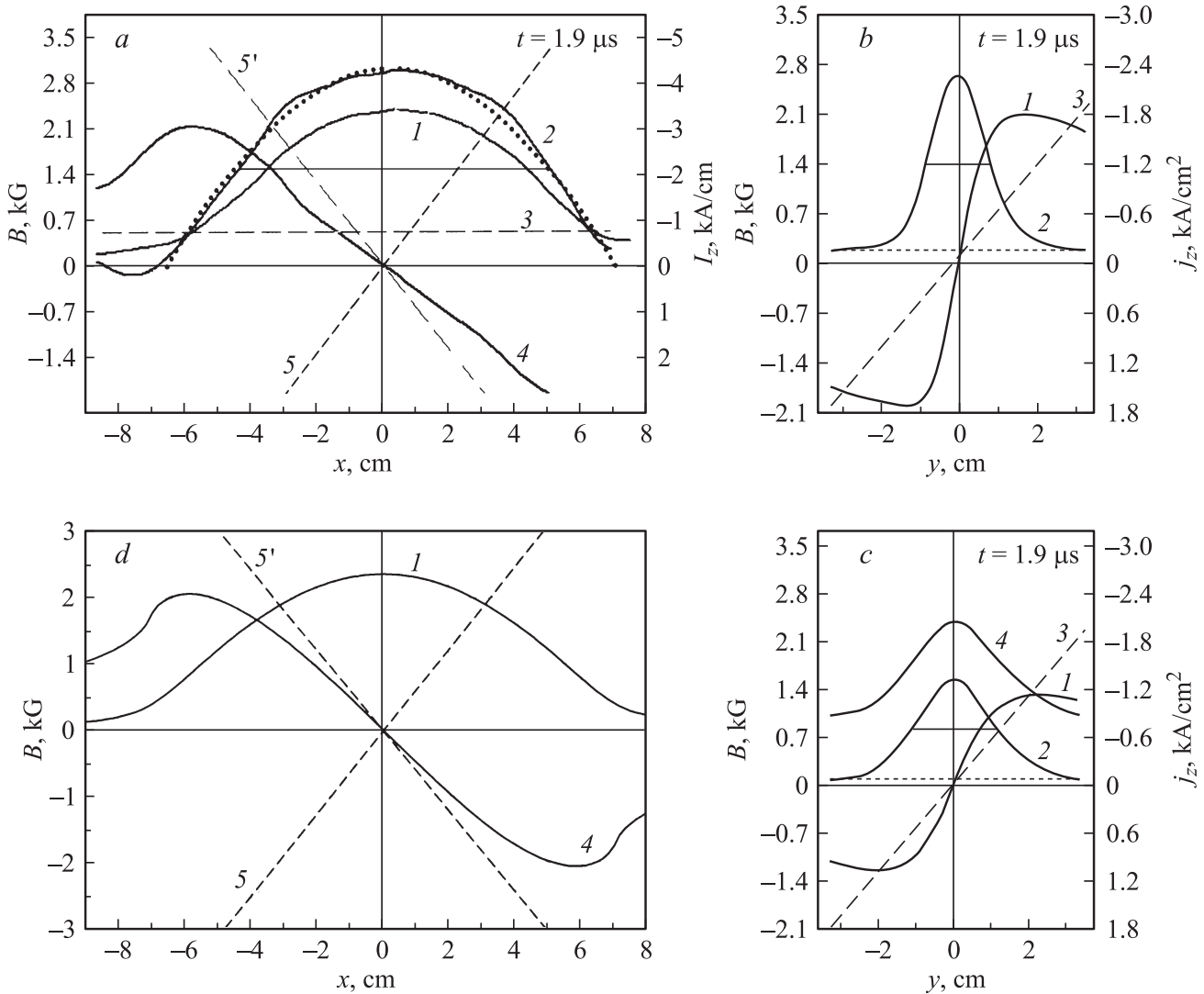


Рис. 4. Продольные и поперечные распределения магнитных полей и токов, измеренные при перемещении магнитных зондов вдоль линий: *a* — AA', $\Delta y = 0.8$ см; *b* — BB' при $x = -0.8$ см; *c* — CC' при $x = -5$ см, *d* — расчетные продольные распределения магнитных полей при аппроксимации $I_z(x)$ параболической функцией (точечная кривая на рис. 4, *a*). Условия эксперимента: Ar, $p = 28$ mTorr, $h_0 = 0.63$ kG/cm, $J_z^{\max} = 70$ kA, $t = 1.9$ μ s. *a*: 1 — $B_x^j(x)$, 2 — $I_z(x)$, 3 — $B_x^0(x) = h_0\Delta y$, 4 — $B_y^j(x)$, 5 и 5' — $\pm B_y^0(x)$. *b* и *c*: 1 — $B_x^j(y)$, 2 — $j_z(y)$, 3 — $B_x^0(y) = h_0y$, 4 — $B_y^j(y)$, *d*: 1 — $B_x^j(x)$, 4 — $B_y^j(x)$, 5 и 5' — $\pm B_y^0(x)$.

продольное распределение с хорошей точностью можно аппроксимировать параболической функцией

$$I(x) = I(0)[1 - x^2/b^2], \tag{12}$$

где $b \approx 7$ см и $I(0) = 4.3$ kA/cm (точечная кривая на рис. 4, *a*). Продольные распределения y -компоненты магнитного поля слоя при $I(x)$ вида (12), вычисленные в [1], формула (19), при измерениях тока в Амперах и магнитного поля в Гауссах, принимает вид:

$$B_y^j(x, 0) \approx 0.2I(0) \times \left[(1 - x^2/b^2) \left(\ln \left| \frac{1 - x/b}{1 + x/b} \right| \right) - 2x/b \right]. \tag{13}$$

Распределение x -компоненты вдоль слоя на расстоянии Δy от оси x рассчитывалось по формуле (10) [1]

$$B_x^j(x, \Delta y) = 0.2\Delta y \int_{-b}^b \frac{I(x')dx'}{(x' - x)^2 + (\Delta y)^2} = 0.2I(0)\Delta y \int_{-b}^b \frac{[1 - (x'/b)^2]dx'}{(x' - x)^2 + (\Delta y)^2}. \tag{14}$$

Результаты расчетов $B_y^j(x, \Delta y)$ и $B_x^j(x, \Delta y)$ приведены на рис. 4, *d*. Сравнение рис. 4, *a* и *d*, свидетельствует о хорошем не только качественном, но и количественном соответствии расчетных и экспериментальных ве-

личин. Такое совпадение экспериментально измеренных и расчетных распределений магнитного поля является в значительной мере закономерным. Оно свидетельствует лишь о правильности расчета $I(x)$ по измеренным распределениям магнитных полей, выполненного авторами [2], и корректности принятой нами методики решения обратной задачи: расчета магнитного поля [1] по известному распределению тока $I(x)$.

Как видно из рис. 4, *a, d*, магнитное поле $B_y^J(x, 0)$ на всем протяжении слоя по абсолютной величине меньше исходного поперечного поля $B_y^0(x, 0) = h_0x = 0.63x$ (значения h_0x и $-h_0x$ показаны на рис. 4, *a, d* штриховыми линиями 5 и 5'). Таким образом, полной компенсации магнитных полей в пределах слоя не происходит, и слой не является нейтральным, а суммарное магнитное поле $B_y^{\text{tot}}(x, 0) = h_0x + B_y^J(x, 0)$ по знаку совпадает с исходным полем B_y^0 . Неполная компенсация магнитных полей, по-видимому, свидетельствует о том, что отношение J_z/J_z^0 в данном случае меньше единицы. Действительно, ток J_z , текущий через слой в пределах от $-\Delta u$ до Δu , легко найти путем численного интегрирования экспериментального распределения $I(x)$ (кривая 2, рис. 4, *a*) или аппроксимирующей его функции (12). В обоих случаях получаем $J_z \approx 40$ кА. В то же время величина J_z^0 , найденная из условия нейтральности токового слоя (4) при $b = 7$ см и $h_0 = 0.63$ кГ/см, равна $J_z^0 \approx 80$ кА. Таким образом, в данных условиях $J_z/J_z^0 < 1$, что соответствует режиму растяжения слоя (рис. 1, кривые 1, 2 и 3').

Силы Ампера, ответственные за динамику плазмы в направлении оси x , можно рассчитать с помощью соотношения (3). На рис. 5, *a* приведены распределения сил Ампера, рассчитанные авторами [2], на основе экспериментальных данных, полученных с помощью магнитных измерений (рис. 10, *a* из работы [2]). Силы (кривая 3) выражены в единицах CGS, а именно в Mdyn/cm^2 . Если $I_z(x)$ измерено в кА/см, а магнитное поле в кГ, соотношение (3) принимает вид

$$F_x(x) [\text{Mdyn/cm}^2] = -0.1I_z(x)B_y^{\text{tot}}(x), \quad (15)$$

где $B_y^{\text{tot}}(x) = B_y^0(x) + B_y^J(x)$ по абсолютной величине равно вертикальному размеру заштрихованной области между прямыми 2 и 4' (рис. 5, *a*).

На рис. 5, *a* нанесена также аппроксимация зависимости $I(x)$ параболической кривой вида (12) с параметрами $b \approx 7.5$ см, $I(0) = 3.2$ кА/см (точечная кривая).

Результаты расчетов продольных распределений $B_y^J(x)$ и $F_x(x)$ по формулам (13) и (15) представлены на рис. 5, *b* и находятся в хорошем согласии с результатами, полученными на основе магнитных измерений (рис. 5, *a*). Направление сил показано стрелками.

Следует напомнить, что рассчитанные ранее распределения сил (рис. 1, 2) были отнесены к величине $F_x^{\text{max}} = 0.25J_z^0h_0/\pi c$, соответствующей максимально возможному значению силы, действующей на слой с классическим распределением плотности тока вида $I(x) = (2J_z/\pi b)\sqrt{1 - (x/b)^2}$. Поскольку, согласно (4),

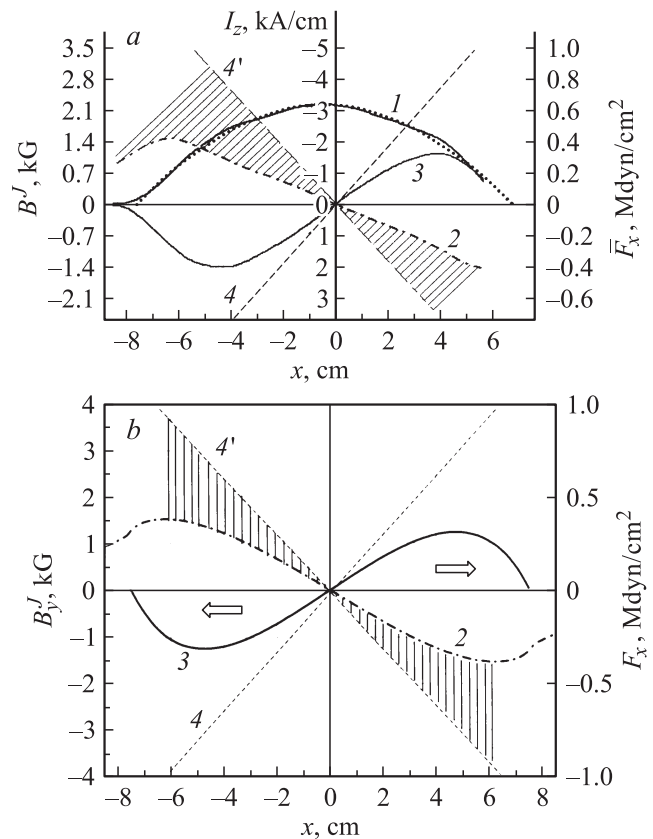


Рис. 5. Продольные распределения сил Ампера, полученные на основе экспериментальных данных [2] (*a*) и рассчитанные при параболической аппроксимации экспериментального распределения тока $I_z(x)$ (*b*). 1 — $I_z(x)$, точечная кривая — аппроксимация $I_z(x)$, 2 — $B_y^J(x)$, 3 — $F_x(x)$, 4 и 4' — $\pm B_y^0$. Стрелками на рис. *b* показано направление сил Ампера. Условия эксперимента: Ar, $p = 28$ мТорр, $h_0 = 0.63$ кГ/см, $J_z^{\text{max}} = 70$ кА, $t = 2.22$ мкс.

$J_z^0 = cb^2h_0/4$, $F_x^{\text{max}} = h_0^2b^2/16\pi \approx 0.02(bh_0)^2$. При значении параметров $h_0 = 0.63$ кГ и $b = 7.5$ см, соответствующих рис. 5, $J_z^0 \approx 90$ кА, а $F_x^{\text{max}} \approx 0.45$ Mdyn/cm^2 . Как было показано в разд. 2.2, максимальное значение силы достигается при $J_z/J_z^0 = 0.5$ (рис. 1, *c*). По нашим оценкам, величина тока J_z , найденная путем численного интегрирования распределения $I_z(x)$ (кривая 1 на рис. 5, *a*), равна $J_z \approx 33$ кА, что соответствует $J_z/J_z^0 \approx 0.37$. Соответственно и максимальная величина сил Ампера в данном случае несколько меньше F_x^{max} : 0.3 и 0.4 Mdyn/cm^2 на рис. 5, *a* и 0.32 Mdyn/cm^2 на рис. 5, *b*.

2.3. Сопоставление данных, полученных методом голографической интерферометрии, и результатов магнитных измерений

В отличие от магнитных измерений, в которых для получения структуры магнитного поля необходимы многократные повторения импульсов плазменной установки и перемещение зондов в пространстве, голографическая интерферометрия позволяет получать за одну вспышку

лазера двумерное распределение концентрации электронов $N_e(x, y)$ в плазменном слое, соответствующее определенной фазе формирования токового слоя.

На рис. 6 представлены типичные голографические интерферограммы плазменных слоев, формирующихся в аргоновой плазме в двух различных режимах.

1. С θ -разрядом, когда высокоионизованная плазма с концентрацией электронов $N_{e,0}(1) \approx 10^{14} - 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ создавалась до начала импульса тока J_z с помощью θ -разряда [3,17,18].

2. Без θ -разряда, когда предварительная ионизация осуществлялась только искровыми инжекторами и начальная концентрация электронов $N_{e,0}$ (2) была $\sim 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ [3–5].

В первом случае, как правило, формировались плазменные слои с максимумом N_e в центре и плавным уменьшением концентрации по мере удаления от центра. Интерферограмма такого одностороннего слоя приведена на рис. 6, *a*. Во втором случае (без θ -разряда) возникали двугорбые плазменные слои с максимумами N_e , расположенными вблизи краев слоя, и минимумом N_e в центре (рис. 6, *b*). Продольные распределения $N_e(x)$, рассчитанные по этим интерферограммам, приведены на рис. 6, *c*. На рис. 6, *d* приведены поперечные распределения $N_e(y)$, измеренные по голограмме (*a*) в центре слоя (при $x = 0$) (1) и на расстоянии $x = 5 \text{ cm}$ (2).

Слои, формирующиеся в этих двух режимах, существенно отличаются не только пространственным распределением $N_e(x, y)$, но и своей динамикой. Поскольку магнитные измерения структуры токовых слоев [2,8,11,14–16] были выполнены в первом режиме, то и сравнивать результаты магнитных измерений будем в первую очередь с голографическими данными, полученными при предварительной ионизации плазмы θ -разрядом. Из сравнения данных, приведенных на рис. 4, *a–c* и рис. 6, *c, d*, можно выявить некоторые общие особенности структуры плазменных и токовых слоев.

1. Габариты (ширина и толщина) токовых и плазменных слоев достаточно близки, несмотря на некоторые различия условий эксперимента, и момента времени, при котором получены экспериментальные данные (см. подписи к рис. 4 и 6).

2. Продольные распределения тока $I_z(x)$ (рис. 4, *a*, кривая 2) и электронной плотности $N_e(x)$ (функция 1 на рис. 6, *c*) имеют максимум в центре слоя и плавно уменьшаются по мере приближения к краям.

3. Толщина слоя, измеренная на половине высоты поперечных профилей $j(y)$ (кривые 2, на рис. 4, *b, c*) и $N_e(y)$ (кривые 1, 2, рис. 6, *d*), примерно на порядок меньше продольного размера слоя.

4. Толщина слоя, измеренная вблизи краев слоя (при $x = 5 \text{ cm}$), заметно больше, чем в центральной части слоя.

Таким образом, токовые и плазменные слои, полученные в плотной плазме, предварительно ионизованной θ -разрядом, имеют весьма сходную пространственную структуру. Количественное сравнение параметров в данном случае не имеет смысла не только в силу различия

условий эксперимента, но и потому, что сравниваемые величины (плотность тока и концентрация электронов) необязательно должны быть пропорциональны друг другу. Кроме того, распределение концентрации электронов, приведенное на рис. 6, измерено на оси слоя (при $y = 0$), а распределения $I(x)$, полученные в работах [2,8], являются интегральными по толщине слоя в пределах $\pm \Delta y$.

Что касается двугорбых слоев, возникающих в изначально слабоионизованной плазме (в режимах без θ -разряда), то экспериментальные данные о распределении магнитных полей и токов в данном режиме отсутствуют. Несмотря на все эти оговорки, постараемся все же сравнить динамику односторонних и двугорбых плазменных слоев на примере слоев, приведенных на рис. 6, *a, b*, с привлечением некоторых данных о распределении магнитных полей и токов в классических слоях, формируемых в плазме, предварительно ионизованной θ -разрядом [2,8].

Слои, интерферограммы которых приведены на рис. 6, *a, b*, имеют практически одинаковую ширину $b \approx 7 \text{ cm}$. Формировались они при заполнении плазменной камеры аргоном при одинаковом давлении, а также при одинаковых значениях $h_0 = 0.57 \text{ kG/cm}$ и $J_z^{\text{max}} = 50 \text{ kA}$, но соответствуют разным моментам $t = 3.05 \mu\text{s}$ (*a*) и $1.6 \mu\text{s}$ (*b*).

Изменение со временем некоторых параметров токовых слоев иллюстрирует рис. 6, *e*. На нем представлено изменение со временем концентрации электронов в центре слоев, формируемых в Ag в режимах с θ -разрядом (1) и без него (2), а для двугорбых слоев также концентрации в боковых максимумах $N_e^{\text{max}}(t)$ (3). Эти данные получены на основе обработки серий голографических интерферограмм, соответствующих различной задержке лазерного импульса, относительно момента начала импульсного тока $J_z^{\text{tot}}(t)$, временной профиль которого также показан на рис. 6, *e* (кривая 4). С помощью зависимости $J_z^{\text{tot}}(t)$ можно оценить примерную величину тока J_z^{tot} в интересующие нас моменты времени: 50 kA (при $3.05 \mu\text{s}$) и 24 kA (при $1.6 \mu\text{s}$). Реальный ток, текущий в пределах слоя, может быть только меньше этих величин. Поэтому произведем расчеты сил Ампера для слоя (*a*) при двух значениях тока $J_z = 50$ и 35 kA. Последняя величина равна половине тока J_z^0 , который в соответствии с (4) равен в данном случае $\approx 70 \text{ kA}$. Напомним, что при $J_z/J_z^0 = 0.5$ достигается абсолютный максимум сил Ампера в классическом слое при заданных значениях b и h_0 .

Предположим также по аналогии с рис. 4, *a* и 5, *a*, заимствованными из работы из [2], что продольное распределение тока в данном случае можно аппроксимировать функцией (12) с $I(0) = 0.75J_z/b$, равными при заданных токах 3.7 и 5.3 kA/cm.

Для двугорбого слоя (рис. 6, *b*) положим $J_z \approx J_z^{\text{tot}} = 24 \text{ kA}$, исходя из предположения, что в слабоионизованной плазме, окружающей токовый слой, плотность тока пренебрежимо мала, и практически весь ток

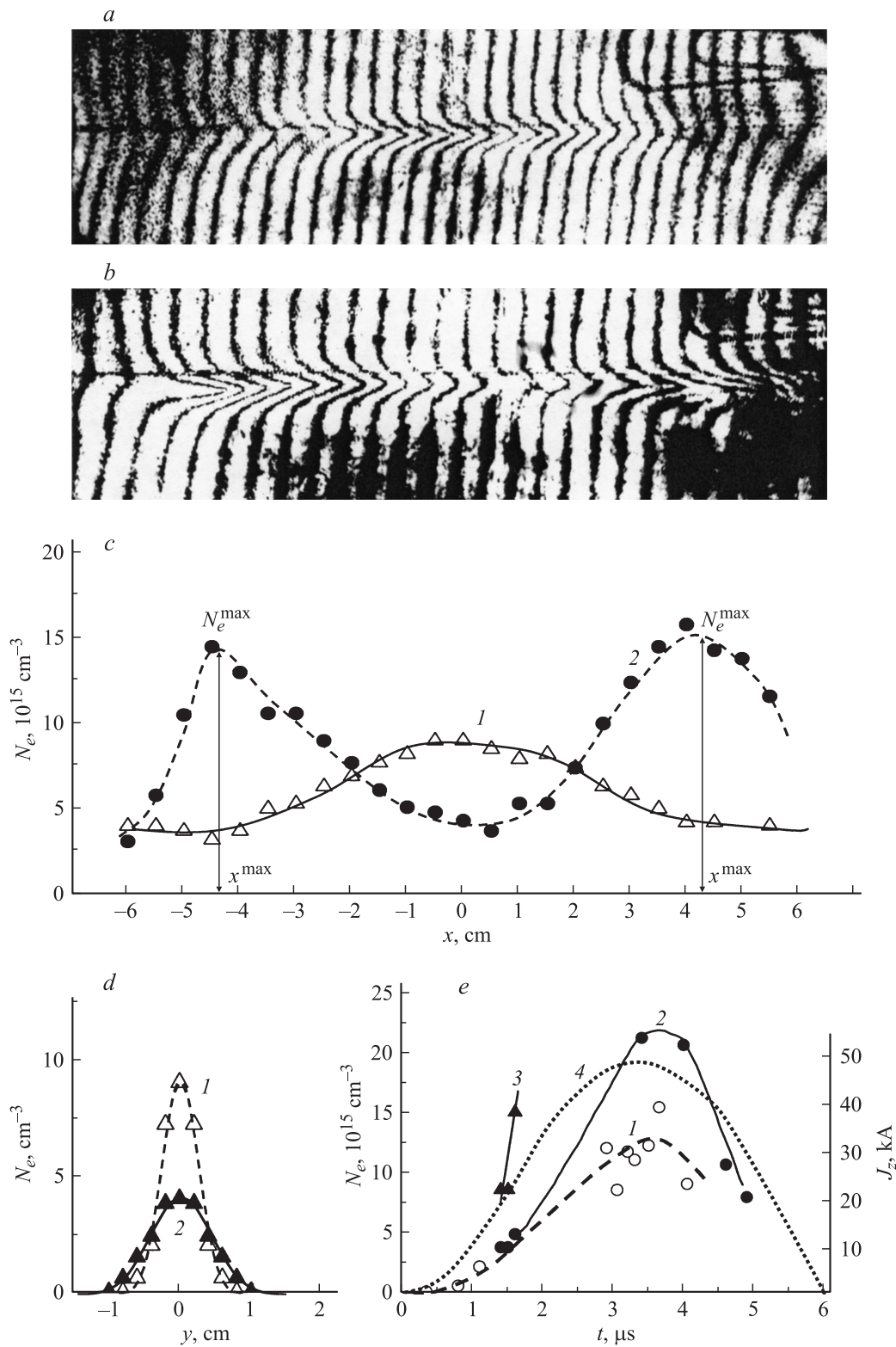


Рис. 6. Голографические интерферограммы плазменных слоев, формирующихся при ионизации плазмы θ -разрядом (а) и в отсутствие θ -разряда (b); с — продольные распределения электронной плотности в плазменных слоях, измеренные по голографическим интерферограммам а (кривая 1) и b (кривая 2). d — поперечные распределения электронной плотности в центре (1) (при $x = 0$) и на краях слоя (2) (при $x = 5$ см), измеренные по интерферограмме а. e — зависимость от времени концентрации электронов в центре N_e^0 (1, 2) и в боковых максимумах N_e^{\max} (3) в плазменных слоях, формирующихся в Ag в присутствии θ -разряда (1) и в его отсутствие (2, 3), и временной профиль импульсного тока $J_z^{\text{tot}}(x)$ (4). Условия эксперимента: Ar, $p = 28$ mTorr, $h_0 = 0.57$ kG/cm, $J_z^{\max} = 50$ kA, $t = 3.05$ μ s (a) и $t = 1.6$ μ s (b).

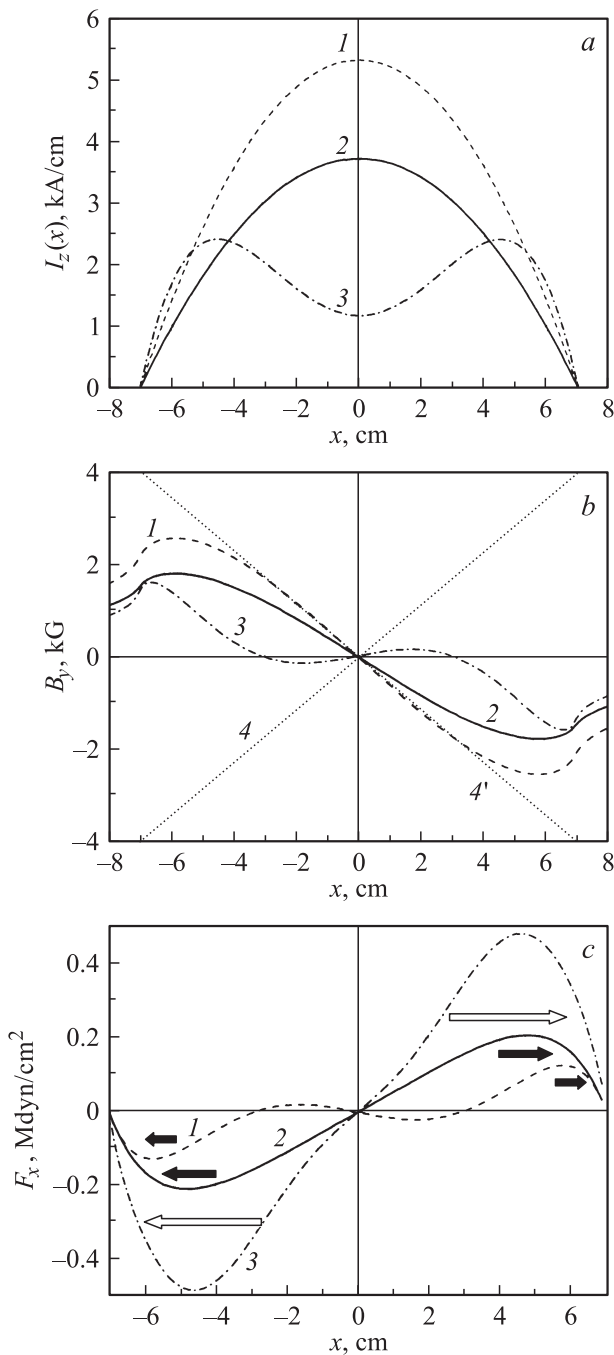


Рис. 7. Сравнение структуры магнитного поля и сил Ампера, определяющих динамику одногорбого (1, 2) и двугорбого (3) плазменных слоев; *a* — принятые при расчетах продольные распределения $I_z(x)$; *b* — расчетные величины $B_y^J(x)$ (1, 2, 3) и $\pm B_y^0(x)$ (4, 4'); *c* — продольные распределения сил Ампера (1, 2, 3).

сосредоточен в пределах слоя. В качестве аппроксимирующей функции используем двугорбую функцию (7), использованную ранее для расчета магнитных полей и сил, определяющих динамику двугорбых слоев (разд 2.2). Продольные распределения токов, принятые при расчете магнитных полей и сил Ампера, приведены на рис. 7, *a*,

а результаты расчетов — на рис. 7, *b, c*. На всех рисунках кривые 1, 2 соответствуют одногорбым слоям при $J_z = 50$ (1) и 35 (2) кА, а кривые 3 — двугорбому слою.

На рис. 7, *b* наряду с распределениями y -компоненты магнитных полей токовых слоев приведено распределение y -компоненты исходного поперечного поля $B_y^0 = h_0 x$ (4), а также $-B_y^0$ (4'). Как видно, в случае одногорбых слоев магнитные поля B_y^J (1, 2) и B_y^0 имеют противоположные знаки, и в значительной степени компенсируют друг друга, особенно в центральной части слоя. В случае же двугорбого слоя B_y^J (3) в центральной части слоя имеет тот же знак, что и B_y^0 , т.е. эти поля усиливают друг друга. Абсолютным величинам $|B_y^{\text{tot}}|$ соответствуют расстояния между функциями 1–3 и прямой (4'). При удалении от нулевой линии B_y^J (3) изменяет свой знак, но по абсолютной величине остается меньше $|B_y^0|$.

Результаты расчетов сил Ампера F_x , определяющих динамику плазмы в направлении оси x , приведены на рис. 7, *c*. Абсолютная величина сил в случае двугорбого слоя примерно в 2.5 раза больше, чем максимально возможная для одногорбого слоя. Направление сил Ампера показано стрелками (черными в случае одногорбого слоя и белыми для двугорбого слоя). Длина стрелок приблизительно пропорциональна максимальному значению модуля этих сил. Во всех случаях силы направлены от нулевой линии к краям слоя, что соответствует режиму растяжения слоев. Только в случае слоя с $J_z = 50$ кА (1) в центральной части слоя заметна тенденция к изменению направления сил, однако, судя по результатам магнитных измерений [2, 8], в реальных экспериментах такой режим не реализуется. Так что ток, текущий в пределах одногорбых слоев в каждый данный момент, по всей видимости, существенно меньше, чем $J_z^{\text{tot}}(t)$, и тем более меньше J_z^0 . При токе $J_z = 35$ кА (2) отношение $J_z/J_z^0 \approx 0.5$, что соответствует максимальным силам растяжения классического слоя, а при $J_z = 24$ кА, принятом при расчете сил Ампера в случае двугорбого слоя для $t = 1.6 \mu\text{s}$, $J_z/J_z^0 \approx 0.34$, что также соответствует режиму расширения вдоль всего слоя (рис. 2, кривая 1, 2).

Существенное увеличение сил Ампера, определяющих течение плазмы вдоль ширины двугорбых токовых слоев, позволяет объяснить ряд особенностей динамики двугорбых плазменных слоев, выявленных в работах [3–7], и в первую очередь быстрое перемещение максимумов N_e^{max} от нулевой линии к периферии. Скорость перемещения максимумов при формировании двугорбого слоя в Ar, рассчитанная как dx^{max}/dt , равна $\sim 6 \cdot 10^6$ см/с [7], что при прочих равных условиях многократно превышает скорость расширения плазменных слоев, формирующихся в плотной плазме, ионизованной θ -разрядом. Двигаясь с такой скоростью, боковые максимумы выходят из поля наблюдения голографического интерферометра уже при $t \approx 1.8 \mu\text{s}$, а при $t \approx 2.4 \mu\text{s}$ могут достичь стенок плазменной камеры, что должно существенным образом изменить динамику

плазмы. Примерно в это время начинается быстрый рост концентрации электронов в центре слоя (кривая 2 на рис. 6, *e*), опережающий рост N_e^0 в слое, формируемом в режиме θ -разрядом (кривая 1 на рис. 6, *e*).

Столь быстрое расширение двугорбых слоев, возникающих в режиме без θ -разряда в аргоновой плазме, должно приводить к дальнейшему уменьшению отношения J_z/J_z^0 благодаря квадратичной зависимости J_z^0 от b (4). Поэтому появление на краях двугорбых слоев областей, в которых силы меняют свое направление, при формировании слоев в Ar маловероятно. Как было показано в разд. 2.2, силы обратного направления возникают при $J_z/J_z^0 \geq 1$ (рис. 2, кривые 3, 4).

Тем не менее не исключена возможность возникновения сил обратного направления при формировании двугорбых слоев в режиме без θ -разряда в более тяжелых газах (Kr, Xe), для которых характерно существенно более медленное смещение боковых максимумов ($dx^{\max}/dt \approx 10^6$ cm/s), чем в Ar [6,7].

Заключение

На основании выполненных в настоящей работе расчетов проведен сравнительный анализ динамики плазменных слоев двух типов: одnogорбых слоев, формирующихся в магнитных полях с x -линией (1) в плотной плазме, предварительно ионизованной θ -разрядом, и двугорбых плазменных слоев, возникающих в плазме низкой плотности, ионизованной только искровыми инжекторами. Динамика токовых слоев первого типа, развивающихся в начальных магнитных полях с x -линией (1), достаточно хорошо изучена как теоретически [9–11], так и экспериментально [2,8,11–18,20]. Слои же второго типа впервые наблюдались при исследовании токовых слоев методом голографической интерферометрии [3–7]. При этом двугорбым является продольное распределение концентрации электронов в плазменных слоях. Какие-либо сведения о распределении магнитных полей и токов в этих слоях отсутствуют. Расчеты магнитных полей при разных двугорбых распределениях тока были выполнены в работе [1].

В настоящей работе (разд. 1) выполнены расчеты магнитных полей и сил Ампера, ответственных за перемещение тока и плазмы вдоль ширины одnogорбых (рис. 1) и двугорбых (рис. 2) слоев. Показано, что:

— максимальное значение сил, ответственных за динамику классических (одnogорбых) слоев, достигается при $J_z/J_z^0 = 0.5$, где J_z^0 — ток, соответствующий условию образования нейтрального токового слоя (4);

— в случае двугорбых слоев абсолютная величина сил Ампера существенно больше, чем для одnogорбых слоев (при равных значениях J_z/J_z^0), главным образом за счет того, что в центральной части слоя собственное поле двугорбого слоя совпадает по направлению с начальным магнитным полем (1);

— при значениях $J_z/J_z^0 \approx 1$ вблизи краев двугорбого слоя могут возникать области, где суммарное магнитное

поле противоположно по знаку начальному полю (1), а силы Ампера направлены навстречу силам, действующим в центральной области слоя.

Разд. 2 посвящен сравнению наших расчетов с результатами экспериментальных исследований токовых слоев. В разд. 2.1 приведена схема экспериментальной установки (рис. 3) и рассмотрена методика эксперимента.

В разд. 2.2 проведено сравнение рассчитанных нами значений магнитных полей и сил, с соответствующими величинами, непосредственно измеренными и вычисленными на основании магнитных измерений [2]. При наших расчетах магнитных полей мы использовали полученные авторами [2] продольные распределения тока $I(x)$, аппроксимируя их параболическими функциями вида (12). Хорошее совпадение (рис. 4, 5) магнитных полей и сил Ампера, измеренных и вычисленных в [2], с нашими расчетами свидетельствует о корректности принятой нами методики расчета магнитного поля [1] по известному распределению тока $I(x)$.

В разд. 2.3 сделан расчет магнитных полей и сил Ампера для двух реальных плазменных слоев (одnogорбого и двугорбого, рис. 6, *a, b*), формирующихся в Ar в двух режимах: *a* — в изначально плотной плазме, ионизованной θ -разрядом, и *b* — в плазме низкой плотности, ионизованной только искровыми инжекторами. В первом случае по аналогии с распределениями $I(x)$, полученными в [2], при расчетах в качестве аппроксимирующей функции принималась функция (12), а во втором случае — двугорбая функция (7), напоминающая продольное распределение $N_e(x)$ (рис. 6, *c*, кривая 2). Величина тока, текущего в пределах этих слоев, определялась, исходя из временного хода $J_z(t)$ (рис. 6, *e*).

Рассчитанные в этом случае продольные распределения сил Ампера (рис. 7, *c*) свидетельствуют о том, что силы, действующие на всем протяжении двугорбого слоя, примерно в 2.5 раза превышают силы, действующие на одnogорбый слой. Тем самым объясняется наблюдаемое в эксперименте [6,7] стремительное (со скоростью $\sim 6 \cdot 10^6$ cm/s) разбегание максимумов N_e от центра к периферии. Области на краях двугорбого слоя, в которых магнитные поля и силы меняют свое направление (см. рис. 2, *c*), в данном случае не возникают, что находится в хорошем согласии со сделанными нами оценками величины отношения $J_z/J_z^0 \approx 0.34$ для момента $t = 1.6 \mu\text{s}$, которому соответствует интерферограмма (рис. 6, *b*). Такие области, по-видимому, не могут возникнуть и в последующие моменты, ввиду быстрого расширения слоя, формирующегося в Ar, и соответствующего уменьшения отношения J_z/J_z^0 .

В то же время при формировании слоев в тяжелых газах, Kr и Xe, скорость перемещения максимумов значительно меньше, чем в Ar ($\sim 1.2 \cdot 10^6$ cm/s) [3–7]. Соответственно величины J_z/J_z^0 в этих газах могут быть существенно больше, чем в Ar, что может привести к возникновению на краях слоев сил, направленных к центру слоя. В соответствии с этим представляет существенный интерес проведение расчетов магнитных

полей двугорбых слоев, формирующихся в Кг и Хе при низкой начальной степени ионизации плазмы, чему и будет посвящена наша следующая публикация.

Работа выполнена при частичной поддержке Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 09-02-00971а и Программой фундаментальных исследований Отделения физических наук РАН ОФН-15 „Плазменные процессы в космосе и в лаборатории“.

Список литературы

- [1] *Островская Г.В.* // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 4. С. 59–68.
- [2] *Франк А.Г., Сатунин С.Н.* // Физика плазмы. 2011. Т. 33. С. 889–908.
- [3] *Богданов С.Ю., Дрейден Г.В., Марков В.С.* и др. // Физика плазмы. Т. 32. С. 1121–1135.
- [4] *Frank A.G., Bogdanov S.Yu., Dreiden G.V.* et al. // Phys. Lett. A. 2006. Vol. 348. P. 318–325.
- [5] *Богданов С.Ю., Дрейден Г.В., Марков В.С.* и др. // Физика плазмы. 2007. Т. 33. С. 1014–1027.
- [6] *Островская Г.В., Франк А.Г., Богданов С.Ю.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 7. С. 24–33.
- [7] *Островская Г.В., Франк А.Г.* // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 4. С. 75–85.
- [8] *Богданов С.Ю., Бугров С.Г., Грицына В.П.* и др. // Физика плазмы. 2007. Т. 33. С. 483–492.
- [9] *Сыроватский С.И.* // ЖЭТФ. 1971. Т. 60. С. 1727–1741.
- [10] *Syrovatskii S.I.* // Annu. Rev. Astron. Astrophys. 1981. Vol. 19. P. 163–229.
- [11] *Франк А.Г.* // Тр. ФИАН. 1974. Т. 74. С. 108–166.
- [12] *Богданов С.Ю., Бурилина В.Б., Марков В.С., Франк А.Г.* // Письма в ЖЭТФ. 1994. Т. 59. С. 510–514.
- [13] *Frank A.G.* // Plasma Phys. Contr. Fusion. 1999. Vol. 41. N 3A. P. A687–A697.
- [14] *Frank A.G., Bugrov S.G., Markov V.S.* // Phys. Plasma. 2008. Vol. 15. P. 092 102(1–10).
- [15] *Frank A., Bugrov S., Markov V.* // Phys. Lett. A. 2009. Vol. 373. P.1460–1464.
- [16] *Франк А.Г.* // УФН. 2010. Т. 180. № 9. С. 982–988.
- [17] *Богданов С.Ю., Марков В.С., Комиссарова И.И.* и др. // Физика плазмы. 2002. Т. 28. № 7. С. 549–604.
- [18] *Frank A.G., Bogdanov S.Yu., Markov V.S.* et al. // Phys. Plasma. 2005. Vol. 12. P. 05 2316(1–11).
- [19] *Островская Г.В.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 9. С. 1–28.
- [20] *Франк А.Г., Гавриленко В.П., Кирий Н.П., Островская Г.В.* // Энциклопедия низкотемпературной плазмы / Под ред. В.Н. Очкина. М.: Янус-К, 2008. Т. 3. № 2. С. 353–400.