

01

## О силе, действующей на проводящую сферическую частицу вблизи пластины плоского конденсатора

© В.А. Саранин

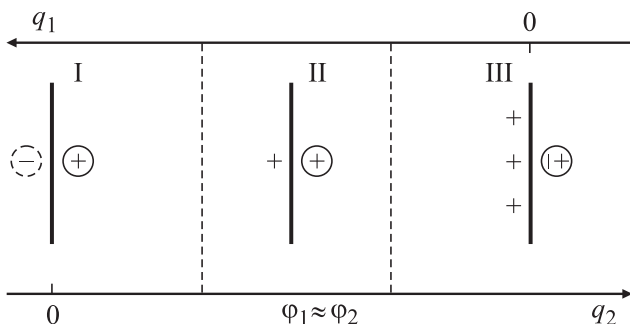
Глазовский государственный педагогический институт им. В.Г. Короленко,  
427621 Глазов, Россия  
e-mail: val-sar@yandex.ru, saranin@ggpi.org

(Поступило в Редакцию 13 марта 2012 г. В окончательной редакции 12 июля 2012 г.)

Рассчитаны потенциальная энергия и сила взаимодействия проводящей сферической частицы с одноименно заряженной плоской пластиной на близких расстояниях от нее. Для расчетов использован метод расчета силы через потенциальную энергию, пластина смоделирована проводящим шаром, радиус которого в 100 раз превышает радиус частицы. Считалось, что заряд частица получила не от пластины. Установлены области параметров, в которых частица всегда отталкивается от пластины, и области, в которых имеет место их притяжение.

Задача о взаимодействии проводящей сферической частицы (твердого шарика или капли) с одной из пластин плоского конденсатора имеет большое прикладное значение [1] и решалась многими авторами различными методами [2–5]. Однако во всех упомянутых работах рассматривался случай, когда частица получает заряд от пластины конденсатора, имея вблизи пластины такой же потенциал, как и пластина. В работах [3,6] показано, что 2 проводящих одноименно заряженных шара, находящихся вблизи друг друга, всегда отталкиваются, если их потенциалы равны или, по крайней мере, близки. В противном случае на близких расстояниях между шарами сила может иметь характер силы притяжения. Очевидно, что аналогичная ситуация может иметь место и в случае частицы с произвольным зарядом, оказавшейся вблизи пластины конденсатора. Действительно, рассмотрим три случая:

- 1) частица имеет некоторый заряд, а пластина заземлена и имеет нулевой потенциал,
- 2) частица и пластина заряжены и имеют равные потенциалы,
- 3) пластина заряжена и имеет потенциал, отличный от нуля, а частица не заряжена (рис. 1).



**Рис. 1.** Три хорошо известных случая взаимодействия проводящей сферической частицы с плоским электродом.  $q_1$  — заряд частицы,  $q_2$  — пластины.

Очевидно, в первом и третьем случаях частица будет притягиваться к пластине в результате эффектов электрической индукции, во втором, как было сказано выше, она отталкивается. Отметим, что все сказанное относится к случаю, когда среда, в которую помещена вся система, является идеальным диэлектриком. В противном случае даже при контакте частицы и пластины их потенциалы не равны и возможно притяжение частицы к пластине [3,4].

Таким образом, представляет интерес найти величины параметров системы, при которых состоится переход из области II в области I и III (рис. 1). Для решения задачи применим метод электрических изображений для двух проводящих заряженных шаров, помещенных в диэлектрическую среду с проницаемостью  $\epsilon$ , радиусы которых сильно отличаются. Как показали расчеты, представленные в [3,6], при отношении радиусов шаров, равном 100, сила взаимодействия между шарами на близких расстояниях с точностью порядка 1% совпадает с силой взаимодействия заряженного шарика и бесконечной проводящей плоскости.

Потенциальную энергию и силу взаимодействия шаров можно записать так [7]:

$$W(l) = \frac{1}{2} (q_1^2 s_{11} + 2s_{12} q_1 q_2 + q_2^2 s_{22}), \quad F_l = -\frac{\partial W}{\partial l}. \quad (1)$$

Здесь  $q_{1,2}$  — заряды шаров,  $l$  — расстояние между центрами шаров,  $s_{ik}$  — потенциальные коэффициенты, которые выражаются через емкостные по формулам [7]

$$s_{11} = \frac{c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad s_{12} = -\frac{c_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2},$$

$$s_{22} = \frac{s_{11}c_{11}}{c_{22}}. \quad (2)$$

Для емкостных коэффициентов шаров (сфер) известны явные выражения [7]

$$c_{11} = \frac{1}{k} R_1 R_2 \operatorname{sh} \beta \sum_{n=1}^{\infty} [R_2 \operatorname{sh} n\beta + R_1 \operatorname{sh}(n-1)\beta]^{-1},$$

$$c_{12} = -\frac{R_1 R_2 \operatorname{sh} \beta}{kx(R_1 + R_2)} \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sh} n\beta)^{-1}, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon},$$

$$c_{22} = \frac{1}{k} R_1 R_2 \operatorname{sh} \beta \sum_{n=1}^{\infty} [R_1 \operatorname{sh} n\beta + R_2 \operatorname{sh}(n-1)\beta]^{-1}. \quad (3)$$

Параметр  $\beta$  связан с расстоянием между центрами шаров  $x$  соотношением

$$\operatorname{ch} \beta = \frac{x^2(1+\gamma)^2 - (1+\gamma^2)}{2\gamma}, \quad x = \frac{l}{R_1 + R_2}, \quad \gamma = \frac{R_2}{R_1}. \quad (4)$$

В результате выражение для потенциальной энергии (1) можно привести к виду

$$W = \left( \frac{kq_1q_2}{(R_1 + R_2)} \right) \frac{(1+\gamma)}{2\alpha} \left[ \frac{\alpha^2 c_{11} - 2\alpha c_{12} + c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \right],$$

$$\alpha = \frac{q_2}{q_1}. \quad (5)$$

Емкостные коэффициенты выражены в единицах  $(R_2 + R)/k$ . Выражение для силы получается дифференцированием (5) по расстоянию между центрами шаров  $l$ . В единицах  $F_{Cm} = kq_1q_2/(R_1 + R_2)^2$  оно может быть представлено в форме

$$F_x = -\frac{x(1+\gamma)^3}{2\alpha\gamma \operatorname{sh} \beta} f(c_{ik}, c'_{ik}). \quad (6)$$

Здесь посредством  $f$  обозначена производная по  $\beta$  от выражения, стоящего в (5) в квадратных скобках:

$$f = \frac{(\alpha^2 c'_{11} - 2\alpha c'_{12} + c'_{22})(c_{11}c_{22} - c_{12}^2) - (\alpha^2 c_{11} - 2\alpha c_{12} + c_{22})(c'_{11}c_{22} + c_{11}c'_{22} - 2c_{12}c'_{12})}{(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)^2}. \quad (7)$$

Производные от емкостных коэффициентов по  $\beta$  равны

$$c'_{11} = -\operatorname{sh} \beta$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} n\beta (n + \gamma(n-1) \operatorname{ch} \beta) - \gamma(n-1) \operatorname{sh} n\beta \operatorname{sh} \beta}{(\operatorname{sh} n\beta (1 + \gamma \operatorname{ch} \beta) - \gamma \operatorname{ch} n\beta \operatorname{sh} \beta)^2}$$

$$+ c_{11} \operatorname{ch} \beta,$$

$$c'_{22} = -\operatorname{sh} \beta$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} n\beta (\gamma n + (n-1) \operatorname{ch} \beta) - (n-1) \operatorname{sh} n\beta \operatorname{sh} \beta}{(\operatorname{sh} n\beta (\gamma + \operatorname{ch} \beta) - \operatorname{ch} n\beta \operatorname{sh} \beta)^2}$$

$$+ c_{22} \operatorname{cth} \beta,$$

$$c'_{12} = c_{12} \operatorname{cth} \beta - c_{12} \frac{\operatorname{sh} \beta}{(1+\gamma)^2 x^2} + \frac{\operatorname{sh} \beta}{x(1+\gamma)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{ch} n\beta}{\operatorname{sh}^2 n\beta}. \quad (8)$$

Здесь следует отметить, что задача о силе взаимодействия двух проводящих заряженных шаров решалась разными авторами различными методами [8–10]. Одной из особенностей этой задачи является тот факт, что ряды в (3) и последующих формулах плохо сходятся на малых расстояниях между шарами. Для улучшения сходимости применяются различные методы, в основном сводящиеся к выражению гиперболических функций через убывающую экспоненту  $\exp(-n\beta)$ . Такой метод суммирования рядов был применен для расчета силы, например, в [9]. В более поздней работе автора [6] для расчета силы применялось прямое суммирование рядов (3) и им подобных в пакете MathCAD, которое показало хорошее совпадение как с ранними вычислениями в [9], с некоторыми результатами других авторов [8,10,11] (с которыми возможно сравнение), так и с экспериментальными измерениями силы [6]. Приведем пример. Расчет силы взаимодействия шаров с  $R_2/R_1 = 100$ ,  $q_2/q_1 = 100$  при  $x = 1.0002$  методом, изложенным в [9], дает  $F/F_{Cm} \approx 140.27$ , расчет в MathCAD с удержанием 100 слагаемых в суммах (3) дает  $F/F_{Cm} \approx 140.28$  ( $F_{Cm}$  — максимальная сила, вычисляемая в кулоновском приближении). Поэтому все вычисления в настоящей работе были произведены прямым суммированием рядов в MathCAD. Отметим, что выбор пакета MathCAD для вычислений в данном случае не является принципиальным.

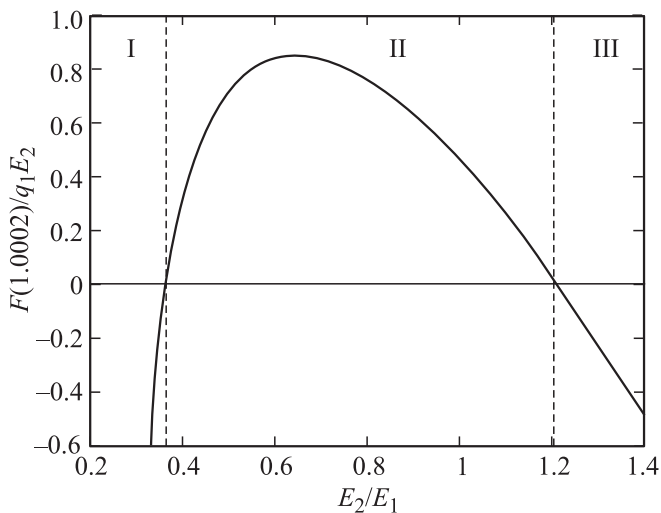
Итак, вычисление энергии и силы производилось в MathCAD с удержанием не менее 100 слагаемых в бесконечных суммах (3), (8) (проверочные расчеты с удержанием 200 слагаемых показали, что результаты различаются менее чем на 1%). Поскольку при сильно отличающихся по размеру тел их заряды становятся несопоставимыми, вместо отношения зарядов  $\alpha$  в расчетах использовался параметр  $\xi = q_2 R_1^2 / q_1 R_2^2 = E_2 / E_1$ , по сути равный отношению напряженностей поля на поверхности шаров в случае, когда они расположены далеко друг от друга. Единица измерения силы преобразовывалась к виду

$$F_{Cm} = \frac{kq_1q_2}{R_2^2(1 + R_1/R_2)^2} \approx q_1 E_2, \quad (9)$$

где  $E_2$  — напряженность поля у поверхности большего шара (у плоскости). Вместо расстояния между центрами шаров  $x$  использовалось расстояние между поверхностями тел (величина зазора)  $S$  в единицах  $R_1$ . При этом имеем соотношение

$$S \approx (x-1) \frac{R_2}{R_1}. \quad (10)$$

Считалось, что сила взаимодействия тел обращается в нуль (или потенциальная энергия имеет максимум) практически при их соприкосновении, если она равна



**Рис. 2.** Зависимость безразмерной силы, действующей на частицу, почти соприкасающуюся с одноименно заряженным электродом, от отношения напряженностей поля у электрода и на поверхности частицы.

нулю при  $x = 1.0002$ , что соответствует  $S = 0.02$  (при  $x = 1$  знаменатели рядов (3) обращаются в нуль), т.е. практически соприкасающимся поверхностям. Результаты расчетов представлены на рис. 2. Сплошной кривой показана величина силы практически при соприкосновении шара и плоскости. Как видно из графика, отталкивание шара от плоскости реализуется лишь в диапазоне параметров  $0.37 < \xi < 1.21$ , внутри которого потенциалы тел близки или равны. Максимум силы достигается при равных потенциалах, т.е. при условии, соответствующем зарядке шара от плоскости [2–5]:

$$\frac{E_2 R_1^2}{k q_1} = \frac{1}{1.645} = \xi \approx 0.608. \quad (11)$$

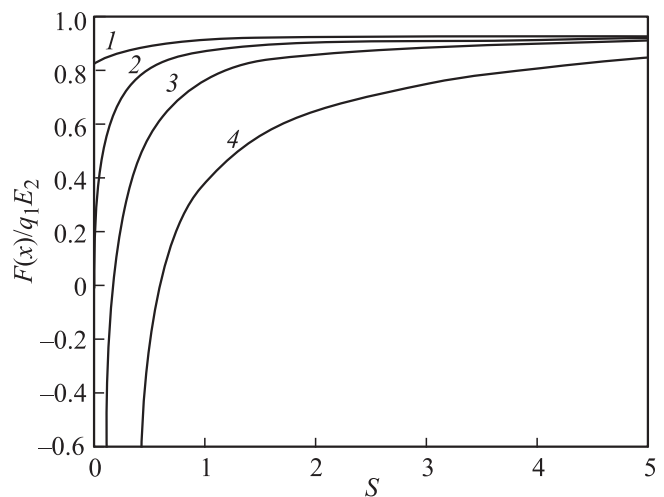
Величина силы при этом равна [2–5]  $F = 0.832 q_1 E_2$ . Отметим, что именно полученное ранее соотношение (11) делает параметр  $\xi$  естественным параметром, отвечающим за переходы из областей I, II, III в соседние.

На рис. 3 показаны зависимости безразмерной силы, действующей на частицу, от безразмерной величины зазора между частицей и плоскостью для различных отношений напряженностей. Видно, что с увеличением зазора, как и следовало ожидать, все силы стремятся к значению  $q_1 E_2$ .

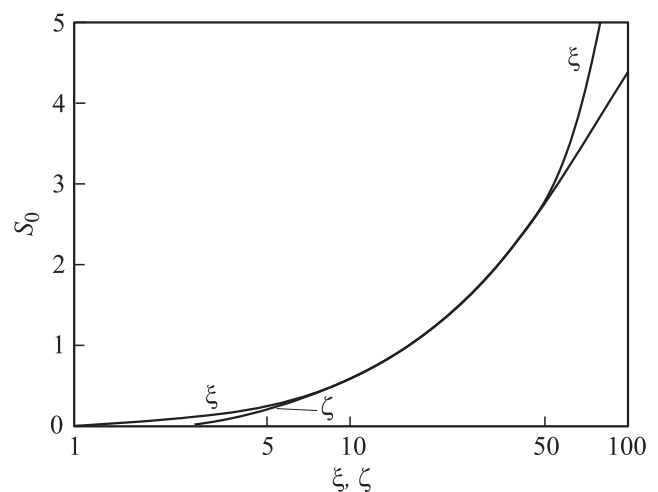
На рис. 4 в полулогарифмическом масштабе показана зависимость величины безразмерного зазора  $S_0$ , при котором сила, действующая на частицу, обращается в нуль от отношения напряженностей. При этом  $\xi = E_1/E_2 = \xi^{-1}$  и соответствующая кривая относится к области I на рис. 2. Кривая, помеченная как  $\zeta$ , относится к области III на рис. 2. По сути эти кривые можно назвать нейтральными кривыми. Выше кривых сила имеет характер силы отталкивания, ниже — притяжения. Заметим, что равновесие частицы на нейтральных

кривых неустойчивое — потенциальная энергия в этих местах имеет локальный максимум.

В заключение отметим еще одно важное обстоятельство. Очень часто маленькую заряженную частицу внутри плоского конденсатора заменяют точечным зарядом. В этом случае при сближении заряда с одноименно заряженной пластиной всегда найдется расстояние, начиная с которого сила отталкивания сменится силой притяжения (в результате наличия в пластине электрического изображения заряда). Проведенное выше исследование показало, что в некоторых случаях этот эффект принципиально невозможен. Поэтому на близких расстояниях между пластиной и частицей (по крайней мере порядка 5 радиусов частицы и меньше) приближение точечного заряда неприменимо.



**Рис. 3.** Зависимости безразмерной силы, действующей на частицу, от безразмерного зазора между частицей и электродом для различных величин отношения напряженностей. Расстояние измеряется в единицах, равных радиусу частицы. Кривым 1, 2, 3, 4 соответствуют  $\xi = 0.608, 0.37, 5, 0.1$ .



**Рис. 4.** Линии нулевой силы (нейтральные кривые). Выше кривых имеет место отталкивание частицы от электрода, ниже — притяжение.

## Список литературы

- [1] *Остроумов Г.А.* Взаимодействие электрических и гидродинамических полей: Физические основы электрогидродинамики. М.: Наука, 1979. 320 с.
- [2] *Лебедев Н.Н., Скальская И.П.* // ЖТФ. 1962. Т. 32. Вып. 3. С. 375–378.
- [3] *Шутов А.А.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 6. С. 9–16.
- [4] *Саранин В.А.* Метод электрических изображений в задачах и экспериментах. М.–Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2012. 128 с.
- [5] *Гладкий С.Л., Тарунин Е.Л., Ясницкий Л.Н.* // Вест. Пермского ун-та. Сер. Физика. 2011. Вып. 3 (18). С. 96–102.
- [6] *Саранин В.А., Майер В.В.* // УФН. 2010. Т. 180. № 10. С. 1109–1117.
- [7] *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. М.: Иностранная лит-ра, 1954. 604 с.
- [8] *Davis M.H.* // Quart. Journ. Mech. and Applied Math. 1964. Vol. 17. N 4. P. 499–511.
- [9] *Саранин В.А.* // УФН. 1999. Т. 169. № 4. С. 453–458.
- [10] *Гращенко С.И.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 7. С. 13–17.
- [11] *Kolikov K., Ivanov D., Krastev G., Epitropov Y., Bozhov S.* // Journ. of Electrostat. 2012. Vol. 70. P. 91–96.