

## Видеосолитоны в дисперсной линии передачи с нелинейной емкостью $p-n$ -перехода

© Д. Ч. Ким

Новосибирский государственный университет,  
630090, Новосибирск, Россия  
e-mail: dck@osmf.sscs.ru

(Поступило в Редакцию 1 ноября 2010 г. В окончательной редакции 20 июля 2012 г.)

Изучены возможные типы низкочастотных электромагнитных уединенных волн в дисперсной  $LC$ -линии передачи с квадратичной или кубической емкостью нелинейностью. Из дифференциально-разностного уравнения дискретной линии в континуальном приближении выведено нелинейное волновое уравнение четвертого порядка с омическими потерями. В линии без потерь оно сводится к нелинейному уравнению линии передачи, уравнению с двумя дисперсиями, уравнениям Буссинеска, уравнению Кортевега–де-Фриза (КДФ) и модифицированному уравнению КДФ. Рассмотрены уединенные волны в линии передачи с дисперсией и диссипацией.

### Введение

Электромагнитные нелинейные дисперсные линии передачи представляют большой интерес как для теории, так и для приложений. Монография [1] отражает в основном первый этап в развитии теории нелинейных волн и ее применений в радиофизике и электронике. Обзор экспериментальных работ первого этапа можно найти в [2].

Цепные  $LC$ -линии передачи со специально подобранными дисперсионными и нелинейными характеристиками в мегагерцовом диапазоне радиочастот являются идеальными моделями нелинейных диспергирующих сред. Они допускают реализацию разнообразных дисперсионных и нелинейных характеристик сред простым подбором самих элементов, их параметров и даже их взаимного расположения. Так, в [3] показано, что предложенная ими цепная линия передачи является электрической моделью одномерной механической ангармонической цепочки атомов, в которой взаимодействие частиц определяется потенциалом Морса (решетка Тоды). В биофизике известно, что биологические мембраны и нервное волокно можно описывать как нелинейные двухпроводные линии передачи с активным элементом, подобным  $p-n$ -переходу [4].

Разнообразные радиотехнические применения электромагнитных солитонов описаны в работе [5]. Активно ведутся работы по прямому преобразованию видеоимпульса в радиоимпульс при их распространении в электромагнитных линиях. В работе [6] показана генерация цуга солитонов в  $LC$ -цепочках с нелинейной емкостью. В [7] описан генератор солитонов на основе электромагнитной линии передачи. В [8] изучается возможность прямого и эффективного преобразования видеоимпульса в радиоимпульс при его распространении в линиях с пространственной дисперсией и нелинейностью на феррите. Экспериментально [9] и теоретически [10] исследован новый способ преобразования высоковольт-

ного видеоимпульса (110–290 кВ) в высокочастотные колебания (0.6–1.1 GHz) в нелинейной передающей линии с временной дисперсией, которая обеспечивается импульсным перемагничиванием феррита.

В одной из первых работ, посвященных исследованию уединенных волн в электрических цепях [11], экспериментально и теоретически изучены, в основном, свойства солитонов Кортевега–де-Фриза (КДФ) для случая квадратичной нелинейности. Вместе с тем, когда нелинейность линии кубическая, в этой и во всех последующих работах уединенные волны не рассматривались. В настоящей работе кубическая нелинейность реализуется на двух параллельно и противоположно включенных  $p-n$ -диодах. Кроме того, не исследовались солитоны на основе более точных модельных уравнений: нелинейного уравнения линии передачи (НУЛП), уравнения с двумя дисперсиями (УДД), уравнений Буссинеска. И практически не исследовались омические потери в электромагнитных линиях. Целью нашей работы является восполнить данный пробел.

Видеоимпульсы, не меняющие своей формы при распространении в нелинейной диспергирующей линии передачи, как в [12], названы видеосолитонами.

### Физическая постановка и математическая модель

В качестве нелинейной диспергирующей волновой системы выбрана дискретная линия передачи типа фильтра нижних частот с полупроводниковыми диодами, эквивалентная схема показана на рис. 1. Каждая секция линии представляет собой  $LC$ -четырёхполосник, в котором в качестве нелинейной емкости выбран обратносмещенный  $p-n$ -диод. Здесь  $\dots (n-1), n, (n+1) \dots$  — номера секций (узлов) линии,  $L$  — линейная индуктивность,  $R_1$  — активное сопротивление выпрямляющего слоя  $p-n$ -перехода,  $R_2$  — сопротивление кристалла в базовой

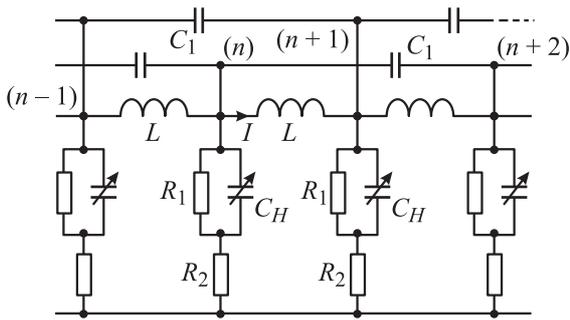


Рис. 1. Эквивалентная схема нелинейной дисперсной LC-линии передачи.

области плюс сопротивление контакта или добавочное сопротивление для изучения эффектов диссипации,  $C_1$  — корректирующая емкость, которую можно включать на ячейку или через ячейку. Чтобы не загромождать рисунок, постоянная цепь смещения для выбора рабочей точки не показана.

Нелинейность цепной LC-линии обусловлена емкостью  $C(u)$ , которая является функцией смещения и сигнальных напряжений в параллельной ветви. Дисперсия линии передачи обусловлена дискретностью параметров линии (*пространственная дисперсия*) и наличием постоянной корректирующей емкости  $C_1$  (*временная дисперсия*). Существование солитонов связано, кроме нелинейности, также с наличием определенного типа линейной дисперсии, который заключается в том, что среда должна быть недиспергирующей вблизи нулевой частоты для данного типа нормальных волн. Такой тип дисперсии как раз реализуется в рассматриваемой линии (7).

**Емкость  $p$ - $n$ -перехода.** В качестве нелинейной емкости можно использовать полупроводниковые диоды — стабилитроны, варикапы,  $p$ - $n$ -переход затвор-исток полевого транзистора, гетеропереход и т.д. Нелинейная емкость  $p$ - $n$ -перехода состоит из двух величин: емкости выпрямляющего слоя (барьерная емкость) и диффузионной емкости неосновных носителей. Барьерная емкость обусловлена неподвижными зарядами ионизованных примесей. Двойной слой разноименных электрических зарядов подобен плоскому конденсатору и его емкость определяется формулой [13]

$$C_j(U) = C_{j0} \left(1 - \frac{u}{\phi_k}\right)^{-\gamma}, \quad (1)$$

где  $u$  — внешнее напряжение, приложенное к  $p$ - $n$ -переходу,  $\phi_k$  — потенциал, связанный с барьером на переходе (обычно 0.4–0.9 В). Постоянная  $C_{j0}$  — емкость при нулевом значении напряжения (составляет от десятков до нескольких сотен пикофарад),  $\gamma$  — показатель нелинейности перехода, величина которого зависит от распределения примесей в переходе. Для диодов с резким переходом (равномерное распределение

примесей)  $\gamma = 0.5$ . В случае диодов с диффузионным переходом (линейным распределением примесей)  $\gamma = 1/3$ . Формула (1) справедлива при обратных напряжениях, меньших пробивного напряжения.

При прямом напряжении на диоде кроме барьерной емкости  $C_j$  возникает *диффузионная емкость*  $C_s$ , обусловленная инжекцией, диффузией и рекомбинацией неосновных носителей. При протекании через  $p$ - $n$ -переход прямого тока в  $p$ -область инжектируются электроны, а в  $n$ -область — дырки. Одновременно с инжекцией в областях  $p$  и  $n$  увеличивается число основных носителей в силу условия электрической нейтральности. При этом заряды дырок, инжектированных в область  $n$ , нейтрализуются зарядами дополнительных электронов, вошедших в  $n$  область из внешней цепи, так что плотность объемного заряда в  $n$ -области остается равной нулю. В  $p$ -области протекают аналогичные процессы.

Емкость  $C_s$  сильно зависит от напряжения на  $p$ - $n$ -переходе (по экспоненциальному закону). Если характерное время процесса меньше времени жизни носителей заряда, то

$$C_s(u) = C_{s0} \exp\left(\frac{u}{\phi}\right), \quad (2)$$

где  $\phi = kT/e$  — температурный потенциал. Полная емкость  $p$ - $n$ -перехода равна сумме этих емкостей  $C(u) = C_j + C_s$ . При запирающем переходе  $C_s$  быстро уменьшается до нуля, и уже при обратном напряжении  $u > (4-6)\phi$  прекращается инжекция неосновных носителей и  $C_s$  практически исчезает. Емкость  $C_s$  шунтирована сопротивлением открытого перехода, поэтому ее добротность мала, обычно не более единицы во всем диапазоне частот.

На рис. 2 показана типичная вольт-фарадная характеристика (ВФХ) диода-варикапа при следующих параметрах:  $C_{s0} = 6 \cdot 10^{-13}$  Ф,  $\phi_k = 0.6$  В,  $C_{j0} = 6 \cdot 10^{-10}$  Ф,  $\phi = 0.04$  В. В большинстве случаев зависимость заряда

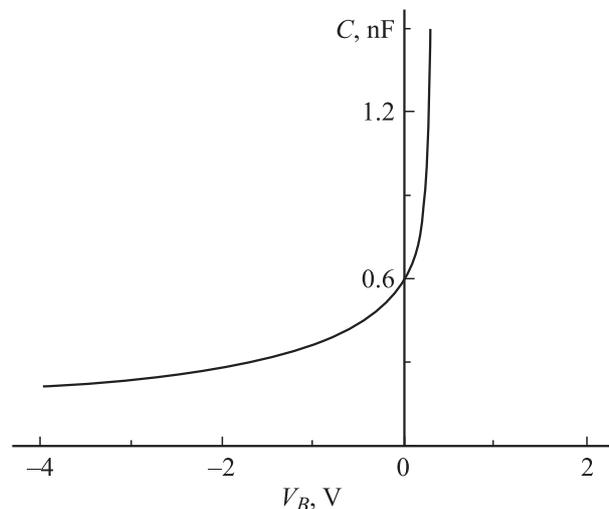
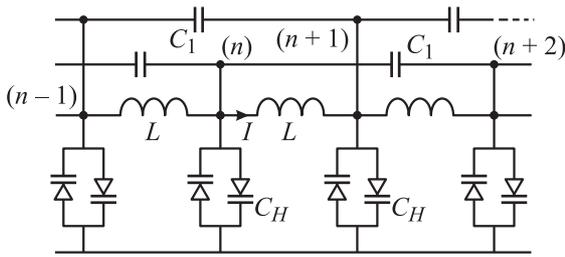


Рис. 2. Вольт-фарадная характеристика  $p$ - $n$ -перехода.



**Рис. 3.** Эквивалентная схема линии передачи с кубической нелинейностью на встречно-параллельной паре диодов.

на нелинейной емкости  $Q(u)$  можно аппроксимировать кубическим полиномом

$$Q(u) = C_0u + C_{N_1}u^2 + C_{N_2}u^3, \quad (3)$$

где коэффициенты  $C_0$ ,  $C_{N_1}$  и  $C_{N_2}$  зависят от типа диода. Для выбора рабочей точки подается постоянное запирающее напряжение  $V_B$ .

Рассмотрим дисперсную линию передачи с нелинейностью третьего порядка

$$Q(u) = C_0u \pm C_{N_2}u^3. \quad (4)$$

Отрицательная кубическая нелинейность („-“) имеет место при достаточно малых напряжениях в конденсаторе с сегнетоэлектриком при температуре выше точки Кюри.

**Емкость пары параллельно и противоположно включенных диодов.** Положительную кубическую нелинейность (знак „+“) в формуле (4) можно получить, если в каждое звено линии включена встречно-параллельная пара диодов, как показано на рис. 3, находящихся при одинаковых по модулю постоянных напряжениях смещения (конструкция линии позволяет пренебречь потерями вследствие больших добротностей входящих в линию элементов). ВФХ такой пары не будет содержать четных степеней. Покажем это, учитывая, что амплитуда переменного сигнала не выводит диод из запертого состояния, т.е.  $u < |V_B|$ . Тогда в формуле емкости можно пренебречь диффузионной составляющей.

Функциональная зависимость ВФХ барьерной емкости правого диода пары на рис. 3 как функция отрицательного смещения имеет вид (1)  $C_- = k/(\varphi_k - u)^{1/2}$  и показана на рис. 4, *a* кривой 1. Здесь  $k$  — константа для данного диода. Кривая 2 (рис. 4, *a*) показывает  $C-V$  характеристику правого диода, сдвинутую на  $V_B$ :  $C_- = k/(\varphi_k + V_B - u)^{1/2}$ .

Кривая 1 на рис. 4, *b* показывает ВФХ левого диода пары как функцию положительного смещения:  $C_+ = k/(\varphi_k - u)^{1/2}$ . Кривая 2 на рис. 4, *b* показывает эту ВФХ, сдвинутую на постоянную величину  $V_B$ :  $C_+(u) = k/(\varphi_k + V_B + u)^{1/2}$ .

Результирующая зависимость емкости от напряжения, полученная путем суперпозиции вольт-фарядных характеристик двух параллельно и противоположно включенных диодов относительно общей рабочей точки, описывается формулой

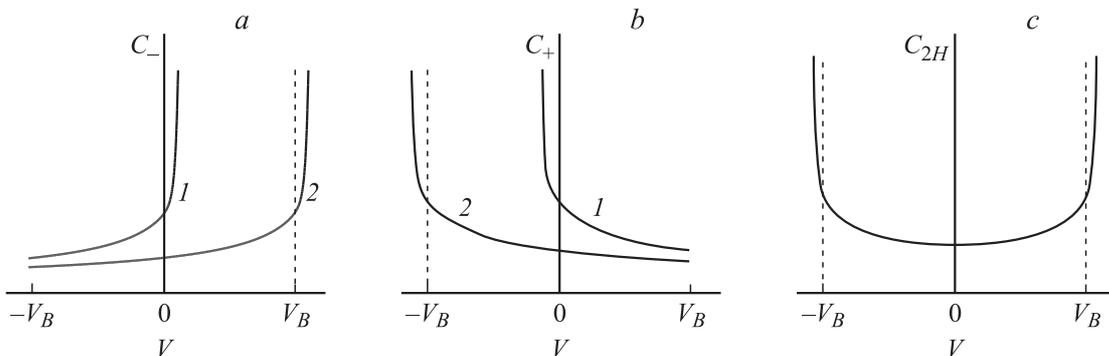
$$C_{2D}(u) \equiv C_+(u) + C_-(u) = \frac{k}{(\varphi_k + V_B + u)^{1/2}} + \frac{k}{(\varphi_k + V_B - u)^{1/2}}.$$

Она является четной функцией, как показано на рис. 4, *c*. Соответственно суммарный заряд  $Q$  на нелинейной емкости пары диодов равен

$$Q(u) = \int_{-u}^u C_{2D}(V')dV' = C_{20} [(1+x)^{1/2} - (1-x)^{1/2}], \quad (5)$$

где  $C_{20} = 4k\sqrt{\varphi_k + V_B}$  — емкость в общей рабочей точке,  $x = u/(\varphi_k + V_B)$ . Если разложить (5) в ряд Тейлора по  $x$ , то четные степени пропадут и останутся только нечетные степени  $x$ . Ограничившись кубическим членом разложения, получим формулу (4).

**Дифференциально-разностное уравнение линии передачи.** В общем случае распространение волн в нелинейной линии передачи, показанной на рис. 1, описывается дифференциально-разностным уравнением. На основании закона электромагнитной индукции Фарадея напряжение и ток в любой индуктивности связаны соотношением:  $V_{n-1} - V_n = Ldi_m / dt$ , где  $V_n$  — напряжение



**Рис. 4.** ВФХ-емкости диода как функция поданного напряжения: *a* — отрицательные смещения, *b* — положительные смещения, *c* — результирующая ВФХ двух диодов.

(или потенциал) в узле  $n$ . Заряд конденсатора  $Q_{C_1}$ , напряжение на конденсаторе  $u_{C_1}$  и ток  $i_n^{C_1}$  связаны соотношениями

$$Q_{C_1} = C_1 u_{C_1}, \quad i_n^{C_1} = \frac{C_1 d(V_{n-2} - V_n)}{dt}.$$

Применив первый закон Кирхгофа для узла  $n$ , можно исключить токи и записать дифференциально-разностное уравнение для дискретной линии, которое имеет вид

$$V_{n-1} - 2V_n + V_{n+1} - L \frac{d^2 Q}{dt^2} + LC_1 \frac{d^2}{dt^2} (V_{n-2} - 2V_n + V_{n+2}) - \frac{L}{R_1} u_n = 0. \quad (6)$$

Следует различать  $V_n$  — потенциал  $n$ -го узла (звена) и  $u_n$  — напряжение на нелинейной емкости  $n$ -го звена. Полный заряд на емкости равен  $Q = C_0 u + Q^N$ , где  $Q^N$  — нелинейная часть полного заряда,  $C_0$  — постоянная часть нелинейной емкости.

Линеаризуя (6), пренебрегая потерями, получим дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \frac{2(1 - \cos k)}{LC_0[1 - 2(C_1/C_0)(\cos 2k - 1)]}, \quad (7)$$

показывающее зависимость также от корректирующей емкости  $C_1$ . В длинноволновом приближении для простейшей  $LC$ -линии из (7) получим  $\omega = (k - k^3/24) / \sqrt{LC_0}$ , которое соответствует дисперсионному соотношению линеаризованного уравнения КДФ.

## Нелинейное эволюционное волновое уравнение дисперсной линии передач

Для вывода волнового уравнения для напряжения  $u$  на варикапе воспользуемся тем, что амплитуда волны сравнительно мала, а ее характерная длина в передающей линии значительно больше размера ячейки. Это позволяет применить разложение в ряд Тейлора

$$V(n \pm h) = V(n) + \sum_{k=1}^{\infty} (\pm h)^k \frac{1}{k!} \frac{d^k V(n)}{dn^k},$$

где  $h = \pm 1$  или  $h = \pm 2$ . Номер узла цепной линии  $n$  рассматривается как непрерывная координата. В дискретной линии все величины считаются не на единицу длины, а на ячейку. Так, индуктивность и емкость измеряются соответственно в генри и фарадах на ячейку.

Тогда дифференциально-разностное уравнение линии (6) (с учетом связи между  $V_n$  и  $u_n$ ) можно преобразовать в нелинейное эволюционное волновое уравнение в частных производных с непрерывными переменными

$$\frac{1}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial n^4} + LC_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( 4 \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^4 u}{\partial n^4} \right) - LC_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L \frac{\partial^2 Q^N}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + R_2 C_0 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial n^2} - \frac{L}{R_1} \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (8)$$

В этом уравнении имеются члены, которые стремятся увеличить крутизну волнового фронта, и члены с производными высшего порядка, препятствующие образованию разрывов, а также члены, учитывающие диссипацию. Но что особенно важно, (8) описывает распространение волновых импульсов в обоих направлениях.

Учитывая, что у варикапов в запертом состоянии сопротивление  $R_1$  очень велико, а  $R_2$  мало (добротность в мегагерцовом диапазоне велика  $Q \geq 100$ ), цепную схему на рис. 1 можно рассматривать как линию передачи без потерь. Таким образом, пренебрегая в (8) членами, содержащими  $R_1$  и  $R_2$ , получим нелинейное уравнение линии передачи (НУЛП), учитывающее как временную, так и пространственную дисперсию

$$\frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \frac{\alpha_1}{v_0^2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} - \frac{\beta_{C1}}{v_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) - b_s \frac{\partial^4 u}{\partial n^4} = 0, \quad (9)$$

где  $v_0 = 1/\sqrt{LC_0}$  — фазовая скорость линейных волн,  $\alpha_1 = C_N/C_0$  — коэффициент нелинейности,  $\beta_{C1} = 4C_1/C_0$  — коэффициент временной дисперсии,  $b_s = 1/12$  — коэффициент пространственной дисперсии. Третий член уравнения (9) описывает влияние нелинейной емкости, четвертый и пятый члены приводят к зависимости скорости волн от частоты. Если нелинейные и дисперсионные эффекты ничтожно малы, то в качестве первого приближения получаем линейное волновое уравнение (первый и второй члены).

Если в поправочном нелинейном члене вторую производную по  $t$  заменить в соответствии с волновым уравнением, то получим уравнение с двумя дисперсиями (УДД)

$$u_{tt} - v_0^2 u_{nn} + \alpha_1 v_0^2 (u^2)_{nn} - \beta_{C1} u_{ttm} - b_s v_0^2 u_{4n} = 0, \quad (10)$$

которое впервые получено и исследовано для продольных волн деформации в нелинейноупругом стержне А.М. Самсоновым [14].

Считая эффекты нелинейности и дисперсии малыми, порядок уравнения УДД (10) можно понизить, как обычно и поступают, рассматривая волны, распространяющиеся только в одном направлении (линия бесконечно длинная, либо в конце она включена на согласованную нагрузку). Используя стандартный способ преобразования независимых переменных  $(n, t) \rightarrow (\xi, \tau)$ :  $\xi = n - v_0 t$ ,  $\tau = t$ , из (10) можно вывести уравнения одноволнового приближения: уравнение КДФ и модифицированное уравнение КДФ (мКДФ).

Хотя бегущие волны и являются частным классом решений нелинейных эволюционных уравнений, однако их роль в теории и практике чрезвычайно велика. Бегущие волны возникают в результате эволюции различных нестационарных возмущений. Ниже рассмотрим уединенные волны НУЛП, УДД, уравнений Буссинеска, КДФ и мКДФ.

### Видеосолитоны НУЛП и УДД

Рассмотрим точные решения уравнения линии передачи (9), используя переменные бегущей волны  $u(n, t) = u(\xi)$ , где  $\xi = n - v_c t$  — бегущая координата,  $v_c = \text{const}$  — фазовая скорость нелинейной волны. В результате получим нелинейное уравнение в обыкновенных производных (ОДУ)

$$u_{\xi\xi} - M^2 u_{\xi\xi\xi} - a_1 M^2 (u^2)_{\xi\xi} + \beta_{\text{TL}} u_{\xi\xi\xi\xi} = 0, \quad (11)$$

где  $M^2 = v_c^2/v_0^2$ ,  $\beta_{\text{TL}} = b_s + \beta_{C1}$  — параметр дисперсии линии передачи, учитывающий и временную, и пространственную дисперсии. Нелинейную емкость при небольших амплитудах можно считать квадратичной, т.е.  $C_{N2} = 0$ . Интегрируя (11) по  $\xi$  дважды от  $-\infty$  до  $+\infty$ , получим неавтономное нелинейное ОДУ второго порядка

$$\beta_{\text{TL}} u_{\xi\xi} + \alpha_1 M^2 u^2 - (M^2 - 1)u + d_1 \xi + d_2 = 0, \quad (12)$$

где  $d_1$  и  $d_2$  — постоянные интегрирования. Если  $d_1 \neq 0$ , то уравнение (12) после изменения масштабов преобразуется в первое уравнение Пенлеве  $P_1$ :  $w_{zz} = 6w^2 + z$ . Общее решение уравнения  $P_1$  является трансцендентной функцией от постоянных интегрирования, другими словами, решение не выражается через постоянные интегрирования с помощью операций над классическими функциями. При  $d_1 = 0$  ОДУ (12) сводится к

$$\frac{\beta_{\text{TL}} u_{\xi\xi}^2}{2} + \frac{\alpha_1 M^2 u^3}{3} - \frac{(M^2 - 1)u^2}{2} + d_2 u + d_3 = 0. \quad (13)$$

Решение (13) можно выразить через эллиптическую функцию Якоби, являющуюся периодической волной, которая иначе называется кноидальной. Предельный случай бесконечно большого периода соответствует солитону. Подчеркнем, что ОДУ (12) можно также свести к уравнению Вейерштрасса, решением которого является эллиптическая функция Вейерштрасса  $\wp$ , которая содержит две произвольные константы и в частных случаях дает все возможные бегущие волновые решения, а не только солитоны.

Однако воспользуемся солитонным приближением, т.е.  $u(\xi)$  вместе со своими производными  $\rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ . Возникающие при интегрировании константы  $d_1, d_2, d_3$ , согласно этим асимптотическим граничным условиям, равны нулю. Тогда, обозначив  $y = -u$ , неявное решение (13) можно записать через простой интеграл

$$\sqrt{\frac{M^2 - 1}{\beta_{\text{TL}}}} \xi = \int_{y_3}^y \frac{dy}{y \sqrt{1 - y/y_3}},$$

где  $y_3 = 3(M^2 - 1)/(2\alpha_1 M^2)$  — значение функции  $y(\xi)$  при  $\xi = 0$ . Возьмем этот интеграл

$$u(\xi) = -\frac{3}{2\alpha_1} \frac{(M^2 - 1)}{M^2} \sec h^2 \left\{ \sqrt{\frac{M^2 - 1}{4\beta_{\text{TL}}}} \xi \right\}. \quad (14)$$

В этом решении мы интерпретируем  $-y_3$  как амплитуду солитона напряжения и обозначим ее через  $U_{\text{TL}}$ , введем характерную ширину  $\Delta_{\text{TL}}$  и скорость солитона  $v_{c,\text{TL}}$ :

$$U_{\text{TL}} = -\frac{3}{2\alpha_1} \frac{M^2 - 1}{M^2}, \quad \Delta_{\text{TL}} = \sqrt{\frac{4(b_s + \beta_{C1} M^2)}{M^2 - 1}},$$

$$v_{c,\text{TL}} = \frac{v_0}{\sqrt{1 + 2\alpha_1 U_{\text{TL}}/3}} \quad (15)$$

и перепишем формулу (14) в прежних координатах

$$u(n, t) = U_{\text{TL}} \sec h^2 \left\{ (n \pm v_{\text{TL}} t) / \Delta_{\text{TL}} \right\}. \quad (16)$$

Аналогично можно получить однопараметрическое семейство солитонных решений уравнения с двумя дисперсиями

$$u(n, t) = U_{\text{DD}} \sec h^2 \left\{ (n \pm v_{\text{DD}} t) / \Delta_{\text{DD}} \right\}. \quad (17)$$

Амплитуда, характерная ширина и скорость видеосолитона УДД имеют вид

$$U_{\text{DD}} = -\frac{3}{2} \frac{M^2 - 1}{\alpha_1}, \quad \Delta_{\text{DD}} = \sqrt{\frac{4(b_s + \beta_{C1} M^2)}{M^2 - 1}},$$

$$v_{c,\text{DD}} = v_0 \sqrt{1 - 2\alpha_1 U_{\text{DD}}/3}. \quad (18)$$

### Видеосолитоны уравнений Буссинеска

Уравнения Буссинеска являются наиболее развитыми моделями описания распространения нелинейных волн в средах с дисперсией. Они были введены Буссинеском в 1871 г. для описания длинных волн на мелкой воде. Они также возникают при описании одномерных нелинейных решеток, ионно-акустических волн в плазме и т.д.

Сделав в УДД (10) замену в члене, ответственном за пространственную дисперсию  $\partial^2 u / \partial n^2$ , на  $(1/v_0^2) \partial^2 u / \partial t^2$ , получаем уравнение Буссинеска в канонической форме

$$\frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \alpha_1 \frac{\partial^2 u^2}{\partial n^2} - \frac{\beta}{v_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) = 0, \quad (19a)$$

где  $\beta = b_s + \beta_{C1}$  — коэффициент дисперсии. После введения фазовой переменной  $\xi = n \pm Vt$  можно получить решение канонического уравнения Буссинеска в виде бегущей волны

$$u(n, t) = U_B \sec h^2 \left( \frac{n \pm v_B t}{\Delta_B} \right). \quad (20)$$

Основные соотношения для видеосолитона Буссинеска (20) имеют вид

$$U_B = -\frac{3}{2} \frac{M^2 - 1}{\alpha_1}, \quad \Delta_B = M \sqrt{\frac{4(b_s + \beta_{C1})}{M^2 - 1}},$$

$$v_{c,B} = v_0 \sqrt{1 - 2\alpha_1 U_B/3}. \quad (21)$$

Вторую форму уравнения Буссинеска можно получить, если перекрестная емкость в линии передачи  $C_1 = 0$  (рис. 1) или если в уравнении УДД (10) слагаемое, содержащее  $u_{tttt}$ , заменить в соответствии с волновым уравнением на  $u_{4n}$

$$\frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \alpha_1 \frac{\partial^2 u^2}{\partial n^2} - \beta \left( \frac{\partial^4 u}{\partial n^4} \right) = 0. \quad (19b)$$

Оно называется также уравнением нелинейной струны, точно интегрируемо методом обратной задачи рассеяния. Солитонные решения (19b) имеют вид

$$u(n, t) = U_{B2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{n \pm v_{B2} t}{\Delta_{B2}} \right). \quad (22)$$

Амплитуда, характерная ширина и скорость этого видеосолитона примут вид

$$U_{B2} = -\frac{3M^2 - 1}{2\alpha_1}, \quad \Delta_{B2} = \sqrt{\frac{4(b_S + \beta_{C1})}{M^2 - 1}},$$

$$v_{c,B2} = v_0 \sqrt{1 - 2\alpha_1 U_{B2}/3}. \quad (23)$$

### Видеосолитоны уравнения КДФ и мКДФ

Солитоны в линии были изучены из решения уравнения КДФ [11], которое можно вывести, если понизить порядок нелинейных волновых уравнений, например, (19a)

$$u_\tau - \alpha_1 u u_\xi + b u_{\xi\xi\xi} = 0. \quad (24)$$

Введя обозначение  $w = -\alpha_1 u$  и фазовую переменную  $\xi = \xi - V\tau$ , получим ОДУ

$$\frac{bw_\xi^2}{2} = \frac{1}{6}(w^3 - 3Vw^3 + 6Aw + 6B),$$

где  $b = \beta/2$ ,  $A$  и  $B$  — постоянные интегрирования. Пусть  $w_1 \geq w_2 \geq w_3$ , корни кубического уравнения в скобках. Общее решение выражается через эллиптическую функцию Якоби

$$w(\xi) = w_2 + (w_1 - w_2) \operatorname{cn}^2 \left\{ \xi \sqrt{\frac{w_1 - w_3}{12b}}, S^2 \right\},$$

$$S^2 = \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3}. \quad (25)$$

Солитон находится как частный случай решения (25), когда действительные корни  $w_3 = w_2 \neq w_1$ . Положим  $w_3 = w_2 = 0$  и запишем решение в размерных координатах

$$u(n, t) = U_K \operatorname{sech}^2 \left( \frac{n - v_{c,K} t}{\Delta_K} \right). \quad (26)$$

Амплитуда напряжения, характерная ширина и скорость солитона КДФ равны

$$U_K = -w_1/\alpha_1, \quad \Delta_K = \sqrt{12b/(-\alpha_1 U_K)},$$

$$v_{c,K} = v_0 (1 - \alpha_1 U_K/3). \quad (27)$$

Заметим, что уравнение КДФ имеет также рациональные по пространственной переменной решения, но они оказались сингулярными [15]. Сингулярные решения для передающей линии, по-видимому, физического смысла не имеют и здесь не рассматриваются.

**Видеосолитоны мКДФ.** В электрической линии передачи без потерь с кубической нелинейностью (4) уравнение одноволнового приближения имеет вид уравнения мКДФ

$$u_\tau + \varepsilon \alpha_2 u^2 u_\xi + b u_{\xi\xi\xi} = 0, \quad (28)$$

где  $\alpha_2 = 3C_{N2}/2C_0$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ , причем  $\varepsilon = +1$  соответствует отрицательной нелинейности, и наоборот. мКДФ содержит много интересных частных случаев, в том числе алгебраические солитоны и кинки.

Для получения солитонных решений (28) перейдем к новым переменным  $u = u(\xi)$ ,  $\xi \equiv \xi - V\tau$ ,  $V = \text{const}$ ,  $u \rightarrow \sqrt{\alpha_2} u$  и получим ОДУ

$$b(u_\xi)^2 = W(u), \quad W(u) = -\varepsilon u^4/6 + Vu^2 + 2Bu + 2D, \quad (29)$$

где  $B$  и  $D$  — постоянные. Решения ОДУ (29) в общем случае представляют нелинейные волновые цуги между смежными действительными нулями потенциальной функции  $W(u)$ , где она положительна. Если коэффициенты  $b > 0$ ,  $\varepsilon = +1$ , а  $u_\infty = 0$ , то в линии передачи распространяются „быстрые“ солитоны со скоростью  $V > 0$  обеих полярностей

$$u(\xi, \tau) = \pm U_{mK} \operatorname{sech} h \left[ \frac{\xi - V\tau}{\Delta_{mK}} \right]. \quad (30)$$

Ширина  $\Delta_{mK}$  и скорость видеосолитона мКДФ равны

$$\Delta_{mK} = \sqrt{\frac{6b}{\alpha_2}} U_{mK}^{-1}, \quad V = \frac{\alpha_2 U_{mK}^2}{6}. \quad (31)$$

Рассмотрим случай функции  $W(u)$  с двумя максимумами, когда состояние на бесконечности не равно нулю  $u_\infty \neq 0$ , как на рис. 5, а. Здесь также существуют два солитона разной полярности, но амплитуда солитона положительной полярности  $u_c$  не равна амплитуде солитона отрицательной полярности  $u_r$ , как показано на рис. 5, б. В материальных средах положительной

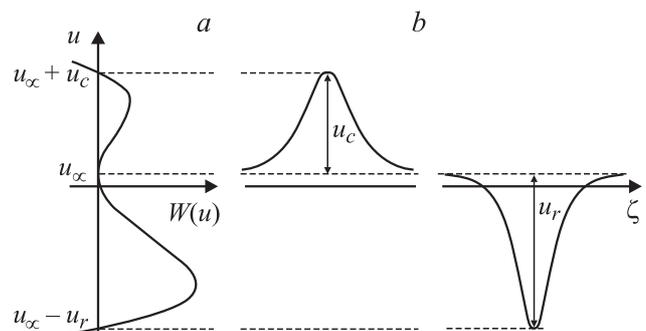


Рис. 5. Солитоны положительной и отрицательной полярности мКДФ.

полярности соответствует сжатие, отрицательной полярности — разряжение. Скорости этих солитонов имеют вид

$$V = u_\infty^2 + \frac{1}{6} u_c u_r = \begin{cases} u_\infty^2 + u_c(u_c + 4u_\infty)/6, \\ u_\infty^2 + u_r(u_r - 4u_\infty)/6. \end{cases} \quad (32)$$

**Алгебраический солитон.** В рассматриваемом случае  $b > 0$  и  $\varepsilon = +1$  помимо солитона формы (30) существует алгебраический солитон с профилем, описываемым рациональной функцией по пространственной переменной. Пусть  $u_\infty \neq 0$  и для  $W(u)$  выполняются условия:

$$W|_{u=u_\infty} = dW/du|_{u=u_\infty} = d^2W/du^2|_{u=u_\infty} = 0.$$

При этих условиях три корня из четырех действительных корней  $W(u)$  равны между собой, а  $W(u)$  имеет вид (рис. 6, *a*)

$$W(u) = -(u - u_\infty)^3 \frac{u - c}{6}, \quad (33)$$

где  $c = -3u_\infty$ ,  $V = u_\infty^2$ , а амплитуда равна  $A = |4u_\infty|$ . Скорость солитона связана с амплитудой:  $V = A^2/16$ . Подставив (33) в (29), получаем явную формулу солитона (рис. 6, *b*)

$$u = u_\infty - 4u_\infty \left[ 1 + \frac{2u_\infty^2 \xi^2}{3b} \right]^{-1}. \quad (34)$$

Вещественная симметричная функция солитона (34) убывает степенным образом к однородному состоянию при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , т.е. намного медленнее, чем гиперболические функции. Если  $u_\infty < 0$ , то появляется алгебраический солитон полярности „+“, если  $u_\infty > 0$ , то появляется солитон полярности „-“.

**Кинки МКДФ.** Если дисперсия положительна  $b > 0$  и  $\varepsilon = -1$ , возможны медленные волны  $V < 0$ , называемые кинком, т.е. уединенный перепад от одного стационарного состояния  $-u_\infty$  к другому  $+u_\infty$ . Потенциальная функция  $W(u) = (u - u_\infty)^2(u + u_\infty)^2/6$  принимает вид, как изображено на рис. 7, *a*. Аналитическое решение для кинка имеет вид

$$u = \pm u_\infty \tan h \left\{ \frac{\xi - V\tau}{\Delta} \right\} \quad (35)$$

и показано на рис. 7, *b*. Полувысота кинка  $u_\infty$ , ширина его переходной области  $\Delta$  и скорость распространения

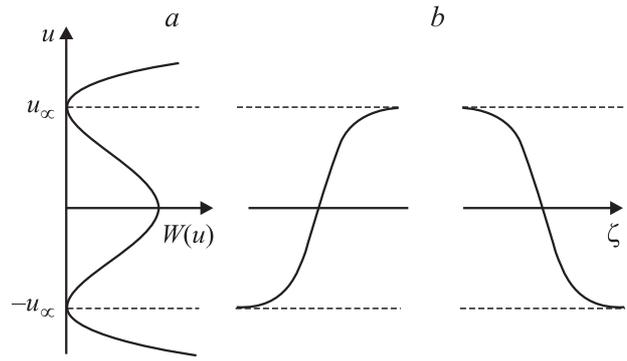


Рис. 7. *a* — потенциальная функция  $W(u)$ , *b* — кинки скачка и разряда напряжения.

связаны между собой соотношениями

$$V = -\alpha_2 u_\infty^2/3, \quad \Delta = \sqrt{6b/\alpha_2} u_\infty^{-1}. \quad (36)$$

Ширина  $\Delta$  стремится к нулю при  $b \rightarrow 0$ , а профиль волны стремится к ступеньке.

### Электромагнитная линия с диссипацией

В нелинейном волновом уравнении в частных производных (8) слагаемые, характеризующие дисперсию, нелинейность и диссипацию, входят аддитивно, что позволяет рассматривать отдельно относительное влияние каждого из факторов на волновые процессы. Нам осталось включить в рассмотрение диссипацию. Добротность реальных элементов, входящих в линию передачи, хоть и велика, но конечна, поэтому линия обладает некоторыми потерями, пренебрегать которыми в общем случае нельзя, так как наличие потерь может привести к распаду уединенных волн.

Если учесть сопротивление на рис. 1, то в одноволновом приближении из (8) для квадратичной емкости получим нелинейное уравнение с дисперсией и диссипацией

$$u_\tau + \alpha_1 u u_\xi + b u_{\xi\xi\xi} = -\delta_1 u + \delta_2 u_{\xi\xi}, \quad (37)$$

где  $\delta_1 = \rho/2R_1$  и  $\delta_2 = R_2/2\rho$  — коэффициенты частотно-независимых и высокочастотных энергетических потерь, а  $\rho = \sqrt{L/C_0}$ . Из-за наличия двух членов в правой части уравнения (37), описывающие затухание в LC-линии передачи, его точные решения найти не удастся. Поэтому проведем анализ для случаев с преобладанием одного из механизмов диссипации.

**Потери на сопротивлении кристалла  $R_2$ .** Для случая  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 \neq 0$  (37) переходит в уравнение Кортевега—де-Фриза—Бюргера (КДФБ)

$$u_\tau + \alpha_1 u u_\xi + b u_{\xi\xi\xi} = \delta_2 u_{\xi\xi}. \quad (37a)$$

Сопротивление  $R_2$ , входящее в коэффициент  $\delta_2$ , аналогично действию столкновительной диссипации (вязкости), например, как в случае ионно-акустических волн в плазме.

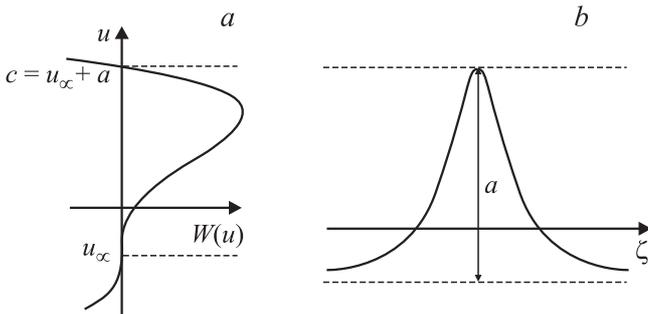


Рис. 6. Несингулярный алгебраический солитон МКДФ.

Высокочастотная диссипация, как и дисперсия, приводит к некоторому расплыванию профиля волны и в конечном итоге может самостоятельно уравновесить нелинейное укручение профиля волны (уравнение Бюргера). Уравнение КДФБ также имеет стационарное решение в виде ударной волны, но здесь уже возможно существование двух различных структур, как монотонной, так и осцилляторной.

Уравнение КДФБ в переменных бегущей волны  $u = u(\xi)$ ,  $\xi = \xi - V\tau$ ,  $V = \text{const}$  после интегрирования один раз по  $\xi$  имеет вид

$$bu_{\xi\xi} - \delta_2 u_\xi + \frac{\alpha_1 u^2}{2} - Vu + d = 0. \quad (38)$$

Это диссипативное ОДУ второго порядка сводится к уравнению Абеля первого порядка (теорема редукции в [16]), которое интегрируется точно. Общее явное решение впервые найдено в [16] и выражается через эллиптическую функцию Вейерштрасса  $\wp$

$$u = \frac{\delta_2^2}{\alpha_1 b} \left\{ \frac{6}{25} + \frac{Vb}{\delta_2^2} - \frac{12}{25} \exp\left(\frac{2\delta_2 \xi}{5b}\right) \times \wp\left[\exp\left(\frac{\delta_2 \xi}{5b}\right) + \xi_0; 0; g_3\right] \right\} \quad (39)$$

и содержит два произвольных параметра  $\xi_0$  и  $g_3$ , которые определяются граничными условиями. Типичными условиями являются: при  $|\xi| \rightarrow \pm\infty$   $u \rightarrow u_{1,2}$  и  $u', u'' \rightarrow 0$ . Они накладывают условие баланса между скоростью волны  $V$  и коэффициентами нелинейности, дисперсии и диссипации для существования решения в виде бегущей волны

$$\left(\frac{V}{\delta_2}\right)^2 - \frac{36}{625} \left(\frac{\delta_2}{b}\right)^2 = \frac{\alpha_1^2 (u_1 u_2)}{\delta_2^2}. \quad (40)$$

Если на бесконечности у волны напряжения нет постоянной составляющей, то одно из значений  $u_{1,2} = 0$  и из условия баланса (40) следует  $V = \pm 6\delta_2^2/(25b)$ .

Уединенная ударная волна получается из (39), если инвариант  $g_3 = 0$  [16]

$$u = \frac{\delta_2^2}{\alpha_1 b} \left\{ \frac{6}{25} + \frac{Vb}{\delta_2^2} - \frac{12}{25} \frac{\exp(2\delta_2 \xi / 5b)}{(\exp(\delta_2 \xi / 5b) + \xi_0)^2} \right\}. \quad (41a)$$

Это решение можно преобразовать к виду

$$u(\xi) = \frac{\delta_2^2}{\alpha_1 b} \left[ \frac{6}{25} + \frac{Vb}{\delta_2^2} + \frac{3}{25} \left( \sec^2 h^2 \left( \frac{\delta_2}{10b} \xi \right) - 2 \operatorname{th} \left( \frac{\delta_2}{10b} \xi \right) - 2 \right) \right]. \quad (41b)$$

Тонкая структура ударной волны зависит от величины диссипации  $\delta_2$ . Ее проще всего исследовать с помощью анализа поведения траекторий на фазовой плоскости ОДУ (38), которое описывает колебания нелинейного осциллятора с массой  $b$  при наличии силы трения с коэффициентом  $\delta_2$ . Линеаризуем (38) в

окрестности особой точки  $u_{01} = u_{-\infty} = 2V/\alpha_1$ , положив  $d = 0$ , и находим корни характеристического уравнения  $q_{1,2} = \delta_2/2b \pm \sqrt{\delta_2^2/4b^2 - V/b}$ , из которого найдем линейное критическое значение коэффициента диссипации  $\delta_2^c = 2\sqrt{bV}$ . Если  $\delta_2 < \delta_2^c$ , то корни  $q_{1,2}$  комплексно-сопряженные, особая точка — фокус, интегральная кривая подходит к этой точке с осцилляциями. Ударная волна имеет резкий передний фронт, который сопровождается затухающим осцилляторным цугом ( $b > 0$ ). При отрицательной дисперсии  $b < 0$  особая точка  $u_{02} = u_{+\infty}$  становится неустойчивым фокусом, осцилляции возникают перед фронтом ударной волны. В этом случае групповая скорость осцилляций больше скорости разрыва  $V$ . Такие ударные волны наблюдаются экспериментально в LC-линии с магнитной нелинейностью.

Если  $\delta_2 > \delta_2^c$ , то корни  $q_{1,2}$  вещественные и одного знака, особая точка — узел, интегральная кривая подходит к этой точке монотонно. Соответственно ударная волна описывается формулами (41a)–(41b) и имеет монотонную структуру, которая плавно соединяет два различных напряжения в LC-линии — перед волной и за волной.

Сравнив значение  $\delta_2^c$  с нелинейным коэффициентом диссипации  $\delta_2^n = \sqrt{(25/6)bV}$ , полученным из условия баланса (40)  $u_{1,2} = 0$ , получим связь  $\delta_2^c = \delta_2^n \sqrt{0.96}$ . Это означает, что линейный анализ предсказывает заниженное значение критического коэффициента диссипации для существования монотонной структуры электромагнитной ударной волны, чем нелинейная теория (при прочих равных параметрах).

В случае кубической емкости учет высокочастотной диссипации в линии описывается модифицированным уравнением Кортевега–де-Фриза–Бюргера (мКДФБ).

$$u_\tau + \alpha_2 u^2 u_\xi + bu_{\xi\xi\xi} = \delta_2 u_{\xi\xi}. \quad (37b)$$

Аналогично можно получить точное общее решение соответствующего (37b) ОДУ [16]

$$u = \frac{\delta_2}{\sqrt{6\alpha_2 b}} y \frac{\wp'_y(y + y_0; g_2, 0)}{\wp(y + y_0; g_2, 0)}, \quad (42)$$

где  $y = \exp(\delta_2 \xi / 3b)$ . В пределе при  $g_2 \rightarrow 0$  возникает кинковое решение

$$u = -\frac{\delta_2}{\sqrt{\alpha_2 b}} \left( 1 + \operatorname{tanh} \left\{ \frac{\delta_2 (\xi - \xi_0)}{6b} \right\} \right). \quad (43)$$

**Омические потери на p–n-переходе.** Токи утечки через параллельное сопротивление  $R_1$  можно учесть, если в (37) положить  $\delta_1 \neq 0$ ,  $\delta_2 = 0$ ,

$$u_\tau + \alpha_1 u u_\xi + bu_{\xi\xi\xi} = -\delta_1 u. \quad (37c)$$

К сожалению, такое обобщение уравнения КДФБ точного решения в виде бегущей волны не имеет, как показано в [17].

Так как токи утечки малы, то можно найти приближенные аналитические решения для оценки амплитуды

солитона методом теории возмущений [15,18], рассматривая правую часть (37с) как малое диссипативное возмущение  $\delta_1 \ll 1$ . Тогда можно получить экспоненциальный закон затухания амплитуды солитона от времени

$$U_K(\tau) = U_K(0) \exp(-4\delta_1 \tau / 3), \quad (44)$$

что означает монотонное уменьшение энергии волны. Здесь  $U_K(0)$  — амплитуда невозмущенного солитона. Решение возмущенного уравнения (37с) имеет вид

$$u(\xi, \tau) = U_K(\tau) \sec h^2 \times \left\{ \frac{1}{\Delta_K(\tau)} \left( \xi - \frac{\alpha_1 U_K(0)}{4\delta_1} (1 - \exp(-4\delta_1 \tau / 3)) \right) \right\}.$$

Малые токи утечки вызывают медленное экспоненциальное уменьшение амплитуды, а вместе с ней соответствующие медленное уширение и уменьшение скорости солитона. Более детальное рассмотрение результатов теории возмущения солитонов дано в [15].

Интересно отметить, что, несмотря на затухание амплитуды, эти солитоны при столкновении взаимодействуют по-прежнему упруго, как показано в работе [19].

Также укажем, что для механизма высокочастотных потерь метод возмущений дает гиперболическую зависимость амплитуды от времени

$$U_K(\tau) = U_K(0) (1 + 8\alpha_1 \delta_2 \tau / (45b U_K(0)))^{-1}, \quad (45)$$

в то время как гармонические волны затухают экспоненциально.

## Обсуждение результатов

В электромагнитной линии передачи могут распространяться бинаправленные солитоны НУЛП (16), УДД (17), Буссинеска (20), (22) как положительной, так и отрицательной полярности, в зависимости от знака нелинейности  $\alpha_1$ . Действительно, так как дисперсия  $\beta > 0$ , то  $M^2 = v_c^2 / v_0^2 > 1$ . Тогда из выражений для амплитуды любого солитона  $U_S$  следует, что произведение  $\alpha_1 U_S < 0$ . Это означает, что положительному  $\alpha_1$  соответствует солитон отрицательной полярности, и наоборот. Для сравнения напомним, что на поверхности мелкой воды, как показал еще Буссинеск, существуют солитоны только в виде возвышения, имеющего форму квадрата гиперболического секанса.

Основные соотношения между амплитудой, шириной и скоростью бинаправленных солитонов описываются (15), (18), (21) и (23). У солитонов НУЛП и УДД только ширина  $\Delta_{TL}$  совпадает с  $\Delta_{DD}$ . Амплитуды и скорости двух солитонов Буссинеска и УДД совпадают между собой. Скорость зависит от амплитуды и величины параметра нелинейности  $\alpha_1$ . Как показано,  $\alpha_1 U_S < 0$ , следовательно, скорости бинаправленных солитонов больше  $v_0$ .

Профили бинаправленных солитонов описываются одной  $\sec h^2$ -функцией. Но ширина у всех разная, которая определяется не только отношением параметров

дисперсии и нелинейности, но и числом Маха  $M$ . Отношение характерных ширин солитонов Буссинеска равно  $\Delta_B / \Delta_{B2} = M$ . Аналогично из формул (21) и (27) следует, что отношение характерной ширины канонического солитона Буссинеска к ширине солитона КДФ равно  $\Delta_B / \Delta_K = M = v_{c,B} / v_0$ . Также нетрудно заметить, что  $\Delta_{B2} = \Delta_K$ , если  $U_{B2} = U_K$ .

Отметим, что скорости бинаправленных солитонов и солитона КДФ описываются разными зависимостями. Но если ограничиться волнами, движущимися в одном направлении, то первые два члена разложения скорости бинаправленных солитонов по малому параметру  $2\alpha_1 U_S / 3$  дают скорость солитона КДФ (27).

Корректирующими емкостями  $C_1$  удобно управлять высокочастотными дисперсионными свойствами линии. Из (27) следует, что  $\Delta_K$  пропорциональна  $\sqrt{b}$ , отсюда следует, что для линии с включенными емкостями  $C_1$  ширина увеличивается примерно в

$$\frac{\Delta(C_1 \text{ включено через ячейку})}{\Delta(\text{без } C_1)} \approx \sqrt{\frac{48C_1}{C_0}} \quad (46)$$

раз по сравнению с его шириной в отсутствие емкостей. Если емкости  $C_1$  включить непосредственно параллельно индуктивности  $L$ , то

$$\frac{\Delta(C_1 \text{ включено на ячейку})}{\Delta(\text{без } C_1)} \approx \sqrt{\frac{12C_1}{C_0}}. \quad (47)$$

Диспергирующая передающая линия с кубической нелинейностью описывается мКДФ. Если нелинейная емкость является убывающей функцией напряжения, то образуются быстрые и алгебраические солитоны, описываемые решениями (30) и (34). Их скорости равны:  $v_{c,mk} = v_0 (1 + \alpha_2 U_{mk}^2 / 6)$ ,  $v_{cA} = v_0 (1 + \alpha_2 u_\infty^2)$ . Солитоны мКДФ и алгебраические солитоны движутся быстрее, чем линейные волны. Отличительная особенность алгебраического солитона — без постоянной составляющей видеопульса он не образуется.

Если нелинейная емкость является возрастающей функцией напряжения, то стационарным решением мКДФ являются кинки (35), которые распространяются со скоростью  $v_{\text{kin}} = v_0 (1 - \alpha_2 u_\infty^2 / 3)$ . Скорость кинков меньше  $v_0$ . Влияние корректирующей емкости на ширину кинков и солитонов мКДФ также описывается формулами (46) и (47).

Для солитонов второго уравнения Буссинеска, КДФ и мКДФ один из трех параметров  $U_S$ ,  $v_c$  или  $\Delta$  можно выбрать в качестве независимого, тогда остальные два параметра можно выразить через него. При этом для солитона Буссинеска произведение  $U_{B2} \Delta_{B2}^2 = 12\beta / \alpha_1$ , солитона КДФ произведение  $U_K \Delta_K^2 = 12b / \alpha_1$ , солитона мКДФ произведение  $U_{mk} \Delta_{mk} = \sqrt{6b} / \alpha_2$ , для кинка произведение  $u_\infty \Delta = \sqrt{6b} / \alpha_2$  остаются постоянными величинами и определяются отношением параметров дисперсии и нелинейности.

Если высокочастотная диссипация на сопротивлении базы кристалла мала, то возможно существование солитонов с затухающей по гиперболическому закону амплитудой (45), в противном случае возможны уединенные волны в виде электромагнитных ударных волн (41a) или (41b).

Сравнив законы затухания амплитуд солитона КДФ и гармонической волны в случае частотно-независимых малых потерь на сопротивление  $p$ - $n$ -перехода, можно установить, что они затухают по экспоненциальному закону, но с разными показателями экспоненты. Солитон затухает быстрее, это связано с расплыванием солитона при уменьшении его амплитуды. Скорость затухающего солитона КДФ можно находить по формуле (27), но с учетом зависимости его амплитуды от времени  $v_{cK}(t) = v_0(1 - \alpha_1 U_K(t)/3)$ .

## Заключение

В работе из уравнений Кирхгофа выведено дифференциально-разностное уравнение дисперсной LC-линии передачи с нелинейностью емкостью  $p$ - $n$ -перехода и с перекрестными емкостными связями. В континуальном приближении выведено нелинейное уравнение в частных производных четвертого порядка с учетом диссипации. В консервативном случае получены канонические уравнения теории нелинейных волн — УДД, Буссинеска, КДФ и МКДФ. Найдены бинаправленные солитоны НУЛП, УДД, Буссинеска, солитоны КДФ и МКДФ, кинки скачка (или разряда) напряжения и алгебраические солитоны. Установлены скейлинговые соотношения между амплитудой, характерной шириной и скоростью этих солитонов.

Выявлены два механизма диссипации и рассмотрены их влияние на формы и структуры уединенных волн. Линия с высокочастотной диссипацией описывается уравнениями КДФБ и МКДФБ, которые имеют точные разрывные решения в виде бегущих волн и выражаются через эллиптические функции Вейерштрасса, которые в вырожденном случае описывают ограниченные электромагнитные ударные волны.

Уравнение Буссинеска физически более привлекательная и сложная континуальная математическая модель реальной линии передачи и относится к классу точно решаемых уравнений, для которой общее решение задачи Коши может быть получено методом обратной задачи рассеяния, что требует самостоятельного рассмотрения.

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за конструктивные ценные замечания, учтенные в работе.

## Список литературы

- [1] Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике / Под ред. Л.А. Островского, М.И. Рабиновича. М.: Советское радио, 1977. 368 с.
- [2] Лонгрен К. Экспериментальные исследования солитонов в нелинейных линиях передачи с дисперсией / Солитоны в действии. М.: Мир, 1981. 312 с.
- [3] Hirota R., Suzuki K. // Proc. IEEE. 1973. Vol. 61. P. 1483.
- [4] Журавлев В.М. // ЖЭТФ. 2006. Т. 129. Вып. 3. С. 587–604.
- [5] Ostrovskiy L.A., Gorshkov K.A., Papko V.V. // Phys. Scripta. 1979. Vol. 20. P. 357–363.
- [6] Ikezi H., Wojtowich S.S., Waltz J.S. et al. // J. Appl. Phys. 1988. Vol. 64. N 6. P. 3277–3281.
- [7] Kuusela T., Hietarinta J. // Rev. Sci. Instrum. 1991. Vol. 62. N 9. P. 2299–2270.
- [8] Белянцев А.М., Дубнев А.И., Климин С.Л. и др. // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 8. С. 132–142; Козырев А.Б. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 2. С. 134–136.
- [9] Губанов В.П., Гушин А.В., Ковальчук О.Б. и др. // Письма ЖТФ. 2009. Т.35. Вып. 13. С. 81–87.
- [10] Романенко И.В., Ростов В.В. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 7. С. 111–114.
- [11] Островский Л.А., Папко В.В., Пелиновский Е.Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1972. Т. 15. № 4. С. 580–591.
- [12] Tsuneo Yagi // J. Phys. Soc. Jpn. 1981. Vol. 50. N 8. P. 2737–2744.
- [13] Берман Л.С. Введение в физику варикапов. Л.: Наука, 1968. 182 с.
- [14] Самсонов А.М. // ДАН СССР. 1988. Т. 299. Вып. 5. С. 1038–1086.
- [15] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 480 с.
- [16] Samsonov A.M. // Applicable Analysis. 1995. Vol. 57. P. 85–100.
- [17] Kudryashov N.A. // Commun Nonlinear Sci Numerical Simulation. 2010. Vol. 15. P. 2778–2790.
- [18] Watanabe S. // J. Phys. Soc. Jpn. 1978. Vol. 45. N 1. P. 276–282.
- [19] Kuusela T., Hietarinta J. // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 62. N 7. P. 700–703.