

Структура и энергия линейного вихря в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде

© М.А. Зеликман, К.А. Поцелуев

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: marzelik@mail.ru

(Поступило в Редакцию 28 марта 2012 г.)

Рассмотрены две возможные равновесные конфигурации линейных вихрей в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде при любых значениях структурного фактора (b): а) центр вихря расположен в центре одной из ячеек, б) центр вихря находится на одном из контактов. Выведены бесконечные системы уравнений, описывающие эти конфигурации. Переход к конечной системе осуществляется путем пренебрежения токами, достаточно далеко удаленными от центра. Показано, что при величинах параметра пиннинга I меньше 0.25 справедливо рассмотрение, предполагающее $b = 0$. Рассчитаны структуры и энергии обеих конфигураций линейных уединенных вихрей при $I > 0.25$ во всем диапазоне возможных значений структурного фактора b . В обеих конфигурациях с увеличением структурного фактора b скачки фаз на контактах и токи в центральной области вихря, а также полные энергии вихрей уменьшаются, что ведет к снижению значения критического поля H_{C1} . Энергия вихря с центром на контакте при всех значениях I и b больше энергии конфигурации с центром в середине ячейки.

Введение

Одной из важнейших проблем в физике сверхпроводников является анализ структуры, движения и пиннинга вихрей, возникающих в образце при внесении его во внешнее магнитное поле. Для обычных сверхпроводников теория вихрей, базирующаяся на уравнениях Гинзбурга–Ландау, построена еще до создания теории БКШ [1–3]. В керамических ВТСП теоретическое описание вихрей сталкивается с некоторыми трудностями, которые вызваны гранулированностью образца. В первую очередь эти трудности связаны с ячеистой структурой среды, когда между соприкасающимися сверхпроводящими гранулами находятся диэлектрические области. В местах соприкосновения гранул друг с другом образуются джозефсоновские контакты, количество которых так велико, что такие среды иногда называют джозефсоновскими. Все эти джозефсоновские контакты являются нелинейными элементами, что сильно усложняет анализ таких сред. Токовые состояния как экранирующие, так и вихревые отличаются по своей структуре от существующих в обычных сверхпроводниках. Уравнения Гинзбурга–Ландау неприменимы в этой ситуации, и нужно искать другую основу для математического описания гранулированных сверхпроводников.

В работе [4] предложена модель гранулированного ВТСП, в которой в качестве математической основы описания используется система уравнений квантования флюксоида в ячейках [5]. Эта модель представляет собой кубическую решетку с периодом a , состоящую из сверхпроводящих проводов радиусом δ , каждая связь которой содержит один джозефсоновский контакт. Как показали расчеты, такой модели, которую принято называть трехмерной упорядоченной джозефсоновской сре-

дой, присущи все свойства, характерные для сверхпроводников во внешнем магнитном поле: мейснеровские экранирующие токи, взаимодействующие друг с другом вихри, набор характерных полей и т.п., причем даже количественные соотношения аналогичны имеющим место в обычных и высокотемпературных сверхпроводниках. При этом математическое описание, основанное на уравнениях квантования флюксоида в ячейках, позволяет исследовать все детали токовых конфигураций. Поэтому использование этого подхода целесообразно при анализе процессов, происходящих в реальных ВТСП.

Система уравнений, выведенных в [4], содержит два безразмерных параметра I и b , смысл которых будет понятен из дальнейшего изложения. Анализ токовых конфигураций в [6] и в дальнейших исследованиях [7 и др.] проводился только для случая $b = 0$ (или $Ib \ll 1$, что по существу то же самое). В [8] на базе предложенного в [4] подхода было проведено рассмотрение ненулевых значений параметра b для мейснеровских токовых конфигураций. Целью настоящей работы является анализ линейных вихревых состояний на базе того же математического подхода во всем возможном диапазоне значений параметров I и b .

Расчет структуры и энергии линейного вихря

Рассмотрим возможность существования вдали от границы образца изолированного самоподдерживающегося линейного вихря при отсутствии внешнего магнитного поля. Из соображений симметрии следует, что равновесные конфигурации могут быть трех видов: а) центр вихря расположен в центре одной из ячеек, б) центр

вихря находится на одном из контактов, в) центр вихря находится на пересечении проводов. Однако подробный анализ показывает, что последний вариант решения не имеет.

а. Центр вихря в центре ячейки — конфигурация „а“

Сечение части такого вихря плоскостью, перпендикулярной его оси, показано на рис. 1. Вихрь обладает осевой симметрией, а также четырьмя плоскостями симметрии (на рис. 1 проходящие через центр левой нижней ячейки вертикальная, горизонтальная и две диагональные). На этой основе можно построить все сечение вихря. В каждой из ячеек выполняется условие квантования флюксоида

$$\frac{2\pi\Phi_m}{\Phi_0} + \sum_k \varphi_k^m = 2\pi K_m, \tag{1}$$

где $\sum_k \varphi_k^m$ — сумма скачков фазы на джозефсоновских элементах m -й ячейки, Φ_m — полный магнитный поток через m -ю ячейку, Φ_0 — квант магнитного потока (во избежание путаницы поток через ячейку с номером 0 будем обозначать как $\Phi_m|_{m=0}$), K_m — целое число, равное единице для центральной ячейки вихря (с током i_0) и нулю для всех остальных.

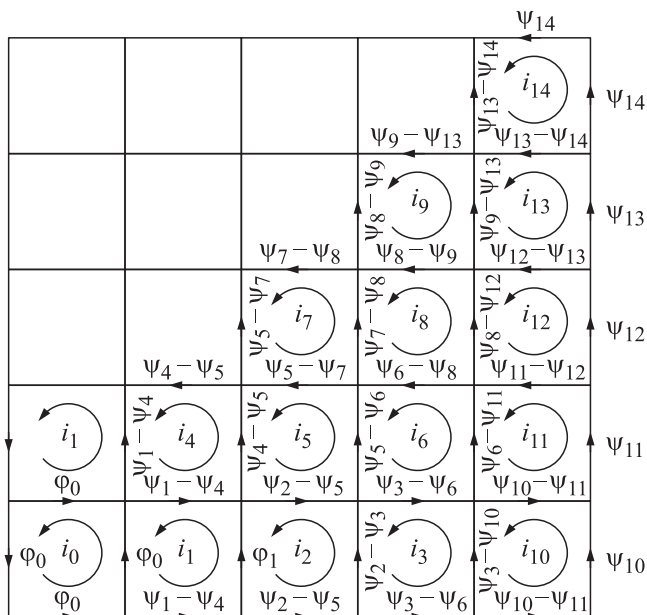


Рис. 1. Распределение токов и скачков фазы на контактах для конфигурации „а“ вихря в плоскости, перпендикулярной его оси. i_m и ψ_m — контурный ток в m -м контуре и соответствующий „контурный“ скачок фазы. Над каждым контактом указан скачок фазы, выраженный через ψ_m . Скачки φ_0 и φ_1 не предполагаются малыми. Ячейка с i_0 содержит 1 квант потока Φ_0 , все остальные — 0 квантов.

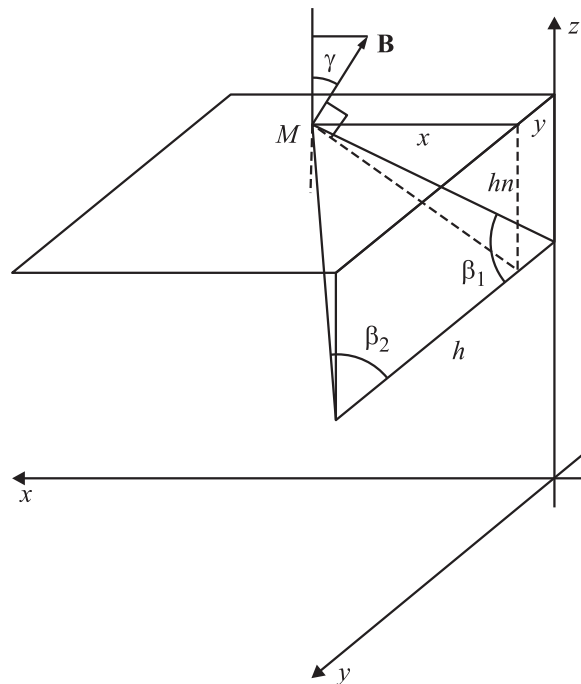


Рис. 2. К расчету магнитного поля.

Величины джозефсоновских токов $J_k = J_c \sin \varphi_k$ по мере удаления от центра вихря убывают. Мы будем рассматривать лишь такие конфигурации, в которых $\varphi_k \ll 1$, т.е. $\sin \varphi_k \approx \varphi_k$, для всех φ_k , кроме самых больших по величине скачков фазы φ_0 и φ_1 в ближайших к центру ячейках (рис. 1). Справедливость этого предположения будет подтверждена результатом. В этом случае, чтобы избежать выписывания условий баланса токов в узлах, удобно воспользоваться методом „контурных токов“ ячеек. Пусть в каждой ячейке с номером m протекает контурный ток $i_m = J_c \psi_m$, где ψ_m — „контурный“ скачок фазы. Тогда значения скачков фазы φ_k на контактах (кроме φ_0 и φ_1) определяются как разности соответствующих „контурных“ значений (рис. 1).

Вычислим вклад в магнитный поток через ячейку от бесконечного числа токов, расположенных один под другим и протекающих по одной из ее границ (рис. 2). Вертикальная проекция поля B_z , созданного током J , находящимся на расстоянии na по вертикали от плоскости ячейки, равна

$$B_z = B \cos \gamma = \frac{\mu_0 J}{4\pi \sqrt{x^2 + n^2 a^2}} (\cos \beta_1 + \cos \beta_2) \cos \gamma$$

$$= \frac{\mu_0 J}{4\pi \sqrt{x^2 + n^2 a^2}} \left(\frac{y}{\sqrt{y^2 + x^2 + n^2 a^2}} + \frac{a - y}{\sqrt{(a - y)^2 + x^2 + n^2 a^2}} \right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + n^2 a^2}}. \tag{2}$$

Проинтегрировав по площади ячейки, получим выражение для вклада в поток от элемента

$$\begin{aligned} \Phi(n) = & \frac{\mu_0 J a}{2\pi} \left[\sqrt{2(1-\alpha)^2 + n^2} - 2\sqrt{\alpha^2 + (1-\alpha)^2 + n^2} \right. \\ & + \sqrt{2\alpha^2 + n^2} + \frac{(1-\alpha)}{2} \ln \\ & \times \frac{(\sqrt{2(1-\alpha)^2 + n^2} - 1 + \alpha)(\sqrt{(1-\alpha)^2 + \alpha^2 + n^2} + 1 - \alpha)}{(\sqrt{2(1-\alpha)^2 + n^2} + 1 - \alpha)(\sqrt{(1-\alpha)^2 + \alpha^2 + n^2} - 1 + \alpha)} \\ & \left. - \frac{\alpha}{2} \ln \frac{(\sqrt{2\alpha^2 + n^2} + \alpha)(\sqrt{(1-\alpha)^2 + \alpha^2 + n^2} - \alpha)}{(\sqrt{2\alpha^2 + n^2} - \alpha)(\sqrt{(1-\alpha)^2 + \alpha^2 + n^2} + \alpha)} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где $\alpha = \delta/a$. Просуммировав по n от $-\infty$ до $+\infty$, найдем искомый поток через ячейку. Представим его в виде

$$\Phi = \frac{\mu_0 J}{a} (a - 2\delta)^2 \left(\frac{1}{4} + b_L \right). \quad (4)$$

Если бы поле было однородным, то полный поток через ячейку от токов по всем ее четырем границам равнялся бы

$$BS = \frac{\mu_0 J}{a} (a - 2\delta)^2,$$

а b_L равнялся бы нулю. Отсюда можно сделать вывод, что параметр b_L в формуле (4), как и структурный фактор

$$b = \frac{1}{2\pi(1-2\alpha)} \ln \frac{1 - \exp(-2\pi(1-\alpha))}{1 - \exp(-2\pi\alpha)}$$

в работах [4,6–8], связан с неоднородностью поля в ячейках из-за дискретности распределения токов. Расчет показывает, что при всех α значение b_L на 5–7% меньше b . Но b соответствует учету неоднородности от поля, созданного бесконечно длинными токами, а b_L — только от участка, ограничивающего ячейку. Значит, вклад от остальных участков мал и им можно пренебречь в целях упрощения анализа. Далее будем считать b_L по формуле для b . На рис. 3, *a* приведен график зависимости параметра b от δ/a . Из рис. 3, *a* можно видеть, что практически значимые величины структурного фактора b , соответствующие интервалу $0.01 \leq \delta/a \leq 0.5$, находятся в диапазоне от 0.454 до 0.049.

Магнитный поток через m -ю ячейку можно записать в виде

$$\Phi_m = \frac{\mu_0 S (i_m + b \sum_k J_k^{(m)})}{a}, \quad (5)$$

где $\sum_k J_k^{(m)}$ — алгебраическая сумма токов контактов m -й ячейки, каждый из которых рассчитывается как разность соответствующих контурных токов, $S = (a - 2\delta)^2$ — площадь ячейки.

Подставляя (5) в (1), запишем условия квантования флюксоида (1) (m — номер ячейки):

$$I(1 + 4b)\psi_0 - 4Ib\psi_1 + 4\varphi_0 = 2\pi, \quad (m = 0),$$

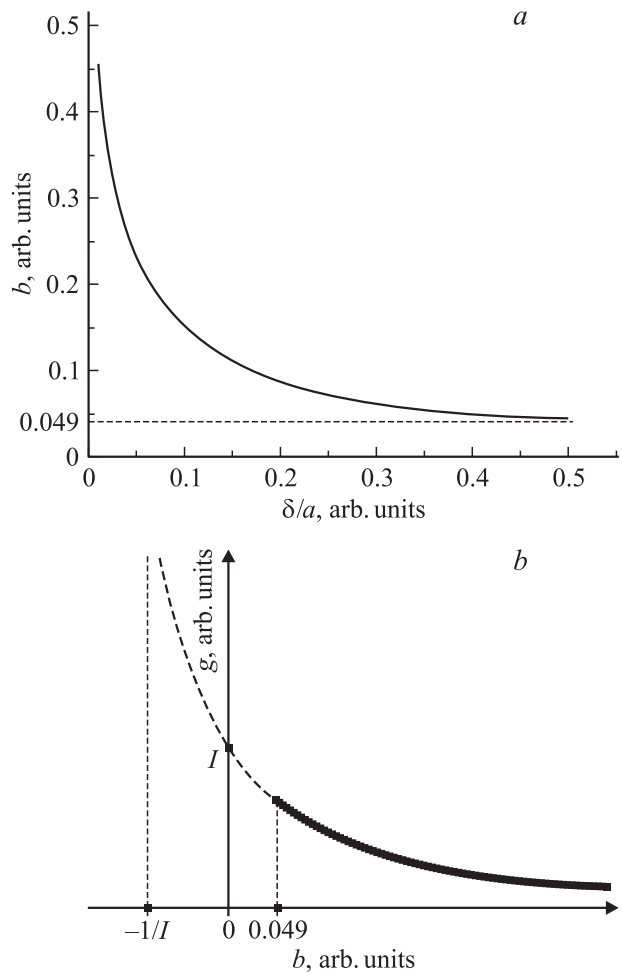


Рис. 3. *a* — зависимость параметра b от величины δ/a ; *b* — зависимость параметра g от величины b .

$$[I(1 + 4b) + 2]\psi_1 - Ib(\psi_0 + \psi_2 + 2\psi_4)$$

$$- 2\psi_4 + \varphi_1 - \varphi_0 = 0, \quad (m = 1),$$

$$(I + 3)\psi_2 + Ib(4\psi_2 - 2\psi_5 - \psi_3 - \psi_1)$$

$$- 2\psi_5 - \varphi_1 - \psi_3 = 0, \quad (m = 2),$$

$$(g + 4)\psi_4 - 2\psi_1 - 2\psi_5 = 0, \quad (m = 4),$$

$$(g + 4)\psi_5 - \psi_2 - \psi_4 - \psi_6 - \psi_7 = 0, \quad (m = 5),$$

$$(g + 4)\psi_7 - 2\psi_8 - 2\psi_5 = 0 \text{ и т.д. } (m = 7), \quad (6)$$

$$\sin \varphi_0 = \psi_0 - \psi_1,$$

$$\sin \varphi_1 = \psi_1 - \psi_2, \quad (7)$$

где $g = I/(Ib + 1)$, $I = 2\pi\mu_0 Jca/\Phi_0$ — параметр пиннинга.

Величина g , как видно из (6), представляет собой „эффективное“ значение параметра пиннинга, определяющее поведение вихря в области малых скачков фазы. График зависимости g от b приведен на рис. 3, *b*. При изменении параметра I гиперболу надо передвигать

горизонтально, так чтобы график пересекал ось g в точке I .

Последние два уравнения в (6) получены из дополнительных условий $J_c \sin \varphi_0 = i_0 - i_1$ и $J_c \sin \varphi_1 = i_1 - i_2$ для токов в контактах с φ_0 и φ_1 (φ_0 и φ_1 не считаем малыми).

Джозефсоновская энергия единицы длины вихря, как и в [6], задается выражением

$$E_J^a = \frac{E_c}{a} \sum_k (1 - \cos \varphi_k) = IE_0 \sum_k (1 - \cos \varphi_k), \quad (8)$$

где $E_0 = \Phi_0^2 / 4\pi^2 \mu_0 S$ — нормировочная постоянная. Суммирование по k в (8) ведется по всем джозефсоновским контактам.

А вот для расчета магнитной энергии E_H^a выражения из [6] применены быть не могут, так как при их выводе использовался факт однородности поля. В рассматриваемом случае, как видно из (2), поле однородным не является. Именно поэтому величина b отлична от нуля. Запишем выражение для магнитной энергии системы контурных токов $E_H^a = 0.5 \sum_{m,n} L_{mn} i_m i_n$, где под током i_m подразумевается столбец из бесконечного числа контуров с контурным током i_m , расположенных один под другим в сечениях, перпендикулярных оси вихря. Здесь L_{mn} — матрица взаимных индуктивностей [9], определяемая из соотношения $\Psi_m = \Phi_m / a = \sum_n L_{mn} i_n$, где Ψ_m — полный магнитный поток (потокосцепление) через столбец. Используя его, запишем выражение для магнитной энергии в виде [9]

$$E_H^a = 0.5 \sum_m i_m \sum_n L_{mn} i_n = \frac{0.5 \sum_m i_m \Phi_m}{a}. \quad (9)$$

Суммирование по m в (9) ведется по всем ячейкам с учетом симметрии вихря (что приводит к коэффициенту 4 для ячеек, лежащих на центральных столбце и строке, и к коэффициенту 8 для всех остальных). Для конкретной конфигурации „а“ выражение (9) примет вид

$$E_H^a = 0.5 I^2 E_0 \left[\psi_0 (\psi_0 + 4b(\psi_0 - \psi_1)) + 4\psi_1 (\psi_1 + b(4\psi_1 - 2\psi_4 - \psi_0 - \psi_2)) + 4\psi_2 (\psi_2 + b(4\psi_2 - 2\psi_5 - \psi_1 - \psi_3)) + 4\psi_4 (\psi_4 + b(4\psi_4 - 2\psi_1 - 2\psi_5)) + 8\psi_5 (\psi_5 + b(4\psi_5 - \psi_2 - \psi_4 - \psi_6 - \psi_7)) + 4\psi_7 (\psi_7 + b(4\psi_7 - 2\psi_5 - 2\psi_8)) + \dots \right]. \quad (10)$$

При $b = 0$ соотношение (10) совпадает с выражением для E_H^a из [6], что подтверждает правильность выражения (9).

Полная энергия вихря E_Σ равна сумме джозефсоновской и магнитной.

Переход от бесконечной системы (6) к конечной может быть осуществлен пренебрежением токами, достаточно удаленными от центра (рис. 1). Размер квадрата, необходимого для расчета, определяется условием

малости изменений находимых величин при увеличении размера квадрата.

Решение конечной системы (6) производилось путем выражения значений всех ψ_m через φ_0 и φ_1 из линейных уравнений системы и подстановкой их в два последних уравнения, содержащие синусы. В результате получаем систему из двух нелинейных уравнений

$$\varphi_1 = [2\pi - I(1 + 4b) \sin \varphi_0 - A(I, b)\varphi_0] / B(I, b), \quad (11)$$

$$\varphi_0 = [\sin \varphi_1 - C(I, b)\varphi_1 - F(I, b)] / D(I, b), \quad (12)$$

где A, B, C, D и F — некоторые функции от I и b .

Кривые (11) и (12) в диапазоне $0 - \pi$ имеют одну точку пересечения, соответствующую которой φ_0 и φ_1 находятся численным методом. Зная φ_0 и φ_1 , затем находим и все ψ_m .

в. Центр вихря на контакте — конфигурация „b“

Такой вихрь (рис. 4) имеет две плоскости симметрии (нижняя горизонтальная и вертикальная посредине левого столбца). На этой основе можно построить все сечения вихря. Из соображений симметрии следует, что на центральном контакте скачок фазы равен π , а на всех остальных контактах того же ряда — нулю (рис. 4).

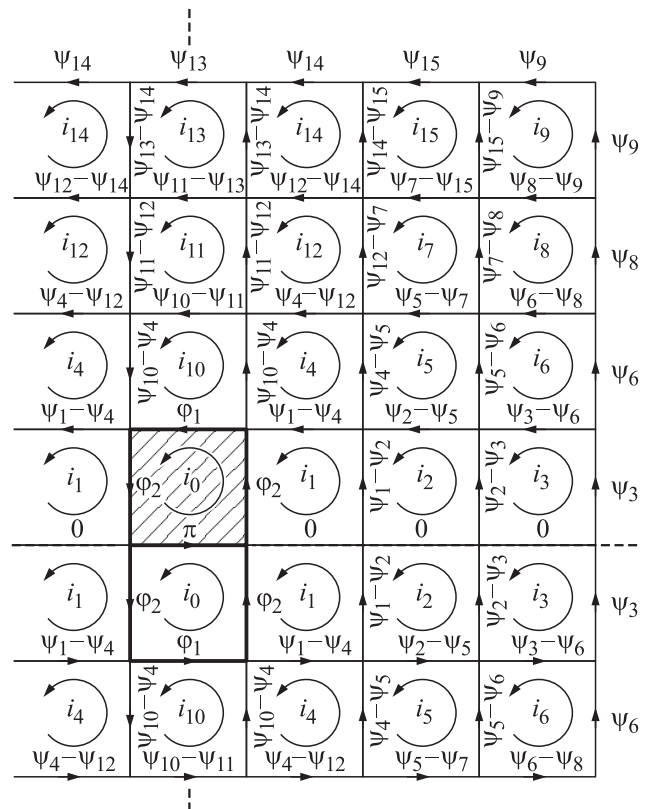


Рис. 4. Распределение токов и скачков фазы на контактах для конфигурации „b“. Скачки φ_1 и φ_2 не предполагаются малыми. Ячейка с $m = 0$ содержит 1 квант потока Φ_0 , все остальные — 0 квантов.

В этом рассмотрении будет применен подход, отличный от использованного в [6]. Ранее говорилось, что максимальным реальным значением параметра b является 0.454 при $\delta/a = 0.01$. В [6] предполагалось, что $Ib \ll 1$. При $b = 0.454$ это условие можно считать выполненным для всех $I < 0.25$. Иными словами, для всех b при $I < 0.25$ остается справедливым рассмотрение [6]. Поэтому целью настоящего рассмотрения является случай $I > 0.25$. Есть основания ожидать, что при таких I значения φ_3 и φ_4 из [6], которым на рис. 4 соответствуют обозначения $\psi_{10}-\psi_{11}$ и $\psi_1-\psi_2$, настолько малы, что их синусы можно считать равными углам. Это позволяет ограничиться лишь двумя немалыми значениями скачков фазы φ_1 и φ_2 в отличие от подхода [6], где таких значений было 4, и избежать итерационной процедуры. Правильность этого предположения подтверждается полученными решениями.

Аналогично (6) получим следующую систему уравнений квантования флюксоида в ячейках (m — номер ячейки на рис. 4):

$$2\varphi_2 + \varphi_1 + I\psi_0 + Ib(3\psi_0 - 2\psi_1 - \psi_{10}) = \pi, \quad (m = 0),$$

$$(g+2)\psi_1 - \psi_4 - \psi_2 + gb(\psi_1 - \psi_0) - \varphi_2 g/I = 0, \quad (m = 1),$$

$$(g+3)\psi_{10} - 2\psi_4 - \psi_{11} + gb(\psi_0 - \psi_{10}) - \varphi_1 g/I = 0,$$

$$(m = 10),$$

$$(g+4)\psi_4 - \psi_1 - \psi_5 - \psi_{10} - \psi_{12} = 0 \quad \text{и т.д.} \quad (m = 4). \quad (13)$$

К этим уравнениям надо добавить дополнительные условия $J_c \sin \varphi_1 = i_0 - i_{10}$ и $J_c \sin \varphi_2 = i_0 - i_1$ для токов в контактах с φ_1 и φ_2 (их мы не считаем малыми), что даст

$$\sin \varphi_1 = \psi_0 - \psi_{10}, \quad (14)$$

$$\sin \varphi_2 = \psi_0 - \psi_1. \quad (15)$$

Переход от бесконечной системы уравнений к конечной проводится так же, как и в рассмотренном ранее случае, пренебрежением токами, достаточно удаленными от центра. Система (13)–(14) решается так же, как система (6), т.е. из линейных уравнений (13) выражаются все ψ_k через φ_1 и φ_2 , затем подставляются в (14) и (15), в результате чего получается система двух нелинейных уравнений для φ_1 и φ_2 , аналогичная (12) и (13). Решение этой системы дает искомые значения φ_1 и φ_2 , из которых затем находят все ψ_k .

Джозефсоновская и магнитная энергии единицы длины ищутся по формулам (16) и (17), получаемым из (8) и (9) для конфигурации рис. 4:

$$E_J^b = IE_0 \left[2 + \sum_k (1 - \cos \varphi_k) \right], \quad (16)$$

$$\begin{aligned} E_H^b = I^2 E_0 & \left[\psi_0(\psi_0 + b(3\psi_0 - 2\psi_1 - \psi_{10})) \right. \\ & + 2\psi_1(\psi_1 + b(3\psi_1 - \psi_0 - \psi_2 - \psi_4)) + 2\psi_2(\psi_2 + b(3\psi_2 \\ & - \psi_1 - \psi_3 - \psi_5)) + 2\psi_{10}(\psi_{10} + b(4\psi_{10} - \psi_0 - \psi_{11} \\ & - 2\psi_4)) + 2\psi_4(\psi_4 + b(4\psi_4 - \psi_1 - \psi_{10} - \psi_5 - \psi_{12})) \\ & \left. + 2\psi_5(\psi_5 + b(4\psi_5 - \psi_2 - \psi_4 - \psi_6 - \psi_7)) + \dots \right]. \quad (17) \end{aligned}$$

Результаты расчетов и их анализ

Конфигурация „а“

Расчет показал, что при любых значениях I и b (в диапазоне от 0.049 до 0.454) для всех k , кроме 0 и 1, выполняется условие $\varphi_k < 0.4$, что подтверждает справедливость исходного предположения $\sin \varphi_k \approx \varphi_k$ при $k \neq 0$ и 1. На рис. 5 для примера приведено рассчитанное распределение скачка фазы по контактам вихря для $I = 1$, $b = 0.454$. На рис. 6 представлены зависимости скачков фаз φ_0 и φ_1 от I для максимального (0.454 при $\delta/a = 0.01$) и минимального (0.049 при $\delta/a = 0.5$) возможных значений b . С увеличением b значения φ_0 и φ_1 , т.е. токи в центральной области, заметно уменьшаются. Отметим также, что при всех значениях b величину φ_1 можно считать малой уже при $I > 0.25$.

На рис. 7 представлены зависимости от I дзозефсоновской и магнитной энергий E_J^a и E_H^a при разных b . Из хода кривых можно сделать следующие выводы.

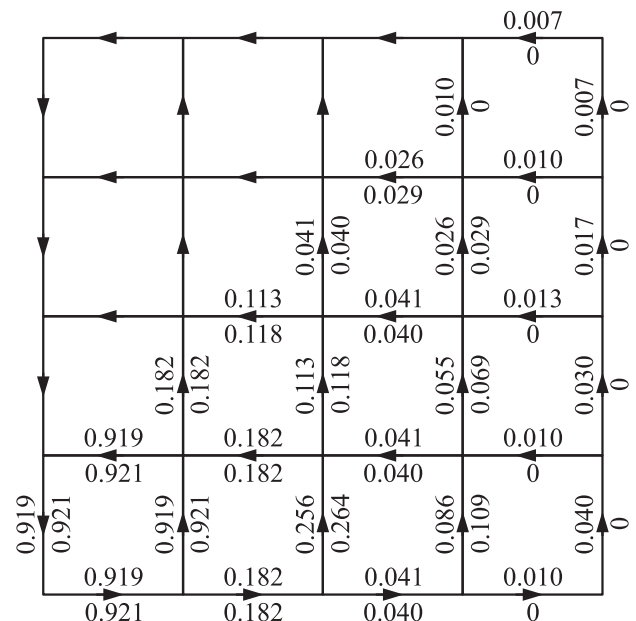


Рис. 5. Распределение скачков фазы в конфигурации „а“ вихря при $I = 1$, $b = 0.454$. Верхние числа соответствуют расчету для квадрата 7×7 , а нижние — 5×5 ячеек.

1. При малых I ($I < 0.25$) кривые для разных b совпадают, т.е. значения энергий не зависят от b . Этот результат соответствует выводам [6], где было показано, что при $Ib \ll 1$ можно считать b равным нулю.

2. Чем больше значение b , тем меньше джозефсоновская энергия. Это выполняется при всех I .

3. Магнитная энергия убывает с ростом b только при достаточно больших I . При малых I зависимость обратная: с ростом b магнитная энергия возрастает.

На рис. 8 представлены зависимости полной энергии линейного вихря конфигурации „а“ от I для разных b . Из приведенных графиков видно, что с ростом b полная энергия всегда уменьшается. При малых I кривые для разных b совпадают, т.е. справедливы расчеты [6,7], в которых b считается равным нулю.

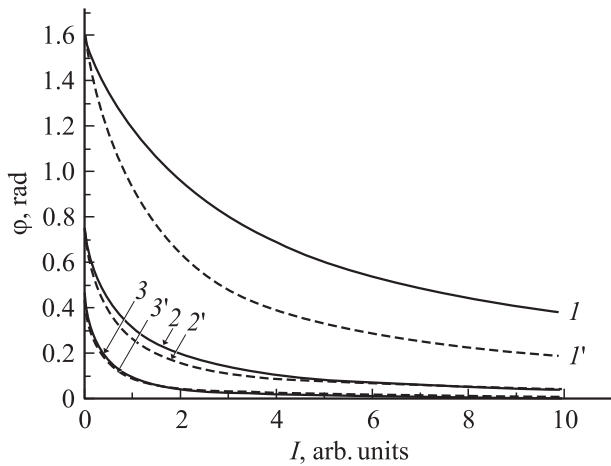


Рис. 6. Результаты расчета скачков фазы для нескольких ближайших к центру вихря контактов с максимальными значениями токов для конфигурации „а“: 1 — φ_0 , 2 — φ_1 , 3 — $(\psi_2 - \psi_3)$. Сплошные кривые (1–3) соответствуют $b = 0.049$, штриховые (1'–3') — 0.454.

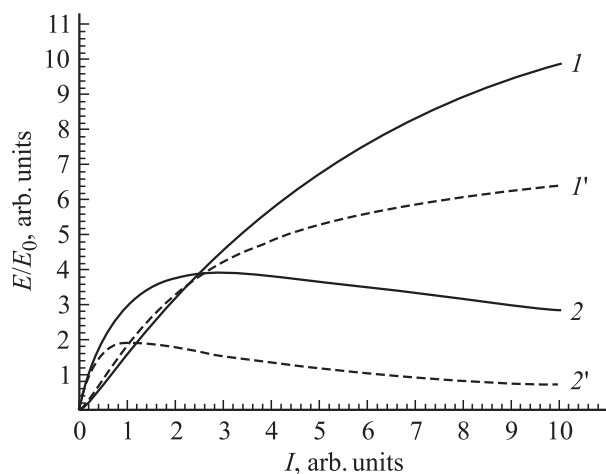


Рис. 7. Графики зависимостей от I джозефсоновских и магнитных энергий для конфигурации „а“: 1 — джозефсоновские энергии, 2 — магнитные. Сплошные кривые (1, 2) соответствуют $b = 0.049$, штриховые (1'–2') — 0.454.

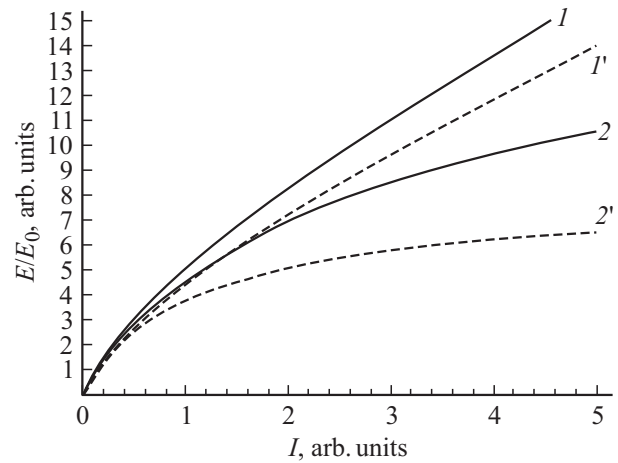


Рис. 8. Зависимости полной энергии линейного вихря от I для разных значений b : 1 — конфигурация „а“, 2 — конфигурация „б“. Сплошные кривые соответствуют $b = 0.049$, штриховые — 0.454.

При расчетах использовались квадраты 5×5 (7 уравнений) и 7×7 (11 уравнений), т.е. по 2 и по 3 ряда от центра в каждую сторону. Видно, что увеличение размеров квадрата с 5×5 (нижние числа на рис. 5) до 7×7 (верхние числа) не ведет к существенному изменению значений φ_k на близких к центру контактах. Например, величина φ_0 при этом изменяется на десятые доли процента. При переходе от 7×7 к 9×9 изменения были бы еще меньше. Это позволяет сделать вывод, что при сколь угодно малых значениях I для расчета структуры центральной части вихря можно ограничиться квадратом 7×7 (или даже 5×5).

Что касается расчета полной энергии вихря E_{Σ}^a , то вычисления дадут правильный результат только при таких значениях I , при которых можно считать, что весь вихрь уменьшается в рассматриваемом квадрате. Характерный размер вихря при малых I равен a/\sqrt{I} [4], поэтому при квадрате 7×7 можно ожидать, что расчет даст верные значения энергии при $I > 0.25$. Это подтверждается незначительностью изменений величин энергии для этих значений I при изменении размеров квадрата с 5×5 до 7×7 . Отметим, что сам факт незначительности этих изменений не может являться гарантией правильности вычисленных значений энергии, поскольку увеличение размеров квадрата ведет к добавлению к общей энергии вклада от еще одного наружного „кольца“ ячеек, а малость этой добавки не гарантирует малости суммы вкладов таких колец, простирающихся до бесконечности. При малых значениях I существенный вклад в энергию вихря будут вносить его внешние области.

Для более точной оценки влияния размеров квадрата воспользуемся следующей интерпретацией. Квадрат $N \times N$ на самом деле соответствует не уединенному вихрю, а являющемуся одним из узлов плоской квадратной решетки вихрей с периодом $(N + 1)$ ячеек, причем соседние вихри имеют противоположные ориентации.

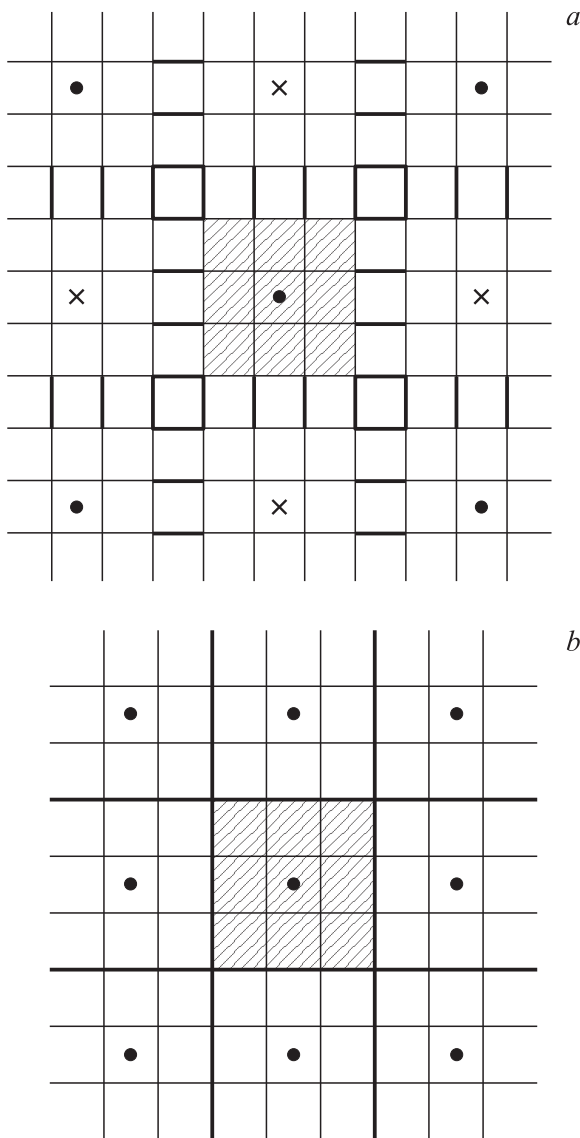


Рис. 9. Решетки вихрей, соответствующие различным рассматриваемым случаям: *a* — решетка чередующихся по направлению вихрей дает нижнюю границу энергии уединенного вихря, *b* — решетка сонаправленных вихрей ограничивает эту энергию сверху.

На рис. 9, *a* изображена такая решетка для $N = 3$. Точки и крестики расположены в центрах вихрей и соответствуют противоположным ориентациям. Вследствие симметрии токи в участках, изображенных жирными линиями, будут равны нулю. Рассматриваемый квадрат 3×3 показан штриховкой. Его ближайшие соседи ориентированы противоположно ему, т.е. притягивают его к себе. Притяжение соответствует отрицательной энергии взаимодействия, т.е. энергия вихря в такой решетке меньше энергии уединенного вихря. Другая геометрия (рис. 9, *b*), в которой нулю равняются токи по внешним сторонам квадрата, соответствует решетке одинаково ориентированных вихрей с периодом N . В ре-

шетке рис. 9, *b* жирными линиями показаны участки с нулевыми токами. Взаимное отталкивание соответствует положительной энергии взаимодействия, и энергия вихря в такой решетке больше энергии уединенного вихря. Расчет энергий для двух случаев дает верхнюю и нижнюю границы для энергии уединенного вихря.

На рис. 10 приведены графики относительной ширины диапазона для энергии уединенного вихря $\delta E^a = (E_{\max}^a - E_{\min}^a)/E_{\max}^a$, рассчитанные для квадрата 7×7 при $b = 0.049$ (кривая 1) и $b = 0.454$ (кривая 2). Как говорилось ранее, для всех b при $I < 0.25$ остаются справедливыми рассуждения [6,8], соответствующие случаю $b = 0$. Поэтому в настоящей работе мы интересуемся только значениями $I > 0.25$. Видно, что для таких значений I относительные погрешности значения энергии не превышают нескольких процентов. Следует отметить также следующий факт. Энергия взаимодействия вихря с соседями для решетки, изображенной на рис. 9, *a*, относительно невелика, поскольку для ближайших соседей эта энергия отрицательна (притяжение), для следующих по удаленности она положительна (отталкивание) и т.д. Эти члены за счет разных знаков частично компенсируют друг друга. В решетке рис. 9, *b* взаимодействие вихря со всеми соседями отталкивательное, т.е. вклады в энергию взаимодействия имеют одинаковые знаки, так что эта энергия намного больше, чем в случае рис. 9, *a*. Поэтому можно ожидать, что истинная энергия уединенного вихря в указанном диапазоне находится существенно ближе к нижней границе, чем к верхней. На рис. 10 приведен диапазон значений энергии конфигурации „а“ вихря $\delta \bar{E} = (E - E_{\min}^a)/E_{\max}^a$ для $b = 0$ (кривые 3 и 4), полученный на базе более точного расчета [7]. Видно, что истинная энергия действительно ближе к нижней границе диапазона. Это дает основания полагать, что в случае $b \neq 0$ ситуация такая же. Это позволяет считать результаты расчета полной энергии вихря приемлемыми уже при $I > 0.1$.

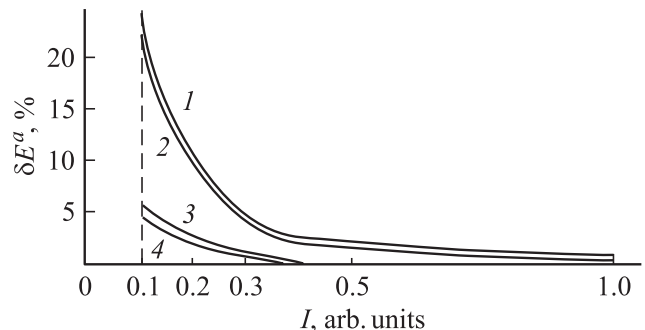


Рис. 10. Зависимости от I относительной ширины диапазона значений энергии уединенного вихря $\delta E^a = (E_{\max}^a - E_{\min}^a)/E_{\max}^a$, рассчитанные для квадрата 7×7 при $b = 0.049$ (кривая 1) и $b = 0.454$ (кривая 2). Кривые 3 и 4 показывают диапазон значений энергии конфигурации „а“ вихря для $b = 0$, полученный на базе более точного расчета [7].

Конфигурация „b“

На рис. 11 приведены рассчитанные распределения скачков фазы по контактам вихря для $I = 1$, $b = 0.454$. При расчетах использовался прямоугольник 8×7 (18 уравнений), т.е. по 3 ячейки в каждую сторону от двух центральных ячеек. На рис. 12 приведены рассчитанные зависимости скачков фазы для нескольких ближайших к центру вихря контактов с максимальными значениями токов (рис. 4) от величины I . С увеличением b значения φ_1 и φ_2 , т.е. токи в центральной области, заметно уменьшаются. Кроме того, из рис. 12 видно, что условие справедливости расчета ($\sin \varphi_k \approx \varphi_k$ при $k \neq 1, 2$) при значениях $I > 0.25$ выполнено, как и

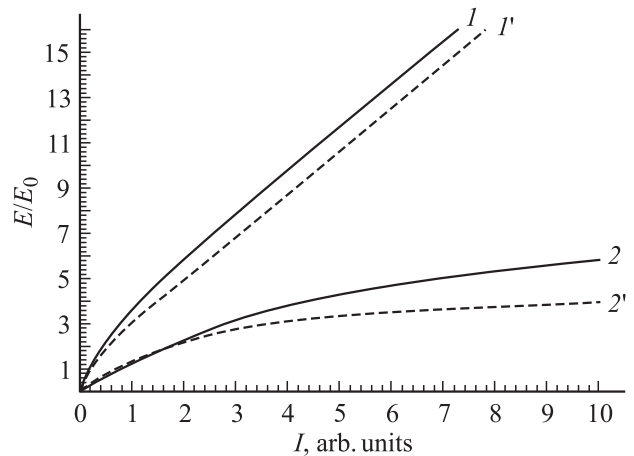


Рис. 13. Графики зависимостей от I джозефсоновских и магнитных энергий для конфигурации „b“: 1 — джозефсоновские энергии, 2 — магнитные. Сплошные кривые соответствуют $b = 0.049$, штриховые — 0.454.

предполагалось ранее. Следует отметить также, что с ростом I значения φ_1 и φ_2 , соответствующие одному значению b , сближаются.

На рис. 13 представлены зависимости от I джозефсоновской и магнитной энергий E_J^b и E_H^b при разных b . Из хода кривых можно сделать следующие такие же выводы, что и для конфигурации „a“.

1. При малых I ($I < 0.25$) кривые для разных b совпадают, т.е. значения энергий не зависят от b .
2. При всех I большим значениям b соответствует меньшая джозефсоновская энергия.
3. Магнитная энергия убывает с ростом b только при достаточно больших I . При малых I зависимость обратная: с ростом b магнитная энергия возрастает.

На рис. 8 представлены зависимости полной энергии конфигурации „b“ линейного вихря от I для разных b . Из приведенных графиков видно, что с ростом b полная энергия всегда уменьшается. При малых I кривые для разных b совпадают, т.е. справедлив расчет [6,7], в котором b считается равным нулю.

Проверки приемлемости прямоугольника 8×7 для расчета полной энергии конфигурации „b“ не требуется, ведь она получается из конфигурации „a“ смещением центра на пол-ячейки, а энергия конфигурации „a“, как было указано ранее, достаточно хорошо описывается квадратом 7×7 .

Из сравнения графиков рис. 8 можно сделать вывод, что энергия конфигурации „b“ всегда превышает энергию конфигурации „a“. Конфигурация „a“, имеющая наименьшую энергию, является устойчивой. О характере устойчивости состояния „b“ без дополнительного исследования ничего определенного сказать нельзя. Корректный анализ устойчивости должен основываться на исследовании квадратичной формы, описывающей энергию токовой конфигурации.

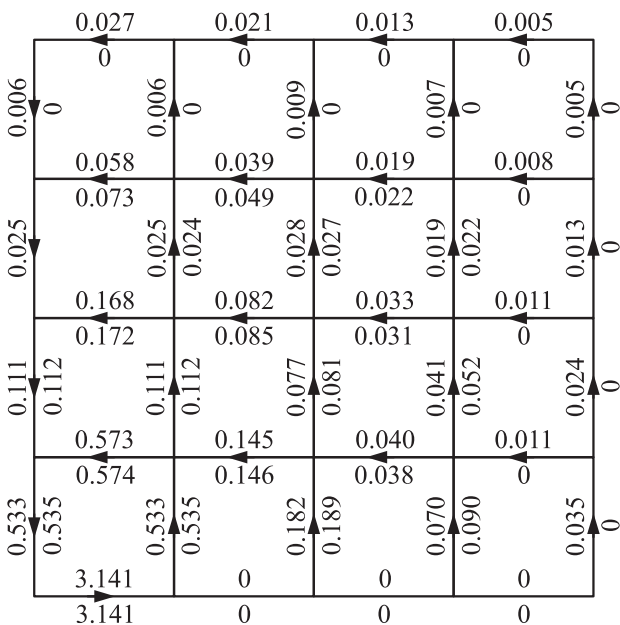


Рис. 11. Распределение скачков фазы в конфигурации „b“ вихря при $I = 1$, $b = 0.454$. Верхние числа соответствуют расчету при размерах квадрата 8×7 , а нижние — 6×5 ячеек.

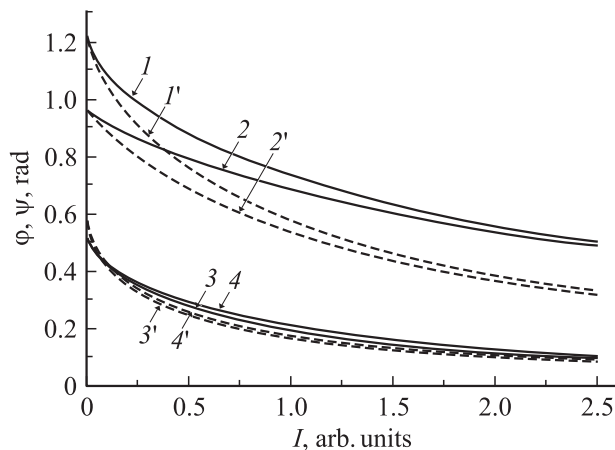


Рис. 12. Результаты расчета скачков фазы для нескольких контактов с максимальными значениями токов для конфигурации „b“: 1 — φ_1 , 2 — φ_2 , 3 — $(\psi_1 - \psi_2)$, 4 — $(\psi_{10} - \psi_{11})$.

Зная энергию вихря E , можно найти критическое значение H_{c1} внешнего магнитного поля, соответствующее началу возникновения вихрей. Термодинамический потенциал Гиббса единицы объема образца, помещенного во внешнее поле H_e , равен

$$G = NE - \frac{BH_e}{2} = 0.5B(H_{c1} - H_e), \quad (18)$$

где N — число вихрей на 1 m^2 , т. е.

$$B = \frac{\Phi}{S} = N\Phi_0, \quad H_{c1} = \frac{2E}{\Phi_0}. \quad (19)$$

При $H_e < H_{c1}$ потенциал G растет с ростом B , т. е. G минимален при $B = 0$ — полный эффект Мейсснера. При $H_e > H_{c1}$ с ростом B значение G убывает, т. е. становится выгодным возникновение вихрей такого типа.

Таким образом, рост структурного фактора b ведет к снижению значения критического поля H_{c1} . При обсуждении этого вопроса следует иметь в виду, что существует некоторое критическое значение параметра пиннинга I_c [10] (в случае $b = 0$ находящееся в интервале 0.7–0.8), разделяющее два возможных режима проникновения в среду внешнего магнитного поля. При $I > I_c$ при любом значении внешнего поля H_e возникает приграничная токовая конфигурация конечной длины, полностью компенсирующая внешнее поле в глубине контакта. В этом случае говорить о существовании H_{c1} нет смысла. Если же $I < I_c$, то такая ситуация реализуется лишь до некоторого значения внешнего поля H_{max} . При больших значениях поля оно проникает внутрь среды на бесконечную глубину, т. е. можно ввести понятие H_{c1} .

Заключение

Показано, что математический подход, основанный на условиях квантования флюксоида в ячейках, позволяет рассчитать структуру и энергию линейных вихрей в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде при любых значениях структурного фактора. Рассмотрены две возможные равновесные конфигурации: а) центр вихря расположен в центре одной из ячеек, б) центр вихря находится на одном из контактов.

Выведены бесконечные системы уравнений, описывающие эти конфигурации. Переход к конечной системе осуществляется путем пренебрежения токами, достаточно далеко удаленными от центра. Размер квадрата, необходимого для такого расчета, определяется условием малости изменений скачков фазы на ячейках, близких к центру вихря, при увеличении размеров квадрата.

Показано, что при величинах параметра пиннинга I меньше 0.25 справедливо рассмотрение, предполагающее $b = 0$.

Рассчитаны структуры и энергии обеих конфигураций линейных уединенных вихрей при $I > 0.25$ во всем диапазоне возможных значений структурного фактора b .

Проведена оценка диапазона, в котором находится истинная энергия уединенного вихря.

В отличие от плоских вихрей, ширина которых с убыванием I стремится к бесконечности, линейный вихрь при любых значениях I и b имеет центральную часть размером в несколько ячеек, где скачки фазы, а значит, и токи в контактах намного больше, чем в остальной области вихря.

В обеих конфигурациях с увеличением структурного фактора b при одном и том же значении параметра пиннинга I скачки фаз на контактах и токи в центральной области вихря, а также полные энергии вихрей уменьшаются. Можно сказать, что рост структурного фактора b ведет к снижению значения критического поля H_{c1} .

Энергия вихря с центром на контакте при всех значениях I и b больше энергии конфигурации с центром в середине ячейки. Конфигурация „а“ является устойчивой. О характере устойчивости состояния „б“ без дополнительного исследования ничего определенного сказать нельзя. Корректный анализ устойчивости должен основываться на исследовании квадратичной формы, описывающей энергию токовой конфигурации.

Список литературы

- [1] *Абрикосов А.А.* // ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 1442.
- [2] *Goodman B.* // Rev. Mod. Phys. 1964. Vol. 36. P. 12.
- [3] *Де Жен П.* Сверхпроводимость металлов и сплавов. М.: Мир, 1968.
- [4] *Zelikman M.A.* // Supercond. Sci. Technol. 1997. Vol. 10. 7. P. 469.
- [5] *Кулик И.О., Янсон И.К.* Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. М.: Наука, 1970.
- [6] *Зеликман М.А.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 1. С. 37–44.
- [7] *Зеликман М.А.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 4. С. 9–16.
- [8] *Зеликман М.А.* // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 5. С. 1–6.
- [9] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* // Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
- [10] *Зеликман М.А.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 9. С. 47–57.