

04

## Осцилляции Фриделя в задаче о скин-эффекте в вырожденной столкновительной плазме

© А.В. Латышев, А.А. Юшканов

Московский государственный областной университет,  
105005 Москва, Россия  
e-mail: avlatyshev@mail.ru, yushkanov@inbox.ru

(Поступило в Редакцию 6 марта 2012 г.)

Показано, что осцилляции Фриделя сопровождают явление скин-эффекта в вырожденной плазме металла. Выяснено, что природа осцилляций Фриделя лежит в особенности вырожденного распределения Ферми, а именно в его резком обращении в нуль непосредственно сразу за поверхностью Ферми. Это обстоятельство и приводит к осцилляциям Фриделя при аномальном скин-эффекте. Приведены графики размывания коновских особенностей.

Считается [1], что при проникновении в вырожденную плазму поперечное электрическое поле в задаче о скин-эффекте в инфракрасной области при нормальном падении электромагнитной волны изменяется по экспоненциальному закону

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-x/\delta}, \quad \delta = \frac{c}{\omega_p}, \quad (1)$$

где  $c$  — скорость света, а  $\omega_p$  — плазменная (ленгмюровская) частота,  $\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}$ ,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона,  $N$  — числовая плотность (концентрация) электронов.

Хорошо также известно [2], что касательная компонента  $E(x, t) = E(x)e^{-i\omega t}$  электрического поля в металле в задаче о скин-эффекте в случае зеркального отражения электронов от поверхности при нормальном падении электромагнитной волны такова, что

$$\frac{E(x)}{E'(0)} = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iq\omega_p x/v_F} dq}{\varepsilon_{tr}(q) - bq^2}, \quad (2)$$

где

$$a = \frac{c^2 \omega_p}{v_F \omega^2}, \quad b = \left( \frac{c \omega_p}{v_F \omega} \right)^2.$$

Здесь  $v$  — эффективная частота столкновений электронов,  $\omega$  — частота колебаний электрического поля,  $v_F$  — скорость электронов на поверхности Ферми, которая считается сферической,  $q$  — безразмерное волновое число, связанное с размерным волновым числом  $k$  соотношением  $q = kv_F/\omega_p$ ,  $\varepsilon_{tr}$  — поперечная диэлектрическая проницаемость,

$$\varepsilon_{tr} = 1 - \frac{3}{4\Omega q^3} \left[ 2(\Omega + i\varepsilon)q + [(\Omega + i\varepsilon)^2 - q^2] \times \ln \frac{\Omega + i\varepsilon - q}{\Omega + i\varepsilon + q} \right],$$

где  $\Omega = \omega/\omega_p$ ,  $\varepsilon = v/\omega_p$  — соответственно частота колебаний электрического поля и частота столкновения электронов.

Отметим, что для зеркально-диффузных граничных условий с коэффициентом зеркальности, зависящим от угла падения, соответствующее выражение для электрического поля получено в [3].

Ниже показано, что диэлектрическая проницаемость имеет коновские особенности (см. [4–7]), которые приводят к осцилляциям Фриделя для электрического поля [8–11].

Величина  $\varepsilon_{tr}$  регулярна при всех значениях частоты колебаний электрического поля и волнового числа. Однако при частотах столкновений, стремящихся к нулю, т.е. при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , производная  $\varepsilon_{tr}$  по волновому числу имеет особенности. Эти особенности аналогичны так называемым коновским особенностям, которые имеют место у квантовой продольной диэлектрической проницаемости. Известно, что коновские особенности приводят к изменению асимптотики экранированного электрического поля электрического заряда. Вместо дебаевской экранировки возникают медленно спадающие фриделевские осцилляции.

Наша цель состоит в анализе асимптотического поведения электрического поля при  $x \rightarrow \infty$ . При этом мы рассмотрим вклад в интеграл области вблизи особенности производной  $\varepsilon_{tr}$ . Наше рассмотрение будет близко к изложенному в [9] и обобщает результаты [11] на случай столкновительной плазмы.

Интегрируя дважды по частям в (2), получаем

$$\frac{E(x)}{E'(0)} = \frac{a v_F^2}{\varepsilon \pi \omega_p^2 x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_{tr}''(q) e^{iq\omega_p x/v_F} dq}{[\varepsilon_{tr}(q) - bq^2]^2}. \quad (3)$$

В выражении (3) оставлены члены, проявляющие аномальное поведение вблизи коновской особенности. В этом же приближении  $\varepsilon''(q)$  можно записать в виде

$$\varepsilon_{tr}''(q) = -\frac{3}{4\Omega q^3} \left[ \frac{\Omega + i\varepsilon + q}{\Omega + i\varepsilon - q} - \frac{\Omega + i\varepsilon - q}{\Omega + i\varepsilon + q} \right].$$

Теперь вместо (3) для электрического поля получаем следующее выражение:

$$\frac{E(x)}{E'(0)} = \frac{3c^2 v_F}{4\pi\omega^2 \omega_p x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{q + \Omega + i\varepsilon}{q - \Omega - i\varepsilon} - \frac{q - \Omega - i\varepsilon}{q + \Omega + i\varepsilon} \right] \times \frac{e^{iq\omega_p x/v_F} dq}{q^3 [\varepsilon_{tr}(q) - bq^2]^2}. \quad (4)$$

Перепишем равенство (4) в виде разности двух интегралов

$$\frac{E(x)}{E'(0)} = \frac{3c^2 v_F}{4\pi\omega^2 \omega_p x^2} [J^+ - J^-], \quad (5)$$

где

$$J^{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iq\omega_p x/v_F} f^{\pm}(q) dq}{q \mp (\Omega + i\varepsilon)},$$

$$f^{\pm}(q) = \frac{q \pm (\Omega + i\varepsilon)}{q^3 [\varepsilon_{tr}(q) - bq^2]^2}.$$

Ввиду сингулярности ядер  $1/[q \mp (\Omega + i\varepsilon)]$  этих интегралов наибольший вклад в значение этого интеграла вносят значения подынтегральной функции вблизи точки  $q = \Omega$ . Функция  $f^{\pm}(q)$  медленно меняется в окрестности этой точки. Поэтому далее положим  $f(q) = f(\Omega)$  при вычислении интегралов из соотношения (5) вблизи особой точки и вынесем эту величину за знак интеграла. Вычисляя этот интеграл, получаем, что

$$\frac{E(x)}{E'(0)} = \frac{3c^2 v_F}{4\pi\omega^2 \omega_p x^2} \left[ f^+(\Omega) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iq\omega_p x/v_F} dq}{q - (\Omega + i\varepsilon)} - f^-(\Omega) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iq\omega_p x/v_F} dq}{q + (\Omega + i\varepsilon)} \right]. \quad (6)$$

Для вычисления интегралов из (6) воспользуемся следствием из теоремы Жордана: если  $\alpha > 0$ , то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iaz} dt}{t - z} = \begin{cases} e^{iaz}, & \text{Im } z > 0, \\ 0, & \text{Im } z < 0. \end{cases}$$

Следовательно, второй интеграл в (6) равен нулю, и для электрического поля мы получаем

$$\frac{E(x)}{E'(0)} = \frac{A}{x^2} \exp\left[\frac{\omega_p x}{v_F}(i\Omega - \varepsilon)\right], \quad (7)$$

где

$$A = \frac{3c^2 v_F i f^+(\Omega)}{2\omega^2 \omega_p},$$

или в явном виде

$$A = \frac{3c^2 v_F i (2\Omega + i\varepsilon)}{2\omega_p^3 \Omega^5 [\varepsilon_{tr}(\Omega) - (c/v_F)^2]^2}, \quad (8)$$

$$\varepsilon_{tr}(\Omega) = 1 - \frac{3}{4\Omega^4} \left[ 2\Omega(\Omega + i\varepsilon) + (i\varepsilon)(2\Omega + i\varepsilon) \times \ln \frac{i\varepsilon}{2\Omega + i\varepsilon} \right].$$

Рассмотрим случай инфракрасных частот. Вблизи поверхности применима формула (1). В соответствии с этим получаем

$$\frac{E(x)}{E'(0)} = -\frac{c}{\omega_p}. \quad (9)$$

Поделив теперь равенство (7) на (9), имеем

$$\frac{E(x)}{E(0)} = -\frac{A\omega_p}{cx^2} \exp\left[\frac{\omega_p x}{v_F}(i\Omega - \varepsilon)\right]. \quad (10)$$

Формулу (10), согласно (8), можно представить в виде

$$\frac{E(x)}{E(0)} = \frac{B}{x^2} \exp\left[\frac{\omega_p x}{v_F}(i\Omega - \varepsilon)\right], \quad (11)$$

где, согласно (8),

$$B = -\frac{3c v_F i (2\Omega + i\varepsilon)}{2\omega_p^2 \Omega^5 [\varepsilon_{tr}(\Omega) - (c/v_F)^2]^2}. \quad (12)$$

Отметим, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , когда столкновительная плазма переходит в бесстолкновительную, формулы (11) и (12) переходят в следующие:

$$\frac{E(x)}{E(0)} = \frac{B^\circ}{x^2} \exp\left[\frac{i\omega x}{v_F}\right], \quad B^\circ = \frac{-3ic v_F \omega_p^2}{\left[\omega^2 - \frac{3}{2}\omega_p^2 - \left(\frac{c\omega}{v_F}\right)^2\right]^2}.$$

Положим далее  $B = |B|e^{i\varphi}$ , где  $\varphi = -\arg B$ . Тогда формулу (11) можно представить в виде

$$\frac{E(x)}{E(0)} = \frac{|B|}{x^2} \exp\left(-\frac{v x}{v_F}\right) \exp\left[i\left(\frac{\omega x}{v_F} - \varphi\right)\right]. \quad (13)$$

Здесь

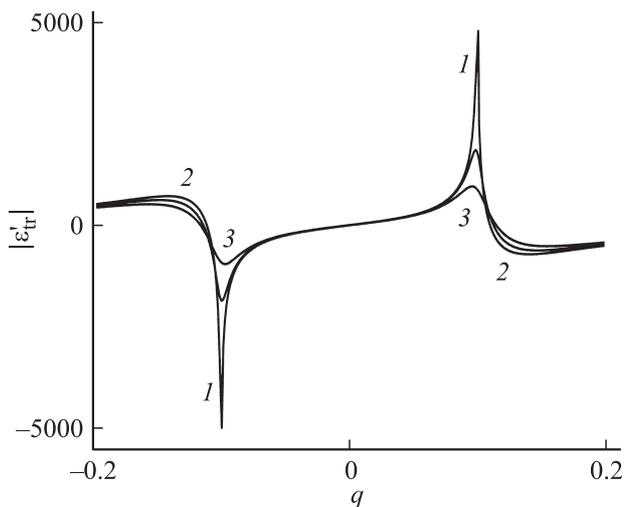
$$B = -\frac{3ic v_F \omega_p^2 (2\omega + iv)}{2\omega^5 [\varepsilon_{tr}(\omega) - (c/v_F)^2]^2}.$$

Полученный результат для касательной компоненты электрического поля в металле в задаче о скин-эффекте в случае зеркального отражения электронов от поверхности при нормальном падении электромагнитной волны можно представить в виде затухающей бегущей волны

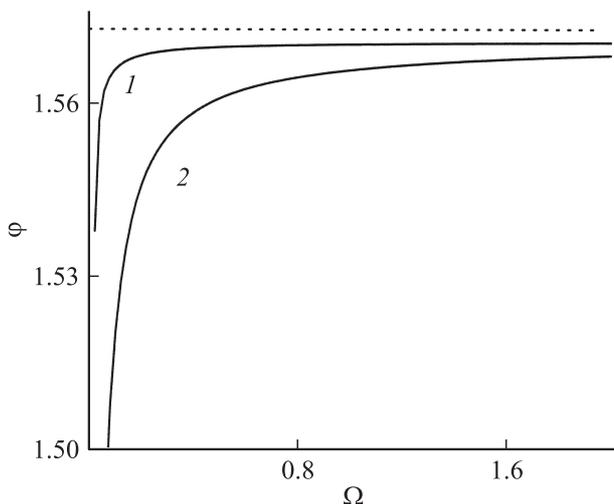
$$\frac{E(x, t)}{E(0)} = \frac{|B|}{x^2} \exp\left(-\frac{v x}{v_F}\right) \exp\left[i\left(\frac{\omega x}{v_F} - \varphi - \omega t\right)\right].$$

Проведем графическое исследование полученных выражений для калия ( $v_F = 8.52 \cdot 10^7$  cm/s и  $\omega_p = 6.5 \cdot 10^{15}$  1/s).

На рис. 1 изображены особенности типа коновских. По вертикальной оси откладывается модуль производной  $|d\varepsilon_{tr}/dq|$ . Рассматривается частота  $\Omega = 0.1$ . На графике



**Рис. 1.** Случай  $\Omega = 0.1$ , калий. Модуль производной диэлектрической проницаемости, кривые 1–3 отвечают значениям  $\varepsilon = 0$  (бесстолкновительная плазма), 0.004 и 0.01.



**Рис. 2.** Сдвиг фазы фриделевских осцилляций. Случай  $\Omega = 1$ , калий; кривые 1 и 2 отвечают значениям  $\varepsilon = 0.001$  и 0.01.

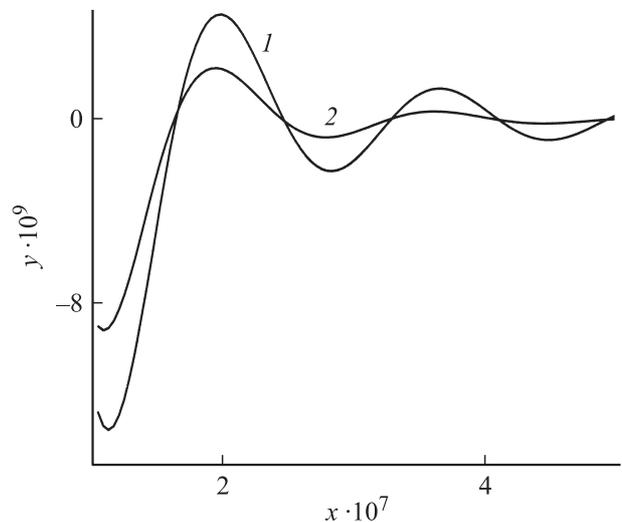
видно обращение в бесконечность производной  $d\varepsilon_{tr}/dq$  в точке  $q = 0.1$  для бесстолкновительной плазмы (кривая 1). С появлением зависимости частоты столкновений и с ее ростом происходит размывание коновских особенностей — производная начинает вести себя все более гладко (кривые 2 и 3). Отметим, что в случае бесстолкновительной плазмы мнимая часть диэлектрической проницаемости равна нулю, при этом модуль производной проницаемости совпадает с ее производной. Наличие столкновений приводит к тому, что диэлектрическая проницаемость становится комплекснозначной.

На рис. 2 рассматривается сдвиг фазы фриделевских осцилляций электрического поля  $y = E(x)/E(0)$  согласно (13) и (12). Рассматривается случай  $\Omega = 1$ , калий; кривые 1 и 2 отвечают  $\varepsilon = 0.001$  и 0.01. Из рисунка

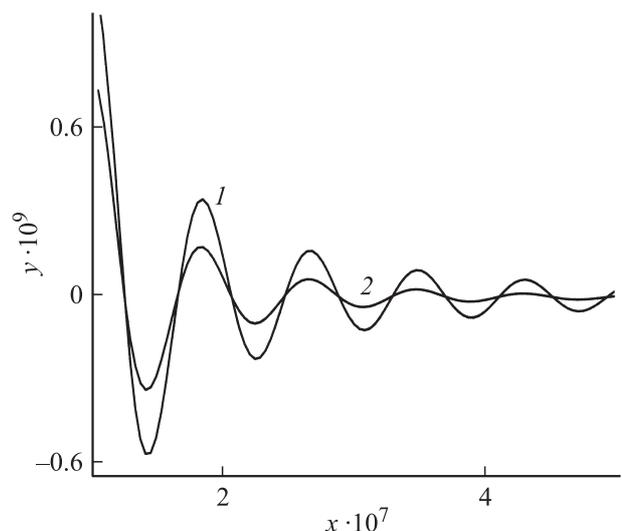
видно, что с возрастанием частоты колебаний  $\Omega$  сдвиг фазы стремится к  $\pi/2$ .

На рис. 3 и 4 изображено поведение функций действительной части электрического поля для калия в случае  $\Omega = 0.5$  (рис. 3) и  $\Omega = 1$  (рис. 4). Кривые 1 и 2 отвечают соответственно значениям относительной частоты столкновений электронов  $\varepsilon = 0.001$  и 0.05. Из этих рисунков видно, что с убыванием величины частоты столкновений  $\varepsilon$  амплитуда поля возрастает, а с ростом частоты колебаний поля  $\Omega$  амплитуда поля убывает.

Фридель был первым [8], кто обнаружил, что асимптотическое (на больших расстояниях) убывание экранированного потенциала точечного заряда при квантовом рассмотрении вырожденной бесстолкновительной



**Рис. 3.** Действительная часть фриделевских осцилляций; случай  $\Omega = 0.5$ , калий, кривые 1 и 2 отвечают значениям  $\varepsilon = 0.001$  и 0.05,  $10^{-7} \text{ cm} < x < 5 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$ .



**Рис. 4.** Действительная часть фриделевских осцилляций; случай  $\Omega = 1$ , калий, кривые 1 и 2 отвечают значениям  $\varepsilon = 0.001$  и 0.05,  $10^{-7} \text{ cm} < x < 5 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$ .

плазмы носит не только монотонно убывающий, но и при этом еще и осциллирующий характер. Причиной таких осцилляций является резкое спадание (до нуля) за поверхностью Ферми распределения Ферми для электронов  $f_F(v) = \Theta(v_F - v)$ ,  $\Theta(x)$  — функция Хэвисайда.

Эта особенность распределения Ферми приводит к так называемым коновским особенностям (см. [4–11]). Коновские особенности являются следствием логарифмических особенностей продольной диэлектрической проницаемости вырожденной плазмы. Именно логарифмические особенности вида  $x \ln x$  и приводят к фриделевским осцилляциям.

В настоящей работе показано, что наличие столкновений в плазме приводит к сглаживанию коновских особенностей электрического поля в задаче о скин-эффекте. Коновские особенности электрического поля, как было показано в [11], присущие бесстолкновительной вырожденной плазме.

## Список литературы

- [1] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.М. Физическая кинетика. М.: Наука, 1970. 528 с.
- [2] Абрикосов А.А. Введение в теорию нормальных металлов. М.: Наука, 1972. 288 с.
- [3] Латышев А.В., Юшканов А.А. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 9. С. 1.
- [4] Bácsi A., Virosztek A. // Phys. Rev. B. 2010. Vol. 82. P. 193 405.
- [5] Affleck I., Borda L., Saleur H. // Phys. Rev. B. 2008. Vol. 77. P. 180 404(R).
- [6] Ayuela A., Jaskólski W., Pelc M., Santos H., Chico L. // Appl. Phys. Lett. 2008. Vol. 93. P. 133 106.
- [7] Kohn W., Vosko S.H. // Phys. Rev. 1960. Vol. 119. P. 912.
- [8] Friedel J. // Phil. Mag. 1952. Vol. 43. P. 153.
- [9] Харрисон У. Теория твердого тела. М.: Мир, 1972. 616 с.
- [10] Пайнс Д. Элементарные возбуждения в твердых телах. М.: Мир, 1965. 382 с.
- [11] Latyshev A.V., Yushmanov A.A. // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. Вып. 15. С. 17.