

Предельно короткий электромагнитный импульс в массиве углеродных нанотрубок с неоднородностью поля по их длине

© М.Б. Белоненко¹, Э.Г. Федоров²

¹ Волгоградский институт бизнеса,
Волгоград, Россия

² Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет,
Волгоград, Россия

E-mail: mbelonenko@yandex.ru, eduard-f@mail.ru

(Поступила в Редакцию 27 ноября 2012 г.)

Исследовано распространение биполярных электромагнитных импульсов в массиве полупроводниковых углеродных нанотрубок. Впервые учтена неоднородность поля импульса вдоль оси нанотрубок. Эволюция электромагнитного поля и плотности заряда в образце описана с помощью системы уравнений Максвелла и уравнения непрерывности. В результате численного моделирования показана возможность устойчивого распространения биполярных электромагнитных импульсов в массиве нанотрубок. Установлено, что распространение электромагнитных импульсов индуцирует перераспределение концентрации электронов в образце.

Работа поддержана РФФИ (грант № 11-02-97054).

1. Введение

В настоящее время в качестве объектов, перспективных для использования при создании элементной базы современной наноэлектроники, рассматриваются углеродные нанотрубки — квазиодномерные макромолекулы углерода [1]. Нелинейность закона дисперсии электронов нанотрубок обуславливает наличие у них широкого спектра свойств, которые могут наблюдаться уже в полях умеренных напряженностей $\sim 10^3$ V/cm (см., например, работы [2,3] и ссылки в них). Данное обстоятельство, а также успехи лазерной физики в области формирования мощного электромагнитного излучения с заданными параметрами (см., например, [4]) явились стимулом для всесторонних исследований электронных и оптических свойств нанотрубок в присутствии электромагнитных полей. В частности, серия работ [5–9] посвящена изучению распространения предельно коротких электромагнитных импульсов в массивах нанотрубок. В работах [5,6] установлена возможность распространения в массиве нанотрубок уединенных электромагнитных волн — солитонов, исследованы их характеристики в зависимости от диаметра нанотрубок. В [7,8] изучена динамика периодического цуга электромагнитных импульсов и индуцируемых ими доменов тока, а также рассмотрено затухание электромагнитных импульсов при их распространении в массиве нанотрубок. В работе [9] исследовано столкновение электромагнитных импульсов в среде массива нанотрубок в одномерной модели.

Однако остается ряд вопросов, касающихся распространения волн в нанотрубках, требующих дальнейшего изучения в связи с возможностью обнаружения качественно новых эффектов, которые могут представлять интерес с прикладной точки зрения. В частности, это

вопросы, связанные с выходом за рамки одномерной модели, а также учетом поперечной дисперсии при изучении динамики электромагнитных волн. Например, в работе [10] установлена возможность распространения в массиве нанотрубок цилиндрически-симметричных электромагнитных волн, эволюция которых схожа с динамикой пульсонов, описанных в [11]. В работе [12] теоретически исследована возможность распространения „световых пульс“ — двумерных бегущих уединенных электромагнитных волн, а в [13] изучены особенности их взаимодействия с неоднородностями в массивах нанотрубок.

Необходимо отметить, что в указанных выше работах рассматривалось распространение электромагнитных импульсов в предположении однородности поля импульса вдоль оси нанотрубок. Однако неоднородность поля вдоль оси нанотрубок может обусловить возникновение интересных физических эффектов, которые могут иметь прикладное значение. В частности, продольная неоднородность поля может привести к накоплению электрического заряда и соответственно к необходимости учета поля этого заряда, что представляет отдельную задачу.

В связи с этим представляется целесообразным изучение особенностей распространения лазерного импульса в массиве полупроводниковых углеродных нанотрубок с учетом пространственной неоднородности поля импульса вдоль оси нанотрубок. Решение задачи подобного рода является также первым шагом к учету поля „подложки“, т.е. поля, которое может создавать матрица, на которой выращивались углеродные нанотрубки.

Актуальность рассмотрения данного круга вопросов очевидна в свете решения ряда перспективных задач современной наноэлектроники.

2. Основные соотношения и волновое уравнение

Рассмотрим распространение электромагнитных волн (импульсов лазерного излучения) в объемном массиве однослойных полупроводниковых углеродных нанотрубок типа zigzag $(m, 0)$, где число m (не кратное трем) определяет радиус нанотрубки $R = \frac{bm}{2\pi} \sqrt{3}$, b — расстояние между соседними атомами углерода [2]. Будем считать, что нанотрубки помещены в однородный диэлектрик, оси нанотрубок параллельны общей оси Ox , а расстояния между соседними нанотрубками велики по сравнению с их диаметром, что позволяет пренебречь взаимодействием между нанотрубками [14].

Закон дисперсии электронов проводимости углеродных нанотрубок в выбранной нами геометрии имеет вид

$$\Delta(p_x, s) = \gamma_0 \sqrt{1 + 4 \cos\left(p_s \frac{d_x}{\hbar}\right) \cos\left(\pi \frac{s}{m}\right) + 4 \cos^2\left(\pi \frac{s}{m}\right)}, \quad (1)$$

где квазиимпульс электрона задается как $\mathbf{p} = \{p_s, s\}$, s — число, характеризующее квантование импульса вдоль периметра нанотрубки ($s = 1, 2, \dots, m$), γ_0 — интеграл перекрытия, $d_s = 3b/2$ [2].

Положим, что лазерный импульс распространяется в направлении, перпендикулярном осям нанотрубок (в выбранной геометрии — вдоль оси Oz), а электрическое поле импульса $\mathbf{E} = \{E(x, z, t), 0, 0\}$ ориентировано вдоль оси Oz . Будем считать, что характерная длительность лазерного импульса T_S удовлетворяет условию $T_S \ll t_{rel}$ (t_{rel} — время релаксации), что позволяет использовать бесстолкновительное приближение при описании эволюции поля в системе [5].

Электромагнитное поле в массиве нанотрубок будем описывать посредством уравнений Максвелла [15], из которых в выбранной нами геометрии следует уравнение

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{4\pi}{c} j = 0, \quad (2)$$

где $A(x, z, t)$ и $j(x, z, t)$ — соответственно проекции векторного потенциала $\mathbf{A} = \{A, 0, 0\}$ и плотности тока проводимости $\mathbf{j} = \{j, 0, 0\}$ на ось Ox , ε — диэлектрическая проницаемость среды, c — скорость света в вакууме; электрическое поле определяется известным соотношением $\mathbf{E} = -c^{-1} \partial \mathbf{A} / \partial t$ [16].

Определим плотность тока проводимости в массиве углеродных нанотрубок, следуя подходу, развитому в работах [17,18]. Представив электронный энергетический спектр (1) в виде ряда Фурье, запишем выражение для проекции плотности тока на ось Ox в бесстолкновительном приближении

$$j = -en \frac{d_x}{\hbar} \gamma_0 \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^{\infty} G_{r,s} \sin \left[r \frac{d_x}{\hbar} \left(A \frac{e}{c} + e \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt \right) \right], \quad (3)$$

где e — заряд электрона, n — концентрация электронов проводимости в массиве нанотрубок, φ — скалярный потенциал,

$$G_{r,s} = -r \frac{\delta_{r,s}}{\gamma_0} \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(r\xi) \exp \left[- \sum_{r=1}^{\infty} \theta_{r,s} \cos(r\xi) \right] d\xi}{\int_{-\pi}^{\pi} \exp \left[- \sum_{r=1}^{\infty} \theta_{r,s} \cos(r\xi) \right] d\xi}, \quad (4)$$

$\theta_{r,s} = \delta_{r,s} (k_B T)^{-1}$, k_B — постоянная Больцмана, T — температура, $\delta_{\alpha,s}$ — коэффициенты в разложении спектра (1) в ряд Фурье [19],

$$\delta_{r,s} = \frac{d_x}{\pi \hbar} \int_{-\pi \hbar / d_x}^{\pi \hbar / d_x} \Delta(p_x, s) \cos \left(r \frac{d_x}{\hbar} p_s \right) dp_x. \quad (5)$$

Заметим, что в формуле (3) плотность тока зависит от потенциалов \mathbf{A} и φ . Следовательно, могло бы возникнуть предположение о том, что изменение потенциалов на постоянную величину (что не приводит ни к каким физическим следствиям) обуславливает изменение плотности тока. Однако в действительности подобного не происходит, поскольку при выводе формулы (3) считалось, что при нулевом токе в отсутствие электромагнитного поля также имеют нулевое значение и потенциалы \mathbf{A} и φ , что фиксирует их выбор.

Подставив выражение для тока проводимости (3) в уравнение (2), получаем волновое уравнение, описывающее эволюцию поля в массиве нанотрубок,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} \right) + \eta \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^{\infty} G_{r,s} \sin \left[r \left(\Phi + \int_0^{\tau} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} d\tau \right) \right] = 0, \quad (6)$$

где $\Phi = A \frac{ed_x}{c\hbar}$ — проекция безразмерного векторного потенциала на ось Ox , $\psi = \varphi \frac{ed_x}{c\hbar}$, $\tau = \omega_0 t / \sqrt{\varepsilon}$ — безразмерное время, $\xi = x \omega_0 / c$ и $\zeta = z \omega_0 / c$ — безразмерные координаты, $\eta = n/n_0$, n_0 — равновесная концентрация электронов в отсутствие электромагнитного поля, ω_0 — величина с размерностью частоты, определяемая формулой

$$\omega_0 = 2 \frac{|e| d_x}{\hbar} \sqrt{\pi n_0 \gamma_0}. \quad (7)$$

Будем считать, что электрическое поле в системе вдоль оси Ox неоднородное. Неоднородность поля вдоль оси Ox может привести к перераспределению плотности электрического заряда. Поскольку полный заряд в объеме образца сохраняется, изменение плотности заряда определяется уравнением непрерывности [16]

$$\frac{\partial j}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (8)$$

где $\rho = en_0 \eta$ — объемная плотность заряда.

Подставив плотность тока (3) в (8), получаем уравнение, определяющее изменение концентрации электронов под действием поля электромагнитного импульса,

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \alpha \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^{\infty} G_{r,s} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \eta \sin \left[r \left(\Phi + \int_0^{\tau} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} d\tau \right) \right] \right\} = 0, \tag{9}$$

где $\alpha = \frac{\gamma_0 d}{\hbar c} \sqrt{\epsilon}$.

Перераспределение концентрации электронов сопровождается изменением распределения скалярного потенциала поля в системе. Из уравнений Максвелла [15,16] следует выражение, определяющее изменение скалярного потенциала,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \right) = \beta(\eta - 1), \tag{10}$$

где $\beta = \frac{\hbar c}{\epsilon d_x \gamma_0}$.

Таким образом, эволюция поля в системе с учетом перераспределения плотности заряда определяется системой уравнений (6), (9), (10).

Электрическое поле в массиве нанотрубок имеет вид $\mathbf{E}\{E, 0, 0\}$,

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} = E_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}, \tag{11}$$

где величина E_0 определяется по формуле

$$E_0 = -\frac{\hbar \omega_0}{\epsilon d_x \sqrt{\epsilon}}. \tag{12}$$

Как известно, измеряемой приборами физической величиной является интенсивность электромагнитного излучения, которая пропорциональна квадрату модуля вектора электрического поля (см., например, [20]). Величина, пропорциональная интенсивности поля, $I = |E|^2$ с учетом формулы (11) определяется как

$$I = I_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right)^2, \tag{13}$$

где $I_0 = E_0^2$ (см. (12)).

3. Численное моделирование и обсуждение результатов

Система уравнений (6), (9), (10) не имеет точного аналитического решения в общем случае, поэтому исследование процесса распространения электромагнитного импульса в массиве углеродных нанотрубок мы провели путем численного моделирования. Выбор начальных условий для расчета распределения электромагнитного поля в рассматриваемой системе обусловлен следующими соображениями. Уравнение (6) можно рассматривать как обобщение неоднородного уравнения sine-Gordon в случае, когда обобщенный потенциал разложен в ряд

Фурье. Как показали результаты численных расчетов, коэффициенты $G_{r,s}$ (см. (4)) быстро убывают с ростом индекса r ($|G_{1,s}| \gg |G_{2,s}|$ и т.д.) (также см., например, [5,6]).

Ограничиваясь одномерным приближением и оставляя единственное (первое) слагаемое в сумме по r , из уравнения (6) можно получить известное уравнение sine-Gordon (достаточно „близкое“ к исходному), которое имеет решение в виде бризера [21]. Отметим, что возможность распространения электромагнитных бризеров в твердых телах, в частности в полупроводниковых сверхрешетках (в одномерной модели, описываемой уравнением sine-Gordon), была теоретически установлена в работе [22]. Исходя из этого мы предположили, что и в рассматриваемой нами системе, описываемой уравнением (6), возможно распространение биполярных уединенных волн, по форме близких к бризерам уравнения sine-Gordon.

Будем полагать, что в момент $\tau = 0$ в массиве нанотрубок сформирован электромагнитный импульс в виде бризера, безразмерный векторный потенциал поля которого имеет вид

$$\Phi(\xi, \xi, \tau) = 4 \operatorname{arctg} \left[\left(\frac{1}{\Omega^2} - 1 \right)^{1/2} \frac{\sin \chi}{\cosh \mu} \right] \times \exp \left[-\left(\frac{\xi - \xi_0}{\lambda} \right)^2 \right], \tag{14}$$

где использованы следующие обозначения:

$$\chi = \Omega \frac{\tau - (\xi - \xi_0)u/v}{[1 - (u/v)^2]^{1/2}}, \tag{15}$$

$$\mu = \frac{(1 - \Omega^2)^{1/2}}{[1 - (u/v)^2]^{1/2}} [\tau u/v - (\xi - \xi_0)], \tag{16}$$

$\Omega = \omega_B/\omega_0$ — параметр, определяемый собственной частотой колебаний бризера ω_B ($\Omega < 1$), u/v — отношение скорости импульса u к скорости света в среде $v = c/\sqrt{\epsilon}$, ξ_0 и ξ_0 — безразмерные координаты импульса вдоль осей Ox и Oz в момент $\tau = 0$, λ — безразмерная полуширина импульса вдоль оси Ox .

Электрическое поле в массиве нанотрубок в соответствии с (11) и (14) определяется как $E = E_0 \Psi(\xi, \xi, \tau)$, где функция $\Psi(\xi, \xi, \tau)$ имеет вид

$$\Psi(\xi, \xi, \tau) = 4 \frac{(1 - \Omega^2)^{1/2}}{[1 - (u/v)^2]^{1/2}} \times \left[\frac{\cos \chi \cosh \mu - \beta(\Omega^{-2} - 1)^{1/2} \sin \chi \sinh \mu}{\cosh^2 \mu + (\Omega^{-2} - 1) \sin^2 \chi} \right] \times \exp \left[-\left(\frac{\xi - \xi_0}{\lambda} \right)^2 \right], \tag{17}$$

а величина E_0 вычисляется по формуле (12).

В выражении (14) первым множителем является бризер, распространяющийся со скоростью u . Наличие

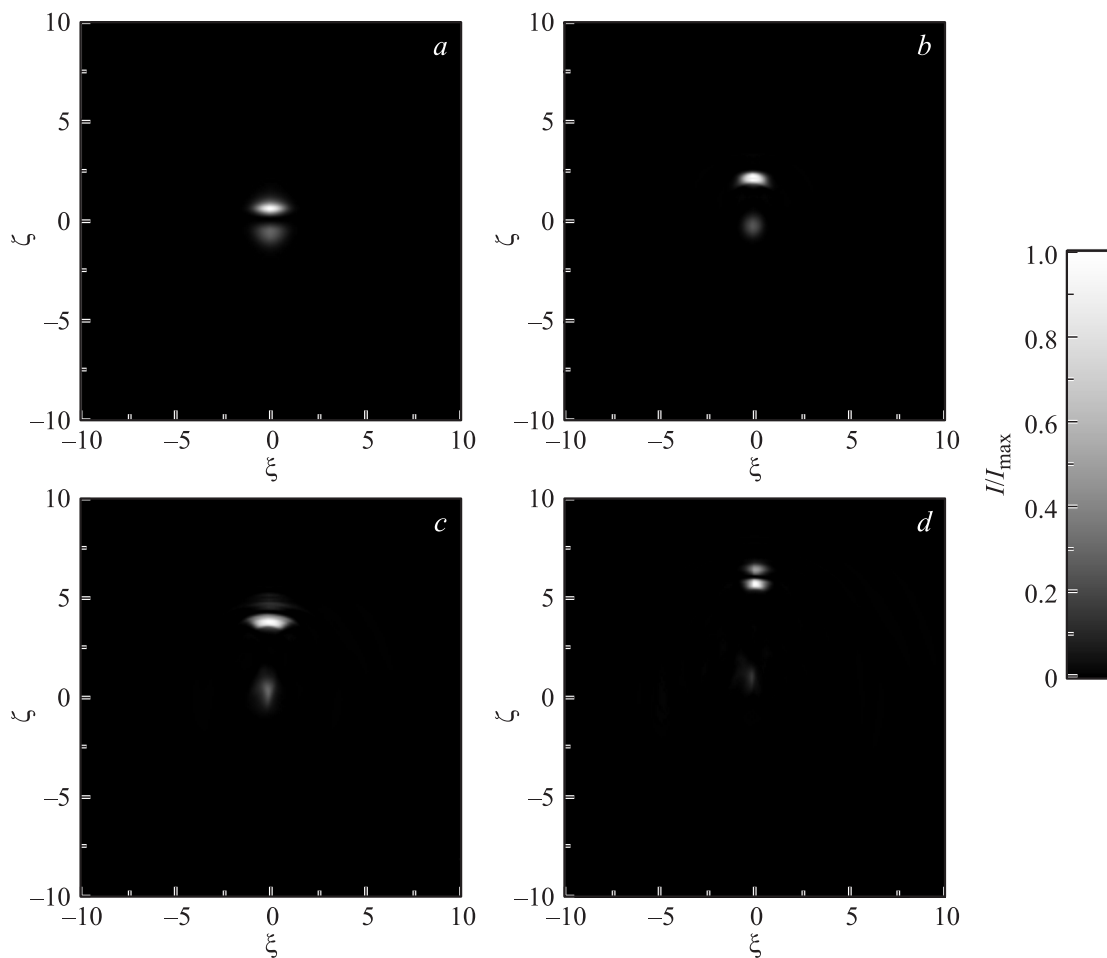


Рис. 1. Распределение интенсивности поля в массиве нанотрубок в различные моменты безразмерного времени $\tau = \omega_0 t / \sqrt{\epsilon}$ при распространении лазерного импульса. $\tau = 0.5$ (a), 3.5 (b), 6.5 (c) и 9.5 (d). По осям отложены безразмерные координаты $\xi = x\omega_0/c$ и $\zeta = z\omega_0/c$. Значениям отношения I/I_{\max} сопоставлена шкала оттенков серого: максимальным значениям интенсивности I поля соответствуют наиболее светлые участки, минимальным — наиболее темные, I_{\max} — максимальное значение I в момент τ .

второго сомножителя в виде гауссианы в начальных условиях (14) и (17) связано с тем, что гауссово распределение интенсивности, как известно, представляет большой интерес с прикладной точки зрения в различных областях физики и техники. Это объясняется минимальной дифракционной расходимостью гауссовых пучков, причем такие пучки весьма близки к реальности, являясь приближением, просто и полно описывающим свойства лазерного излучения [20,23].

Будем также полагать, что в начальный момент $\tau = 0$ в массиве углеродных нанотрубок концентрация электронов n равна n_0 , а скалярный потенциал ϕ равен нулю, т. е. имеют место начальные условия

$$\eta(\xi, \zeta, \tau) = 1, \tag{18}$$

$$\psi(\xi, \zeta, \tau) = 0. \tag{19}$$

Для численного решения уравнений (6), (9), (10) с начальными условиями (14)–(19) были использованы явные разностные схемы, описанные в [24,25]. Таким образом были найдены значения величин $\Phi = \Phi(\xi, \zeta, \tau)$, ис-

пользуемые для вычисления напряженности и интенсивности электрического поля по формулам (11), (13). Также найдено распределение величины $\eta = \eta(\xi, \zeta, \tau)$, определяющее концентрацию электронов $n = n_0\eta$ в образце.

Исследование распространения лазерных импульсов в массиве углеродных нанотрубок ($m, 0$) проведено нами при следующих значениях параметров рассматриваемой системы: $m = 7$, $\gamma_0 = 2.7 \text{ eV}$, $b = 1.42 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$, $d_x \approx 2.13 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$, $n_0 = 2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ [14], $T = 77 \text{ K}$, $\epsilon = 4$, $\omega_0 \approx 10^{14} \text{ s}^{-1}$ (см. (7)). Отметим, что применение использованного в настоящей работе бесстолкновительного приближения оправдано при рассмотрении процессов при временах t , не превышающих время релаксации $t_{\text{rel}} \cong 10^{-12} \text{ s}$; за это время свет проходит в среде расстояние $z = ct_{\text{rel}}/\sqrt{\epsilon} \cong 10^{-2} \text{ cm}$.

На рис. 1–3 представлены типичные результаты моделирования распространения биполярных лазерных импульсов в массиве углеродных нанотрубок. Для определенности взяты следующие начальные параметры:

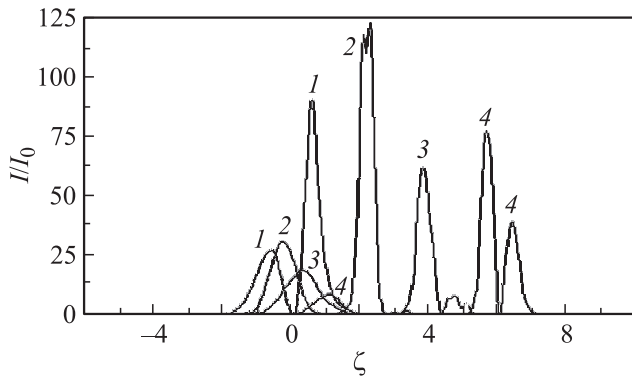


Рис. 2. Распределение интенсивности поля в массиве нанотрубок в различные моменты безразмерного времени τ в сечении, параллельном плоскости yOz и проходящем через центр импульса. 1 — $\tau = 0.5$, $I_{\max}/I_0 \approx 90.187$; 2 — $\tau = 3.5$, $I_{\max}/I_0 \approx 122.151$; 3 — $\tau = 6.5$, $I_{\max}/I_0 \approx 61.550$; 4 — $\tau = 9.5$, $I_{\max}/I_0 \approx 78.541$. $\xi = z\omega_0/c$ — безразмерная координата.

$u/v = 0.9$ (соответствует скорости $u = 1.35 \cdot 10^{10}$ см/с), $\Omega = 0.5$ (соответствует частоте собственных колебаний бризера $\omega_B = \Omega\omega_0 \approx 5.05 \cdot 10^{13}$ с $^{-1}$), $\lambda = 1$ (полуширина импульса вдоль оси нанотрубок Ox равна $L_x = \lambda c/\omega_0 \approx 3 \cdot 10^{-4}$ см).

На рис. 1 показано распределение интенсивности поля $I(\xi, \xi, \tau)$ в массиве нанотрубок в ходе распространения электромагнитного импульса. Интенсивность поля представлена отношением I/I_{\max} , различным значениям которого сопоставлены в линейной зависимости оттенки шкалы серого (I_{\max} — максимальное значение интенсивности в конкретный момент безразмерного времени $\tau = \omega_0 t/\sqrt{\epsilon}$). Наиболее светлые участки соответствуют максимальной интенсивности, а наиболее темные — минимальной. По осям на рис. 1 отложены безразмерные координаты $\xi = x\omega_0/c$ и $\xi = z\omega_0/c$. При выбранных выше значениях параметров системы единица по осям $O\xi$ и $O\xi$ соответствует расстояниям $\Delta x = \Delta z \approx 3 \cdot 10^{-4}$ см.

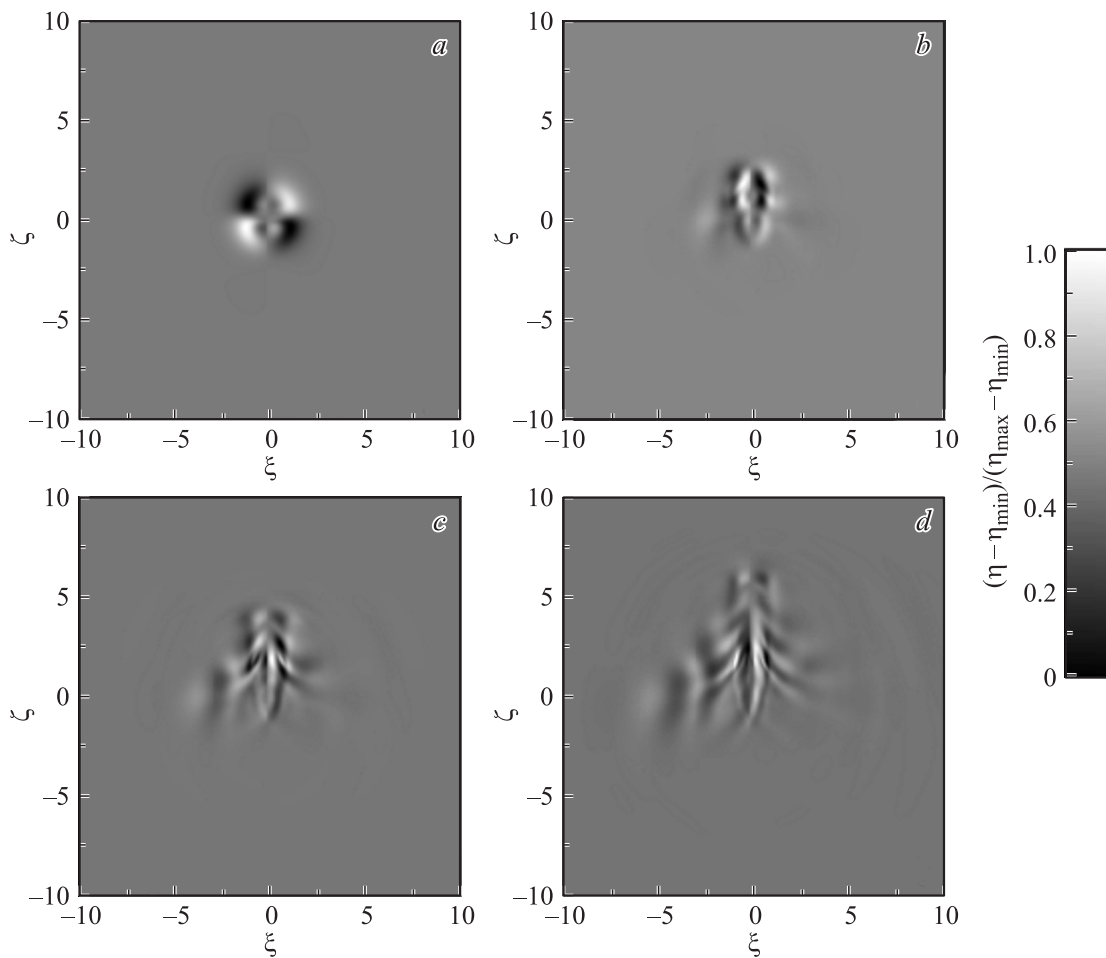


Рис. 3. Распределение концентрации электронов в массиве нанотрубок в различные моменты безразмерного времени $\tau = \omega_0 t/\sqrt{\epsilon}$ при распространении лазерного импульса. *a* — $\tau = 0.5$, $\eta_{\max} \approx 1.018$, $\eta_{\min} \approx 0.984$; *b* — $\tau = 3.5$, $\eta_{\max} \approx 1.042$, $\eta_{\min} \approx 0.956$; *c* — $\tau = 6.5$, $\eta_{\max} \approx 1.077$, $\eta_{\min} \approx 0.916$; *d* — $\tau = 9.5$, $\eta_{\max} \approx 1.099$, $\eta_{\min} \approx 0.929$. Значениям отношения $(\eta - \eta_{\min})/(\eta_{\max} - \eta_{\min})$ сопоставлена шкала оттенков серого: максимальным значениям η соответствуют наиболее светлые участки, минимальным — наиболее темные. η_{\max} , η_{\min} — максимальное и минимальное значения η в момент τ .

На рис. 2 представлено распределение интенсивности $I(\xi, \xi, \tau)$ поля в массиве нанотрубок в плоскости yOz , проходящей через центр импульса в те же моменты времени τ , что и на рис. 1. Рис. 2 позволяет легко проследить характер изменения формы импульса и максимального значения I_{\max} интенсивности поля.

Из рис. 1 и 2 видно, что двумерные электромагнитные импульсы распространяются в среде массива нанотрубок устойчиво, не подвергаясь существенному расплыванию. Таким образом, учет неоднородности распределения электрического поля вдоль оси нанотрубок не влияет на устойчивость распространения предельно коротких импульсов, а приводит только к некоторому изменению их формы.

По мере движения импульсов в образце происходит перераспределение плотности заряда. На рис. 3 представлено распределение концентрации электронов $n = n_0\eta$ в массиве нанотрубок.

Из рис. 3 видно, что распределение плотности заряда представляет собой локализованную в пространстве совокупность областей повышенной и пониженной концентрации электронов. Светлые участки на рис. 3 соответствуют областям с повышенной концентрацией электронов, темные участки представляют собой области с пониженной концентрацией электронов.

Особенности распространения электромагнитных импульсов, описанные выше, могут быть учтены при создании элементной базы нанoeлектроники. Эффект перераспределения плотности заряда, индуцированный прохождением лазерного импульса, может быть положен в основу создания химических сенсоров на основе углеродных нанотрубок.

4. Заключение

Сформулируем основные результаты работы.

1. Впервые получена система уравнений, описывающая эволюцию поля и плотности заряда при распространении электромагнитных импульсов в среде массива углеродных полупроводниковых нанотрубок при учете неоднородности поля вдоль оси нанотрубок (см. уравнения (6), (9), (10)).

2. В результате численного моделирования впервые установлено, что в массиве углеродных нанотрубок возможно устойчивое распространение биполярных электромагнитных импульсов.

3. Электромагнитный импульс, распространяющийся в среде массива нанотрубок, вызывает перераспределение концентрации электронов в образце.

Список литературы

[1] И. Харрис. Углеродные нанотрубы и родственные структуры. Новые материалы XXI века. Техносфера, М. (2003). 336 с.
 [2] С.А. Максименко, Г.Я. Слепян. РЭ **47**, 261 (2002).

[3] S.A. Maksimenko, G.Ya. Slepian. Handbook of nanotechnology. Nanometer structure: theory, modeling, and simulation. SPIE Press, Bellingham. (2004). P. 145.
 [4] С.А. Ахманов, В.А. Выслоух, А.С. Чиркин. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. Наука, М. (1988). 309 с.
 [5] М.В. Белоненко, Е.В. Демущкина, Н.Г. Лебедев. J. Rus. Laser. Res. **27**, 457 (2006).
 [6] М.Б. Белоненко, Е.В. Демущкина, Н.Г. Лебедев. ФТТ **50**, 367 (2008).
 [7] М.Б. Белоненко, Е.В. Демущкина, Н.Г. Лебедев. ЖТФ **78**, 7, 1 (2008).
 [8] М.Б. Белоненко, Е.В. Демущкина, Н.Г. Лебедев. Хим. физика **27**, 97 (2008).
 [9] М.В. Белоненко, Н.Г. Лебедев, Е.Н. Nelidina. Phys. Wave Phenom. **19**, 39 (2011).
 [10] М.Б. Белоненко, С.Ю. Глазов, Н.Г. Лебедев, Н.Е. Мещерякова. ФТТ **51**, 1657 (2009).
 [11] И.Л. Боголюбовский, В.Г. Маханьков. // Письма в ЖЭТФ **25**, 120 (1977).
 [12] М.Б. Белоненко, Н.Г. Лебедев, А.С. Попов. Письма в ЖЭТФ **91**, 506 (2010).
 [13] М.Б. Белоненко, Н.Г. Лебедев, А.С. Попов. Письма в ЖТФ **37**, 3, 51 (2011).
 [14] М.Б. Белоненко, С.Ю. Глазов, Н.Е. Мещерякова. ФТП **44**, 1248 (2010).
 [15] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Наука, М. (1982). 621 с.
 [16] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. Наука, М. (1973). 504 с.
 [17] Э.М. Эпштейн. // ФТТ **19**, 3456 (1977).
 [18] Э.М. Эпштейн. // ФТП **14**, 2422 (1980).
 [19] Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). Наука, М. (1978). 832 с.
 [20] А.Н. Пихтин. Оптическая и квантовая электроника. Выш. шк., М. (2001). 573 с.
 [21] Yu.S. Kivshar, V.A. Malomed. Rev. Mod. Phys. **61**, 763 (1989).
 [22] С.В. Крючков, Г.А. Сыродоев. ФТП **24**, 913 (1990).
 [23] А.М. Гончаренко. Гауссовы пучки света. КомКнига, М. (2005). 144 с.
 [24] Н.Н. Калиткин. Численные методы. Наука, М. (1978). 512 с.
 [25] С. Кунин. Вычислительная физика. Мир, М. (1992). 518 с.