

03
Электроконвекция слабопроводящей жидкости в постоянном электрическом поле

© В.А. Ильин

Пермский государственный национальный университет,
 614990 Пермь, Россия
 e-mail: ilin1@psu.ru

(Поступило в Редакцию 11 января 2012 г. В окончательной редакции 23 апреля 2012 г.)

Изучены возникновение электроконвекции и нелинейные течения неизотермической слабопроводящей жидкости в постоянном электрическом поле горизонтального конденсатора. Рассмотрены жидкости, в которых основным механизмом зарядообразования является электрокондуктивный механизм, обусловленный зависимостью подвижности зарядов от температуры. С помощью метода Галеркина получена система нелинейных дифференциальных уравнений для амплитуд пространственных мод, на основе которой обнаружены и исследованы стационарные, периодические и хаотические нелинейные режимы движения жидкости. Обнаружены сценарии перехода к хаотическим течениям: через перемежаемость и субгармонический каскад. Изучены взаимодействие электрокондуктивного и термогравитационного механизмов конвекции, а также гистерезисные переходы между монотонным и колебательными режимами. Проведено качественное сравнение с экспериментом.

Введение

Периодические и хаотические колебания диссипативных структур в системах, далеких от равновесия [1–5], ярко проявляются в жидкостях, находящихся в электромагнитных полях [6–11]. Примерами таких явлений служит поведение жидких диэлектриков [6,7] и слабопроводящих жидкостей [8,9] в электрическом поле, а также ферроколлоидов в электромагнитных полях [10,11]. Важная особенность явлений самоорганизации заключается в обратном влиянии гидродинамических течений на распределение зарядов или частиц в жидкости [4,5,9]. Для характеристики поведения и течений слабопроводящей жидкости может применяться модель, в которой среда характеризуется плотностью объемного заряда, который зависит от дрейфа зарядов (проводимости среды) и адвективного переноса заряда потоком жидкости [9,12–14]. При таком подходе поведение слабопроводящей жидкости и слабоконцентрированной магнитной жидкости в электрическом поле может быть описано с единых позиций. Кулоновские силы, возникающие в объеме жидкости благодаря неоднородности электропроводности, могут привести жидкость в движение.

Предварительные результаты изучения электроконвекции и перехода к хаосу течений слабопроводящих жидкостей представлены в [8]. В настоящей работе рассматриваются устойчивость и нелинейная стадия индуцируемых за счет тепловой неоднородности проводимости среды течений такой жидкости, а также проведено качественное сравнение с экспериментом [15].

1. Постановка задачи

Рассмотрим плоский горизонтальный слой неоднородно нагретой вязкой несжимаемой слабопроводящей

жидкости, находящейся в постоянном электрическом поле \mathbf{E} и поле тяжести \mathbf{g} . Ось x направлена вдоль нижней границы слоя, ось z — перпендикулярно границам слоя. Идеально тепло- и электропроводные пластины конденсатора расположены при $z = 0, h$ (h — толщина слоя) и нагреты до разной температуры $T(0) = \Theta, T(h) = 0$. Здесь T — температура, отчитываемая от некоторого среднего значения, Θ — характерная разность температур. Случай $\Theta > 0$ соответствует нагреву снизу. Потенциал поля верхней границы равен нулю: $\varphi(h) = 0$, потенциал нижней — $\varphi(0) = U$, здесь U — напряжение.

Поведение слабопроводящей жидкости в электрическом поле будем изучать в рамках электрогидродинамического приближения [12–14]. В настоящей работе рассматривается только один из возможных механизмов зарядообразования — электрокондуктивный, связанный с неодинаковой электропроводностью жидкости вблизи горячего и холодного электродов. При небольших разностях температур между границами слоя неоднородность электропроводности слабая. Будем считать, что электропроводность жидкости линейно зависит от температуры: $\sigma = \sigma_0(1 + \beta_\sigma T)$, где β_σ — положительный температурный коэффициент электропроводности, так что электропроводность увеличивается с ростом температуры. Такая зависимость соответствует первым членам разложения функции $\sigma(T)$ в ряд Тейлора около средней температуры. То есть в этом случае действует электрокондуктивный механизм неустойчивости.

В общем виде электрическая сила, действующая на единицу объема диэлектрической жидкости, может быть записана в виде

$$\mathbf{f}_e = \rho_e \mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \nabla \varepsilon + \frac{1}{2} \nabla \left(\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} E^2 \right). \quad (1)$$

Здесь ρ_e — свободный заряд единицы объема, ε, ρ — диэлектрическая проницаемость и плотность жидкости.

Последнее слагаемое имеет градиентный вид и приводит лишь к переопределению давления в уравнении Навье–Стокса. В задаче рассматриваются жидкости, в которых диэлектрическая проницаемость практически не зависит от температуры, т.е. вторая (диэлектрофоретическая) часть этой силы, связанная с неоднородностью диэлектрической проницаемости ϵ , не существенна (равна нулю). Такой подход оправдан физическими свойствами используемых в экспериментах жидкостей, для которых электропроводность намного сильнее зависит от температуры, чем диэлектрическая проницаемость $\beta_\sigma \gg \beta_\epsilon$. Движение в этом случае может вызвать только первая (кулоновская) часть силы, связанная со свободным объемным электрическим зарядом.

В работе используется электрогидродинамическое приближение, в котором магнитные эффекты считаются пренебрежимо малыми по сравнению с электрическими [14]. Кроме того, предположим, что максимальная разность потенциалов на пластинах конденсатора не превышает критического значения U_* , начиная с которого существенно влияние инжекции на движение жидкости. В уравнении теплопроводности пренебрежем вязкой диссипацией и джоулевым разогревом. Коэффициенты динамической вязкости и температуропроводности считаем постоянными. Рассмотрение проведено в рамках приближения Буссинеска. Возникновение конвекции вызвано пространственной неоднородностью плотности жидкости ρ и электропроводности жидкости σ . Система уравнений конвекции слабопроводящей жидкости в гравитационном и электрическом полях имеет вид

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \right) &= -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} + \rho_e \mathbf{E}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)T &= \chi \Delta T, \quad \text{div} \mathbf{v} = 0, \\ \text{div}(\epsilon \mathbf{E}) &= \rho_e, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \\ \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \text{div}(\sigma \mathbf{E}) + (\mathbf{v}\nabla)\rho_e &= 0, \\ \rho &= \rho_0(1 - \beta T), \quad \sigma = \sigma_0(1 + \beta_\sigma T). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{v} = (u, v, w)$, p, T — поля скорости, давления и температуры, η — динамическая вязкость, χ, β — коэффициенты температуропроводности и теплового расширения жидкости.

Рассмотрим случай свободных недеформируемых изотермических границ слоя, на которых обращаются в ноль вертикальная компонента скорости, а также касательная компонента тензора вязких напряжений (штрихом обозначена производная по z):

$$\begin{aligned} z = 0: \quad w = w'' = 0, \quad T = \Theta, \quad \varphi = U, \\ z = h: \quad w = w'' = 0, \quad T = 0, \quad \varphi = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Как правило, $\beta, \beta_\sigma \sim 10^{-2} \text{ K}^{-1}$, поэтому в обычных условиях при умеренном нагреве ($\sim 10 \text{ K}$) $\beta_\sigma \Theta < 1$.

Теоретические исследования электротермической конвекции в постоянных полях, использующие условие $\beta_\sigma \Theta \ll 1$, находятся в хорошем согласии с экспериментом.

В задаче конвекция возникает благодаря действию двух механизмов неустойчивости: термогравитационного и электрокондуктивного. Электрокондуктивный механизм приводит к накоплению объемного электрического заряда, который посредством кулоновской силы взаимодействует с внешним электрическим полем и может приводить жидкость в движение даже в невесомости.

Используем безразмерные переменные на основе масштабов: времени — $[t] = \rho_0 h^2 / \eta$, расстояния — $[r] = h$, скорости — $[v] = \chi / h$, температуры — $[T] = \Theta$, потенциала — $[\varphi] = U$, поля — $[E] = U / h$, давления — $[p] = \eta \chi / h^2$, плотности заряда — $[\rho_e] = \epsilon U / h^2$. Тогда система уравнений электроконвекции слабопроводящей жидкости в безразмерном виде запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\text{Pr}} (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \text{R}_\sigma \sigma_e \mathbf{E} + \text{Ra} T \mathbf{y}, \\ \text{Pr} \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)T &= \Delta T, \quad \text{div} \mathbf{v} = 0, \\ \text{Pr}_e \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\text{Pr}_e}{\text{Pr}} (\mathbf{v}\nabla)\rho_e + \text{div}(\sigma \mathbf{E}) &= 0, \\ \text{div}(\mathbf{E}) &= \rho_e, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \\ \sigma &= 1 + S_\sigma T, \quad \mathbf{y} = (0, 0, 1). \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные условия примут вид

$$\begin{aligned} z = 0: \quad w = w'' = 0, \quad T = 1, \quad \varphi = 1, \\ z = 1: \quad w = w'' = 0, \quad T = 0, \quad \varphi = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Система уравнений (4) содержит следующие безразмерные параметры: тепловое число Рэлея Ra , электрический аналог числа Галилея R_σ , число Прандтля Pr , электрическое число Прандтля Pr_e и S_σ — малый параметр, характеризующий неоднородность электропроводности жидкости:

$$\begin{aligned} \text{Ra} &= \frac{\rho_0 g \beta \Theta h^3}{\eta \chi}, \quad \text{R}_\sigma = \frac{\epsilon U^2}{\eta \chi}, \quad \text{Pr} = \frac{\eta}{\chi \rho_0}, \\ \text{Pr}_e &= \frac{\epsilon \eta}{h^2 \rho_0 \sigma_0}, \quad S_\sigma = \beta_\sigma \Theta, \quad \text{Ra}_\sigma = S_\sigma \text{R}_\sigma. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь Ra_σ — электрический аналог числа Рэлея, он меняет знак при изменении направления градиента температуры. Электрическое число Прандтля характеризует отношение времени релаксации заряда и гидродинамического времени в системе. Когда $\text{Pr}_e \ll 1$, объемный заряд релаксирует мгновенно; при $\text{Pr}_e \gg 1$ заряд вморожен в жидкость и переносится благодаря ее движению; при $\text{Pr}_e \sim 1$ времена релаксации заряда соизмеримы с характерными временами затухания вязких возмущений.

Рассмотрим состояние механического равновесия, для которого скорость жидкости равна нулю $v_0 = 0$, все

остальные переменные зависят от поперечной координаты, а поле и плотность заряда еще и от времени: $T = T_0(z)$, $p = p_0(z)$, $\mathbf{E} = (0, 0, E_0)$, $E = E_0(z, t)$, $\varphi = \varphi_0(z, t)$, $\rho_e = \rho_{e0}(z, t)$. Это состояние определяется системой уравнений:

$$\begin{aligned} -\nabla p_0 + \text{Ra}T_0\gamma + R_\sigma\rho_{e0}\mathbf{E}_0 &= 0, \quad \Delta T_0 = 0, \\ \text{div}\mathbf{E}_0 &= \rho_{e0}, \quad \mathbf{E}_0 = -\Delta\varphi_0 \\ \text{Pr}_e \frac{\partial\rho_{e0}}{\partial t} + \text{div}(\sigma\mathbf{E}_0) &= 0, \\ \sigma_0 &= 1 + S_\sigma T_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Из первого уравнения получаем следующее условие равновесия:

$$R_\sigma\nabla\rho_{e0} \times \mathbf{E}_0 + \text{Ra}\nabla T_0 \times \gamma = 0, \quad (8)$$

из которого следует, что равновесие возможно, когда векторы $\nabla\rho_{e0}$, \mathbf{E}_0 , ∇T_0 и γ параллельны друг другу [14].

Равновесное распределение температуры и с точностью до слагаемых второго порядка малости по степени неоднородности электропроводности S_σ распределения электрического поля, потенциала и плотности заряда имеют вид

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 - z, \quad E_0 = 1 + S_\sigma \left(z - \frac{1}{2} \right), \\ \varphi_0 &= (1 - z) - \frac{S_\sigma}{2} (z^2 - z), \quad \rho_{e0} = S_\sigma. \end{aligned} \quad (9)$$

Поле в состоянии равновесия содержит два слагаемых: $E_0 = E_{00} + S_\sigma E_{01}$. Первое слагаемое не зависит от S_σ и характеризует поле между проводящими пластинами в отсутствие жидкости (внешнее поле). Второе слагаемое $S_\sigma E_{01}$ связано с перераспределением заряда в жидкости $\rho_{e0} = S_\sigma\rho_{e01}$, возникающим из-за неоднородной проводимости среды. Возмущения силы Кулона в связи с этим можно записать в виде $f'_e = R_\sigma(E_{00}\rho_e + S_\sigma(E_{01}\rho_e + E'\rho_{e01}))$, где E' — возмущения поля.

Малость параметра $S_\sigma \ll 1$ дает возможность использовать безындукционное приближение ($f'_e = R_\sigma E_{00}\rho_e$) [14], в котором в расчет берется только внешнее электрическое поле (по сравнению с ним пренебрегается электрическим полем, связанным с перераспределением заряда в жидкости).

Заряд представим в виде $\rho_e = S_\sigma\rho'_e$ (затем штрих опустим). Тогда система уравнений (4) переписется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\text{Pr}}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= -\nabla p + \Delta\mathbf{v} + \text{Ra}_\sigma\rho_e\gamma + \text{Ra}T\gamma, \\ \text{Pr} \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)T &= \Delta T, \quad \text{div}\mathbf{v} = 0, \\ \text{Pr}_e \frac{\partial\rho_e}{\partial t} + \frac{\text{Pr}_e}{\text{Pr}}(\mathbf{v}\nabla)\rho_e + \rho_e + \frac{\partial T}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Несмотря на малость неоднородности электропроводности S_σ , связанной с температурой, электрический аналог числа Рэлея $\text{Ra}_\sigma = S_\sigma R_\sigma$ остается конечным, так как параметр R_σ большой.

2. Восьмимодовая модель электроконвекции слабопроводящей жидкости

Представим поля скорости, температуры, давления и плотности заряда в виде \mathbf{v} , $T = T_0 + \vartheta$, $p = p_0 + p'$, $\rho_e = \rho_{e0} + \rho'_e$ (штрихи означают отклонения величин от равновесных значений, далее штрихи опускаем). Плоские и пространственные возмущения одинаково опасны, поскольку задача изотропна в плоскости слоя, поэтому ограничимся рассмотрением плоских возмущений $\mathbf{v} = (u, 0, w)$, $\partial/\partial y = 0$. Учтем равновесное решение системы (10). Граничные условия для возмущений примут вид

$$z = 0, 1: \quad w = w'' = \vartheta = 0. \quad (11)$$

Введем функцию тока для скорости

$$w = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad u = -\frac{\partial\psi}{\partial z}. \quad (12)$$

В терминах функции тока ψ уравнения для возмущений примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta\psi + \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \Delta\psi \right) \\ = \text{Ra}_\sigma \frac{\partial\rho_e}{\partial x} + \text{Ra} \frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \Delta^2\psi, \\ \text{Pr} \frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\vartheta}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial\vartheta}{\partial x} = \Delta\vartheta + \frac{\partial\psi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{Pr}_e \frac{\partial\rho_e}{\partial t} + \frac{\text{Pr}_e}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\rho_e}{\partial z} - \frac{\psi}{\partial z} \frac{\partial\rho_e}{\partial x} \right) + \rho_e + \frac{\partial\vartheta}{\partial z} = 0$$

с соответствующими граничными условиями

$$z = 0, 1: \quad \psi = \psi'' = \vartheta = 0. \quad (14)$$

Для решения системы уравнений (13) с граничными условиями (14) будем использовать метод Галеркина, применяя следующие аппроксимации полей функции тока ψ и температуры ϑ , удовлетворяющие граничным условиям, и плотности заряда ρ_e :

$$\begin{aligned} \psi &= (A_1(t) \sin \pi z + A_2(t) \sin 2\pi z) \sin \pi k x, \\ \vartheta &= (B_1(t) \sin \pi z + B_2(t) \sin 2\pi z) \cos \pi k x + C(t) \sin 2\pi z, \\ \rho_e &= (D_1(t) \cos \pi z + D_2(t) \cos 2\pi z) \cos \pi k x \\ &\quad + E(t) \cos 2\pi z. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь k — волновое число, характеризующее периодичность возмущений в плоскости слоя (из него вынесено число π); $A_1, A_2, B_1, B_2, D_1, D_2, E, C$ — амплитуды, характеризующие различные пространственные моды. В разложениях (15) присутствуют слагаемые с разной четностью по z . Это связано с тем, что в уравнении для эволюции возмущений заряда присутствует слагаемое,

содержащее первую производную по z , которое обуславливает перераспределение энергии между модами различной четности.

Коэффициенты разложения в ряд Фурье (15) (амплитуды) определяются из интегральных условий, выражающих ортогональность невязки к каждой базисной функции. Подставим разложения (15) в систему (13), и после проведения процедуры ортогонализации получим систему восьми обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial t} &= -\pi^2(1+k^2)A_1 + \frac{k}{\pi(1+k^2)} RaB_1 \\ &\quad - \frac{4k}{3\pi^2(1+k^2)} Ra_\sigma D_2, \\ \frac{\partial A_2}{\partial t} &= -\pi^2(4+k^2)A_2 + \frac{k}{\pi(4+k^2)} RaB_2 \\ &\quad + \frac{8k}{3\pi^2(4+k^2)} Ra_\sigma D_1, \\ Pr \frac{\partial B_1}{\partial t} &= -\pi^2(1+k^2)B_1 + \pi k A_1 + \pi^2 k A_1 C, \\ Pr \frac{\partial B_2}{\partial t} &= -\pi^2(4+k^2)B_2 + \pi k A_2, \\ Pr \frac{\partial C}{\partial t} &= -4\pi^2 C - \frac{\pi^2 k}{2} A_1 B_1, \\ Pr_e \frac{\partial D_1}{\partial t} &= -D_1 + \frac{\pi^2 k Pr_e}{Pr} A_1 E - \pi B_1, \\ Pr_e \frac{\partial D_2}{\partial t} &= -D_2 - 2\pi B_2, \\ Pr_e \frac{\partial E}{\partial t} &= -E - \frac{\pi^2 k Pr_e}{2Pr} A_1 D_1 - 2\pi C. \end{aligned} \quad (16)$$

Перемасштабируя переменные

$$\begin{aligned} t \rightarrow \frac{Pr}{\pi^2(1+k^2)} t, \quad A_1 \rightarrow \frac{\sqrt{2}(1+k^2)}{k} X, \\ A_2 \rightarrow \frac{\sqrt{2}(1+k^2)}{k} V, \\ B_1 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\pi} Y, \quad B_2 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\pi} W, \quad C \rightarrow \frac{Z}{\pi}, \\ D_1 \rightarrow \sqrt{2}S, \quad D_2 \rightarrow 2\sqrt{2}T, \quad E \rightarrow U, \end{aligned} \quad (17)$$

получим восьмимодовую модель электроконвекции (точка над переменными обозначает производную по времени):

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -gS + XU - gY, \quad \dot{T} = -gT - gW, \\ \dot{U} &= -gU - XS - 2gZ, \\ \dot{V} &= Pr(-dV + (rW + eS)/d), \quad \dot{W} = -dW + V, \\ \dot{X} &= Pr(-X + rY - eT), \quad \dot{Y} = -Y + X + XZ, \\ \dot{Z} &= -bZ - XY. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь введены следующие новые параметры:

$$\begin{aligned} r &= \frac{Ra}{Ra_0}, \quad e = \frac{Ra_\sigma}{Ra_{\sigma 0}}, \quad Ra_0 = \frac{\pi^4(1+k^2)^3}{k^2}, \\ Ra_{\sigma 0} &= \frac{3\pi^4(1+k^2)^3}{8k^2}, \\ b &= \frac{4}{1+k^2}, \quad d = \frac{4+k^2}{1+k^2}, \quad g = \frac{Pr}{\pi^2(1+k^2)Pr_e}, \end{aligned} \quad (19)$$

где r, e — нормированные тепловое и электрическое числа Рэлея; $Ra_0, Ra_{\sigma 0}$ — критические числа, при которых начинается термогравитационная или электрокондуктивная конвекция соответственно; b, d — геометрические параметры, зависящие от волнового числа; g — параметр, определяющий отношение времени релаксации тепловых возмущений и возмущений заряда. Здесь электрическое число Рэлея может быть как положительным, так и отрицательным, так как по определению (6) линейно зависит от разности температур между обкладками конденсатора и при нагреве сверху будет отрицательным.

Динамическая система (18) является обобщением маломодовой модели Лоренца на случай электроконвекции слабопроводящей жидкости с электрокондуктивным механизмом зарядообразования в электрическом поле.

3. Случай мгновенной релаксации заряда

В случае $Pr_e = 0$ ($g \rightarrow \infty$), когда время релаксации заряда много меньше характерного гидродинамического времени (заряд мгновенно рассасывается в жидкости), из системы (18) получается пятимодовая модель электроконвекции:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= Pr(-dV + (rW - eY)/d), \quad \dot{W} = -dW + V, \\ \dot{X} &= Pr(-X + rY + eW), \\ \dot{Y} &= -Y + X + XZ, \quad \dot{Z} = -bZ - XY. \end{aligned} \quad (20)$$

Исследуем линейную устойчивость равновесия пятимодовой модели с помощью метода малых возмущений. Линеаризуем систему (20), отбросив нелинейные слагаемые. Мода Z затухнет со временем, так как

$$\dot{Z} = -bZ, \quad Z \sim \exp(-bt), \quad b > 0. \quad (21)$$

Решение для амплитуд будем искать в виде экспонент, зависящих от времени $\sim \exp(\lambda t)$, где λ — инкремент возмущений. Для инкрементов возмущений получим уравнение

$$\begin{aligned} \lambda^4 + \lambda^3(d+1)(Pr+1) + \lambda^2((d+1)^2Pr - r(d+1)Pr/d \\ + d(1+Pr^2)) + \lambda Pr(Pr+1)(d(d+1) - r(d^2+1)/d) \\ + Pr^2(r^2 + e^2 - r(d^3+1))/d + Pr^2 d^2 = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Инкремент возмущений, вообще говоря, комплексный: $\lambda = \lambda_r + i\omega$. Здесь λ_r — собственно инкремент, а ω — частота осцилляций. Если $\omega = 0$, то возмущения меняются со временем монотонным образом: при $\lambda_r > 0$ нарастают, при $\lambda_r < 0$ затухают. Если $\omega \neq 0$, знак λ_r определяет поведение осциллирующих возмущений. Граница монотонной устойчивости может быть найдена из условия равенства нулю инкремента $\lambda_r = 0$, $\omega = 0$; этим условием определяется критическое значение электрического числа Рэлея.

Граница колебательной неустойчивости находится из условий $\lambda_r = 0$, $\omega \neq 0$, которые определяют критическое электрическое число Рэлея и частоту нейтральных колебаний. Приравняв нулю вещественную и мнимую части уравнения (22), на границе устойчивости получим два уравнения

$$\omega^4 - \omega^2((d+1)^2 Pr - r(d+1)Pr/d + d(1+Pr^2)) + Pr^2(r^2 + e^2 - r(d^3 + 1)) / d + Pr^2 d^2 = 0, \quad (23)$$

$$\omega^3(d+1) - \omega Pr(d(d+1) - r(d^2 + 1)/d) = 0. \quad (24)$$

Из уравнения (24) находим соотношения для частоты колебаний

$$\omega = 0, \quad \omega^2 = Pr(d(d+1) - r(d^2 + 1)/d) / (d+1), \quad (25)$$

где нулевое решение соответствует монотонной моде, ненулевое — колебательной.

Подставим нулевое решение для частоты в уравнение (23) и найдем уравнение для границы монотонной неустойчивости

$$e^2 = r(d^3 + 1) - r^2 - d^3. \quad (26)$$

Монотонная мода существует тогда, когда электрическое число Рэлея вещественно, т.е. когда $e^2 \geq 0$. Это условие выполняется, когда $1 < r < d^3$.

При подогреве сверху ($r < 0$), а также в случае невесомости ($r = 0$) электрическое число e — мнимая величина, поэтому в этом случае отсутствует монотонная мода, и неустойчивость возникает колебательным образом. При подогреве сверху и в невесомости термогравитационная конвекция отсутствует, и возникновение движения жидкости возможно только благодаря электрокондуктивному механизму неустойчивости.

Подставим ненулевое решение для частоты (25) в уравнение (23) и найдем границу колебательной неустойчивости. Для случая невесомости ($r = 0$) электрическое число Рэлея и частота нейтральных колебаний имеют вид

$$e^2 = d^2(Prd^2 + Pr + d + dPr^2)/Pr, \quad (27)$$

$$\omega^2 = Prd. \quad (28)$$

Минимизируя уравнение (27) по волновому числу, которое содержится в геометрическом параметре d , можно

Таблица 1. Значения параметров в минимуме нейтральных кривых колебательной неустойчивости в зависимости от числа Прандтля: критические значения волнового числа k_c , электрического числа Рэлея Ra_{sc} , его нормированного аналога e , а также значения циклической ω и линейной частот ν ($\nu = \omega/2\pi$)

Pr	k_c	Ra_{sc}	e	ω	ν
10	0.9792	4162.63	14.54	5.03	0.8
50	0.9645	8389.81	29.71	11.3	1.8
100	0.9622	11697.07	41.51	15.99	2.55
150	0.9614	14256.98	50.63	19.59	3.12
200	0.961	16422.65	58.34	22.63	3.6
300	0.9606	20064.63	71.3	27.71	4.41
400	0.9604	23140.35	82.25	32.00	5.09

получить значения критических значений — волнового и электрического чисел в минимуме нейтральных кривых колебательной неустойчивости. Результаты расчета значений этих величин, а также частота нейтральных колебаний, вычисленная по формуле (28), для разных значений числа Прандтля представлены в табл. 1.

Исследуем нелинейные надкритические режимы электроконвекции на основе пятимодовой модели (20) в случае невесомости ($r = 0$).

Система обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд (20) интегрировалась численно методом пошагового интегрирования Рунге–Кутты–Мерсона 4-го порядка точности. Полученные в результате интегрирования реализации временной эволюции амплитуды анализировались с помощью быстрого преобразования Фурье, и определялся спектральный состав отклика конвективной системы на электрическое поле. Хаотический режим определялся по спектру Фурье (у этого режима спектр сплошной).

Расчеты проводились для числа Прандтля $Pr = 100$, порядок которого соответствует реальным значениям для слабопроводящих жидкостей, в которых действует электрокондуктивный механизм электроконвекции (трансформаторные, конденсаторные и кукурузные масла). Волновое число $k = 0.962$ бралось в минимуме нейтральной кривой в постоянном поле (см. табл. 1). Ему соответствуют значения геометрических параметров $b = 2.077$, $d = 2.56$. Все вычисления проводились для этих значений геометрических параметров. Для интегрирования дифференциальных уравнений в качестве начальных условий либо брались следующие значения амплитуд: $X = 0$, $Y = 0.5$, $Z = 0$, $V = 0$, $W = 0$, либо осуществлялась процедура продолжения по параметру.

Существенным отличием модели (20) от модели Лоренца является то, что в постоянном электрическом поле равновесие жидкости теряет устойчивость колебательным образом. Частота нейтральных колебаний в минимуме нейтральной кривой $\nu_* = 2.55$, критическое электрическое число $e_* = 41.51$. В подкритической области $e < e_*$ возмущения затухают колебательным

образом. При превышении порога устойчивости $e > e_*$ мягко возбуждаются периодические вторичные течения, в результате эволюции система выходит на установившийся колебательный режим с некоторой частотой. Зависимость максимального значения первой амплитуды функции тока X_m от электрического числа представлена на рис. 1, *a*.

Нелинейный характер системы уравнений (20) приводит к тому, что в спектре нормированной первой амплитуды функции тока X кроме собственной частоты конвективной системы $\nu_0 = f(e)$ присутствуют высшие гармоники. Основная частота ν_0 и ее гармоника $\nu_1 = 3\nu_0$ нелинейно растут с увеличением амплитуды электрического поля e (рис. 1, *b*).

С ростом электрического числа периодический режим может смениться режимом переходного или метаста-

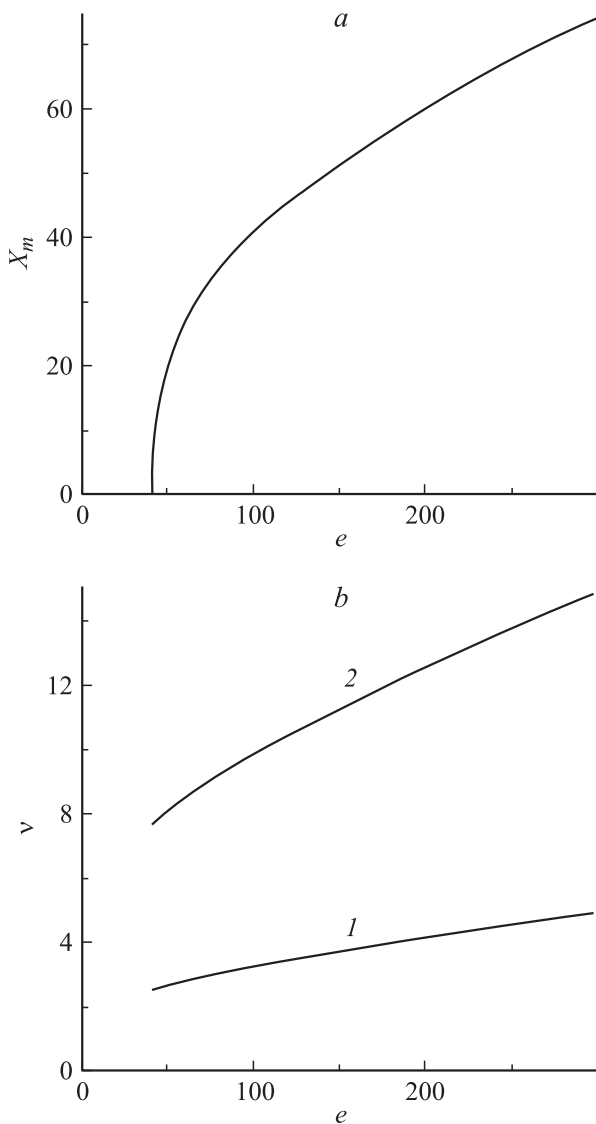


Рис. 1. *a* — зависимость максимальной амплитуды сигнала от электрического параметра, *b* — зависимость основной частоты сигнала (1) и тройной гармоники (2) от электрического параметра e .

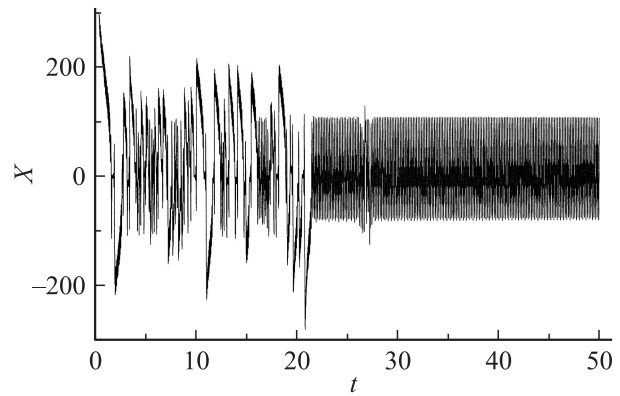


Рис. 2. Периодический режим с переходным хаосом при $e = 519.1$ (хаотические колебания вырождаются в периодические колебания).

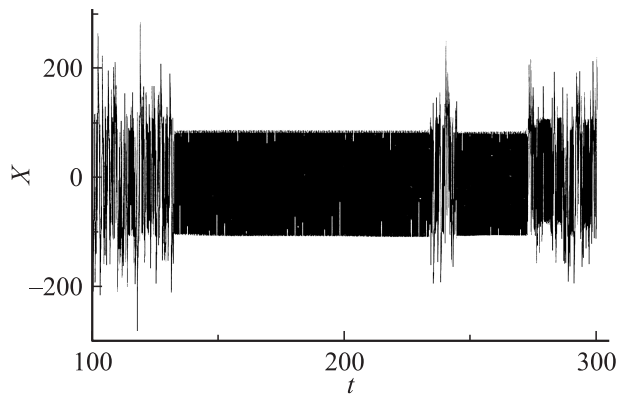


Рис. 3. Перемежаемый хаос при $e = 519.11$ (переход к хаотическому режиму происходит через перемежаемость).

бильного хаоса [2]. Переходный хаос — это режим, при котором в зависимости от начальных данных колебания могут начинаться нерегулярным хаотическим образом, вырождаясь через некоторое время в регулярные периодические колебания. На рис. 2 изображены периодические колебания (приведен усеченный временной ряд) с переходным хаотическим режимом при $e_p = 519.1$. При $e_p = 519.11$ происходит переход к хаосу через перемежаемость (рис. 3). Перемежаемый хаос — это хаотическое движение, которое прерывается периодами регулярного движения, длительность которых непредсказуема и меняется в зависимости от значения начальных возмущений (другими словами, турбулентное движение прерывается фазами ламинарного движения) [2]. При этом спектр Фурье — сплошной, что является признаком хаотического поведения. При увеличении амплитуды поля e вспышки хаотичности становятся чаще, а участки ламинарности уже, и при дальнейшем повышении амплитуды участки периодичности исчезают и сигнал становится полностью хаотическим. Отношение электрического параметра, при котором происходит переход к перемежаемости к параметру, при котором начинается неустойчивость: $e_p/e_* = 12.5$.

4. Учет конечного времени релаксации заряда

Система обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд (18) численно интегрировалась в постоянном электрическом поле, в поле тяжести (r — имеет конечные значения) и при конечных значениях Pr_e , когда время релаксации заряда конечно. Для расчетов брались значения параметров $Pr = 400$, $Pr_e = 30$, как в работе [15], чтобы провести качественное сравнение с экспериментально измеренными в этой работе зависимостями среднего теплопотока от напряженности внешнего поля. Значение волнового числа $k = 0.933$ бралось в минимуме нейтральной кривой при $r = 0$ (в невесомости). Оно было получено из линейного анализа устойчивости равновесия восьмимодовой модели, проведенного по алгоритму, описанному в разд. 3. Ему соответствуют значения параметров $b = 2.138$, $d = 2.604$, $g = 0.722$, для которых проведены все вычисления. Для интегрирования дифференциальных уравнений в качестве начальных условий брались нулевые значения амплитуд, кроме $Y = 0.1$. Для изучения гистерезисных переходов использовался метод продолжения по параметру. Для некоторого значения параметра e при интегрировании по времени в качестве начальных данных использовались значения переменных, полученные в конце интегрирования при предыдущем значении параметра.

Для анализа интенсивности теплопереноса через конденсатор вычислялся усредненный по времени безразмерный теплопоток на границе диэлектрика (число Нуссельта) следующим образом:

$$Nu = -\frac{k}{2} \int_0^{2/k} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=\pm \frac{1}{2}} dx, \quad [Nu] = \frac{qh}{\kappa\Theta}, \quad (29)$$

где q — плотность потока тепла, κ — коэффициент теплопроводности. Усреднение числа Нуссельта проводилось по большому временному интервалу $t_{\text{end}} = Nt_f$ ($N > 100$):

$$Nu = 1 + 2\pi \frac{1}{t_{\text{end}}} \int_0^{t_{\text{end}}} Z(t) \Big|_{z=\pm \frac{1}{2}} dt. \quad (30)$$

Случай $Nu = 1$ соответствует процессу молекулярного теплопереноса, превышение числа Нуссельта над единицей $Nu > 1$ свидетельствует о возникновении конвекции.

Для разных нагревов были получены зависимости среднего числа Нуссельта от электрического числа e . При подкритическом нагреве $r = 0.8$ (рис. 4) неустойчивость возникает колебательным образом при $e_A = 5.1$. С ростом электрического числа средний теплопоток растет (участок AC на рис. 4). В фурье-спектре колебательного режима при $e = 8$ содержатся две частоты: основная частота $\nu_1 = 0.119$ и ее тройная гармоника

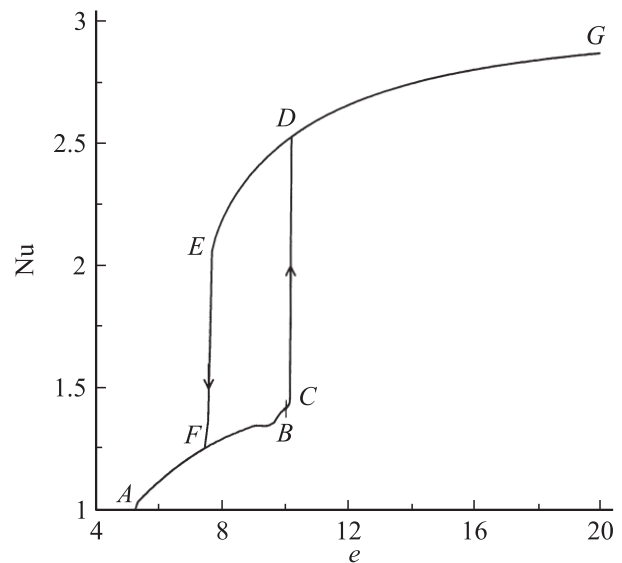


Рис. 4. График зависимости теплопотока от электрического числа при $r = 0.8$.

$\nu_2 = 0.357$. При достижении некоторого значения, полученного методом продолжения по параметру, $e_C = 10.21$ теплопоток резко возрастает почти в 2 раза — жестко рождается монотонный режим (без метода продолжения по параметру переход к монотонному режиму происходит при $e = 9.9$). Дальше число Нуссельта Nu продолжает возрастать (DG). При движении в пространстве параметров справа налево (DEF), при уменьшении электрического числа до значения $e_E = 7.6$ наблюдается гистерезисный переход от монотонного режима к колебательному с резким уменьшением потока тепла.

На участке колебательного режима в спектрах Фурье было обнаружено, что с ростом электрического числа основная частота колебаний и ее утроенная гармоника медленно растут: при $e = 5.1$ имеется частота $\nu_1 = 0.114$ (с большой амплитудой) и $\nu_2 = 0.342$ (с очень маленькой амплитудой), при $e = 7$ — две частоты $\nu_1 = 0.1199$, $\nu_2 = 0.3597$. Затем основная частота и ее утроенная гармоника начинают уменьшаться, появляются другие гармоники — удвоенная, учетверенная и т.д. (например, при $e = 9.9$ в спектрах обнаруживаются частоты $\nu_1 = 0.0934$, $\nu_2 = 0.1866$, $\nu_3 = 0.28$, ...).

При дальнейшем росте электрического числа была обнаружена последовательность бифуркаций удвоения периода (субгармонический каскад), в результате которой происходит переход от периодического режима колебаний к хаотическому режиму. При этом значения частот по-прежнему медленно уменьшаются с ростом электрического числа. При $e = 9.905$ происходит первое удвоение периода: в спектре появляется частота $\nu = 0.0466$ — в 2 раза меньше основной частоты и ее гармоники. При $e = 10.0368$ — второе удвоение (появляется частота $\nu = 0.0218$), при $e = 10.0556$ — третье ($\nu = 0.0108$), при $e = 10.0596$ — четвертое

Таблица 2. Значения параметра e_k , отвечающие бифуркациям удвоения периода

Номер бифуркации, k	Бифуркация удвоения периода, e_k ($r = 0.8$)	Бифуркация удвоения периода, e_k ($r = 1.1$)
1	9.905	7.98
2	10.0368	8.1487
3	10.0556	8.1903
4	10.0596	8.1992

($\nu = 0.0055$). В табл. 2 приведены значения e_k , отвечающие четырем бифуркациям удвоения периода. С точностью до второй значащей цифры переход к хаосу происходит при $e_B = 10.07$. Если определять точку перехода с большей точностью, то она лежит в интервале значений параметра e (10.06–10.07). На участке BC существует область хаоса с узкими окнами периодичности. При $e_C = 10.21$ происходит переход к монотонному режиму с примерно в 2 раза большим средним теплотокотом.

Интервал по параметру между последовательными бифуркациями удвоения периода уменьшается с ростом их номера так, что отношение $(e_k - e_{k-1}) / (e_{k+1} - e_k)$ стремится к константе, которую принято называть константой Фейгенбаума δ [3]:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_k - e_{k-1}}{e_{k+1} - e_k} = \delta = 4.669 \dots \quad (31)$$

Иными словами, последовательность значений e_k сходится по закону геометрической прогрессии. В нашем случае по значению параметров e_k при второй, третьей и четвертой бифуркациях удвоения (см. табл. 2) число Фейгенбаума получается равным $\delta = 4.7$, что отличается от точного значения примерно на 0.7%.

При надкритичности $r = 1.1$ (рис. 5) в отсутствие электрического поля ($e = 0$) наблюдается обычная монотонная термогравитационная рэлеевская конвекция. При включении и последующем увеличении внешнего электрического поля конвективный поток тепла уменьшается (участок AB на рис. 5) — электрическое поле подавляет тепловую конвекцию до тех пор, пока не установится равновесие при $e_B = 1.3$ (в этом случае тепло передается теплопроводным механизмом: $Nu = 1$). При большем значении электрического поля мягко возникает колебательный режим конвекции при $e_C = 3.4$, который существует на участке CE . При использовании метода продолжения по параметру получаем, что при $e_E = 9.8$ происходит переход от колебательного режима к монотонному режиму (при интегрировании с постоянными начальными условиями этот переход происходит при $e = 8.2$), на участке FI теплотокот продолжает расти. Так же как при надкритичности $r = 0.8$, наблюдается гистерезисный переход между колебательным и монотонным режимами. При движении в пространстве параметров справа налево (FGH), при

уменьшении электрического числа до значения $e_G = 6.5$, наблюдается гистерезисный переход от монотонного режима к колебательному с резким уменьшением потока тепла.

В интервале параметра e (3.4–7.1) существует колебательный режим, в спектре Фурье которого существуют некоторая частота колебаний и ее утроенная гармоника, с ростом приложенного поля они медленно растут (при $e = 3.5$ имеются две частоты $\nu_1 = 0.077$, $\nu_2 = 0.231$). При $e = 7.1$ собственная частота достигает значения $\nu_1 = 0.098$, а утроенная гармоника — $\nu_2 = 0.294$. При $e = 7.2$ в спектре собственная частота становится чуть меньше ($\nu_1 = 0.097$), появляется ее удвоенная ($\nu_2 = 0.194$) и другие гармоники. При дальнейшем увеличении электрического числа по спектрам Фурье видно, что собственная частота и ее гармоники убывают.

Так же, как при подкритическом нагреве, была обнаружена последовательность бифуркаций удвоения периода. При $e = 7.98$ основная частота становится равной $\nu_1 = 0.086$, в спектре видны гармоники основной частоты — $\nu_2 = 0.172$, $\nu_3 = 0.258$, $\nu_4 = 0.344$; и при этом значении параметра e происходит первое удвоение периода — в спектре появляется частота, равная половине основной частоты ($\nu = 0.043$), а также ее утроенная ($\nu = 0.129$), упятеренная ($\nu = 0.215$) и т.д. гармоники. При $e = 8.1487$ — второе удвоение (появляется частота $\nu = 0.0214$), при $e = 8.1903$ — третье ($\nu = 0.0108$), при $e = 8.1992$ — четвертое ($\nu = 0.0053$). В табл. 2 приведены значения e_k , отвечающие четырем бифуркациям удвоения периода. С точностью до второй значащей цифры после запятой переход к хаосу происходит при $e_D = 8.21$ (спектр становится сплошным). Если определять точку перехода с большей точностью, то она

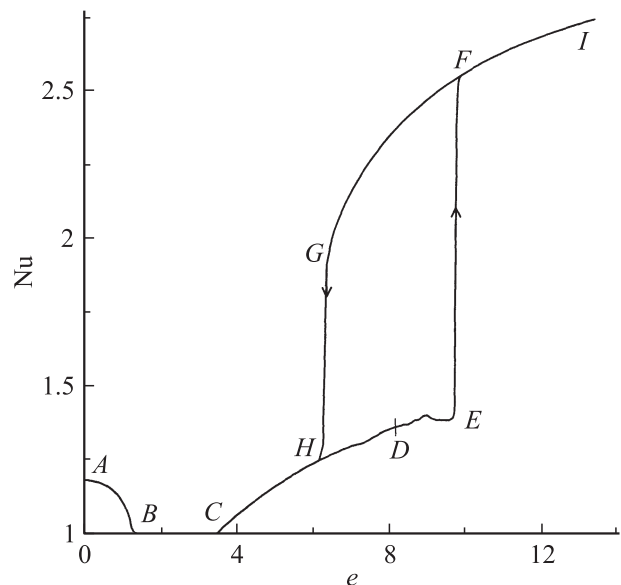


Рис. 5. График зависимости теплопотока от электрического числа при $r = 1.1$.

лежит в интервале значений параметра e (8.2–8.21). В области хаоса (DE) были обнаружены узкие окна периодичности. При $e_E = 9.8$ происходит переход от хаотического режима к монотонному режиму.

Используя значения параметров e_k при второй, третьей и четвертой бифуркациях удвоения (см. табл. 2), получим, что число Фейгенбаума равно $\delta = 4.674$, с погрешностью примерно 0.1%.

В качестве дополнения приведем особенности поведения режимов при $r = 1.4$. В отсутствие поля существует режим монотонной конвекции, интенсивность которой растет с ростом электрического поля. В интервале значений параметра e (3.2–6.1) наблюдается конкуренция монотонного и колебательного режимов: в зависимости от начальных условий может установиться либо колебательный режим с меньшим теплопоток, либо монотонный режим с большим теплопоток. За пределами этого интервала есть только монотонный режим.

На рис. 6, взятом из экспериментальной работы [15], приведены зависимости теплопотока слабопроводящей жидкости от приложенного напряжения в горизонтальном конденсаторе (подогрев снизу, при разных степенях нагрева). При подкритическом нагреве ($r = 0.8$, кривая 1, рис. 6) конвекция начинается колебательным образом при некотором значении напряжения. При надкритическом нагреве для нулевого напряжения теплоперенос осуществляется благодаря рэлеевской конвекции (число $Nu > 1$). Интенсивность конвекции и теплопереноса убывает с ростом напряжения (кривые 2–4). Это означает, что электрическое поле подавляет конвекцию. Визуальные наблюдения за структурами течений в слое при этих параметрах продемонстрировали существование стационарной конвекции в виде валов. При определенном значении напряжения теплоперенос достигает минимума, после которого начинает возрастать. В жидкости в этом случае существуют колебательные электроконвективные структуры (колебательный режим конвекции).

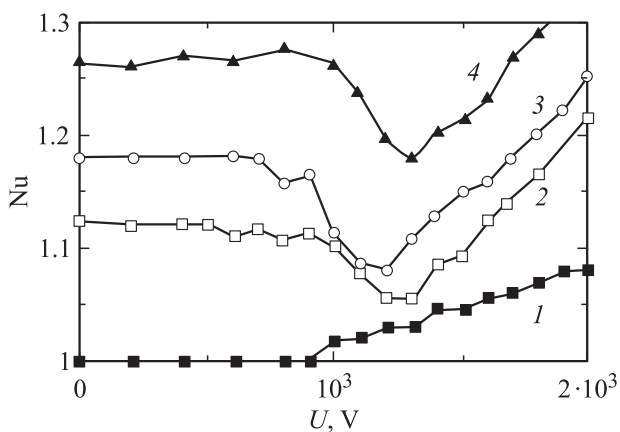


Рис. 6. Зависимость числа Нуссельта от напряжения на конденсаторе: $r = 0.8$ (1), 1.1 (2), 1.1 (3), 1.4 (4) (из работы [15]).

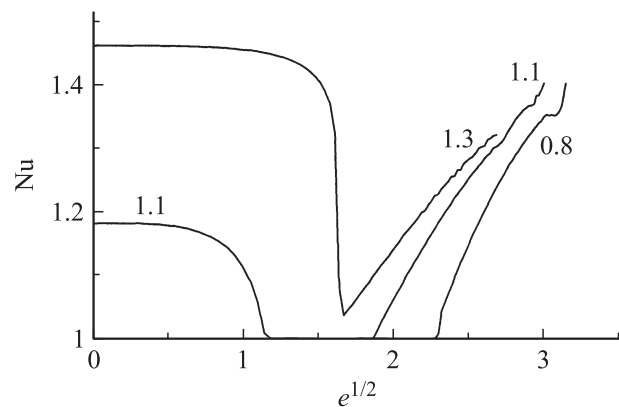


Рис. 7. Зависимость среднего теплопотока от электрического числа при надкритичностях $r = 0.8, 1.1, 1.3$.

Графики зависимости среднего числа Нуссельта от электрического числа, полученные в результате интегрирования маломодовой модели при разных степенях надкритичности, представлены на рис. 7. Порог колебательной моды сильно зависит от электропроводности других физических свойств жидкости, значения которых отсутствуют в работе [15]. Кроме того, в рассматриваемой нами модели границы считаются свободными. Тем не менее результаты экспериментов и наших расчетов находятся в качественном соответствии.

Общим в результатах является то, что при подкритическом нагреве ($r = 0.8$) конвекция начинается колебательным образом при некотором значении напряжения (электрического числа). При надкритическом нагреве ($r = 1.1, 1.3$) для нулевого напряжения наблюдается монотонный режим конвекции. Теплоперенос убывает с ростом напряжения до некоторого критического значения — электрическое поле повышает устойчивость и подавляет монотонную конвекцию. При определенном значении напряжения теплоперенос достигает минимума, после которого начинает возрастать, при этом наблюдается колебательный режим конвекции.

При больших значениях напряжения электрического поля (электрического числа Рэлея), выходящих за рамки экспериментальных значений, на основе рассматриваемой нами модели электроконвекции обнаружены гистерезисные переходы между колебательными и монотонными режимами конвекции (рис. 4 и 5).

Заключение

В работе в рамках маломодовой модели исследованы режимы электроконвекции слабопроводящей жидкости, проводимость которой обеспечивается перераспределением заряженных примесей, в постоянном электрическом поле горизонтального конденсатора. Рассмотрен случай, когда электрокондуктивный механизм зарядообразования играет основную роль. Моделирование электроконвекции с помощью амплитудных уравнений

выявило сложное динамическое поведение. Изучены различные режимы движения жидкости и пути перехода к хаосу для случаев мгновенного и конечного времени релаксации заряда.

В случае мгновенного времени релаксации заряда проведен линейный анализ устойчивости, исследованы нелинейные режимы и переход к хаосу через перемежаемость. В случае конечного времени релаксации заряда изучено взаимодействие электрокондуктивного и термогравитационного механизмов конвекции слабопроводящей жидкости. Исследованы гистерезисные переходы между монотонными и колебательными режимами. Показано, что переход от периодических колебаний к хаосу происходит через последовательность удвоения периода. Проведено качественное сравнение с экспериментом.

Исследования выполнены при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-96037).

Список литературы

- [1] Николис Г, Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах: От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. М.: Мир, 1979. 512 с.
- [2] Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991. 368 с.
- [3] Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
- [4] Shliomis M.I., Smorodin B.L. // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71. P. 036312.
- [5] Smorodin B.L., Cherepanov I.N., Myznikova V.I., Shliomis M.I. // Phys. Rev. E. 2011. Vol. 84. P. 026305.
- [6] Ильин В.А., Смородин Б.Л. // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. Вып. 10. С. 57–63.
- [7] Ильин В.А. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 8. С. 38–48.
- [8] Ильин В.А., Смородин Б.Л. // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. Вып. 8. С. 81–87.
- [9] Мордвинов А.Н., Смородин Б.Л. // ЖЭТФ. 2012. Т. 141. № 5. С. 997–1015.
- [10] Shliomis M.I., Smorodin B.L., Kamiyama S. // Philos. Mag. 2003. Vol. 83. N 17–18. P. 2139–2153.
- [11] Кожевников В.М., Чуенкова И.Ю., Данилов М.И., Ястребов С.С. // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 2. С. 51–57.
- [12] Мелчер Дж. Электродинамика / Магнитная гидродинамика. 1974. № 2. С. 3–30.
- [13] Стишков Ю.К., Остапенко А.А. Электродинамические течения в жидких диэлектриках. Л.: Изд-во ЛГУ, 1989. 172 с.
- [14] Саранин В.А. Устойчивость равновесия, зарядка, конвекция и взаимодействие жидких масс в электрических полях. М., Ижевск: НИЦ РХД, 2009. 332 с.
- [15] Kosvintsev S.R., Smorodin B.L., Zhdanov S.A., Makarihin I.Yu. // Proc. of Intern. Conf. „Modern Problems of Electrophysics and Electrohydrodynamics of Liquids“ (MPEEL). St. Peterburg, 2000. P. 79–82.