01

Переходное и дифракционное излучения заряда на радиально проводящем шаре

© И.И. Каликинский

e-mail: Igor_kalikinskijj@rambler.ru

(Поступило в Редакцию 11 января 2012 г.)

Решена задача о переходном излучении заряда на радиально проводящем шаре. Найдены энергия, спектр и поляризации излучения. Рассмотрен случай движения заряда через центр шара для дипольного излучения.

Переходному излучению, открытому В.Л. Гинзбургом и И.М. Франком в 1946 г. [1], посвящено много работ [2] и вышли в свет две книги [3,4]. Значительный интерес представляют задачи на анизотропно проводящих структурах. Задача о переходном излучении на анизотропно проводящей плоскости (прямолинейная анизотропия проводимости) решена в [5]. Переходному излучению заряда на цилиндрически анизотропно проводящей плоскости (полярная анизотропия проводимости) посвящены работы автора [6,7], итог которым подведен в работе [8]. Намечено также решение задачи о переходном и дифракционном излучениях на идеально проводящем шаре и пространственном „ежике“ [9]. Здесь остановимся на задаче о переходном и дифракционном излучениях заряда на радиально проводящем шаре (пространственном „ежике“). Проводимость вдоль сферических радиусов бесконечная, а в поперечных направлениях — нулевая. Эта задача имеет отношение к активным галактическим ядрам, которые, согласно современным вглядам, представляют собой черную дыру, окруженную аккреционным диском, магнитное поле которого сжимает магнитное поле черной дыры до почти монопольного (индукция порядка 10^4 Gs). Частицы в таком поле свободно движутся вдоль него (по сферическим радиусам, проводимость почти бесконечная) и слабо перемещаются поперек поля (проводимость почти нулевая), так что для описания переходного и дифракционного излучений на таком ядре можно использовать модель пространственного „ежика“.

1. Постановка задачи

Имеется радиально проводящий шар радиуса R_0. Начало координат поместим в центр шара. Проводимость вдоль сферических радиусов внутри шара бесконечная, а в поперечных направлениях нулевая. Антипараллельно оси z равномерно движется электрический заряд q, траектория которого пересекает плоскость $z=0$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, где будем считать $y_0=0$. Расстояние от точки M_0 до начала координат $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$, причем $0 \le r_0 < \infty$. Если $0 \le r_0 \le R_0$, то имеем дело с переходным излучением, а если $R_0 < r_0 < \infty$ — то с дифракционным.

Движущийся со скоростью $\mathbf{v}(0,0,-v)$, где $\mathbf{v}=\text{const}$, заряд создает ток с плотностью $\mathbf{j}(0,0,-j)$, где

$$j = qv\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z+vt). \qquad (1.1)$$

Из уравнений Максвелла для фурье-компонент ($\mathbf{E} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t} d\omega$ и т.д.) получаем уравнение для $\mathbf{E}_\omega$:

$$\Delta \mathbf{E}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}_\omega = 4\pi \operatorname{grad}\rho_\omega - \frac{4\pi i\omega}{c^2}\mathbf{j}_\omega, \qquad (1.2)$$

где

$$j_\omega = \rho_\omega v, \qquad (1.3)$$

а из (1.1) с использованием теоремы сложения бесселевых функций [10] получаем

$$j_\omega = \frac{q}{4\pi^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi}\int\limits_0^\infty J_m(\lambda r_0)J_m(\lambda r)\lambda d\lambda e^{-i\frac{\omega}{v}z}, \qquad (1.4)$$

где r, φ, z — цилиндрические координаты, $J_m(x)$ — бесселевы функции.

Основная идея состоит в том, чтобы решить задачу о переходном и дифракционном излучениях заряда на радиально проводящем шаре в цилиндрических координатах r, φ, z.

В качестве потенциала берем составляющие электрической напряженности в этих координатах E_r, E_φ, E_z. Полное поле ищем в виде

$$E_\omega = E_\omega^{(0)} + E_\omega^{(1)}; \quad H_\omega = H_\omega^{(0)} + H_\omega^{(1)}, \qquad (1.5)$$

где $E_\omega^{(0)}$, $H_\omega^{(0)}$ — поля заряда, а $E_\omega^{(1)}$, $H_\omega^{(1)}$ — поля излучения.

Используя [9], получим

$$E_{\omega r}^{(0)} = \frac{q}{2\pi v}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi}\int\limits_0^\infty [B_m(\lambda)J_{m+1}(\lambda r) - C_m(\lambda)J_{m-1}(\lambda r)]\lambda^2 d\lambda e^{-i\frac{\omega}{v}z}, \qquad (1.6)$$

$$E^{(0)}_{\omega\varphi} = -\frac{iq}{2\pi v}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi}\int_0^\infty [B_m(\lambda)J_{m+1}(\lambda r)$$

$$+ C_m(\lambda)J_{m-1}(\lambda r)]\lambda^2 d\lambda e^{-i\frac{\omega}{v}z}, \tag{1.7}$$

$$E^{(0)}_{\omega z} = -\frac{i\omega q}{\pi v^2}(1-\beta^2)\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi}$$

$$\times\int_0^\infty A_m(\lambda)J_m(\lambda r)\lambda d\lambda e^{-i\frac{\omega}{v}z}, \tag{1.8}$$

где

$$B_m(\lambda) = C_m(\lambda) = \frac{J_m(\lambda r_0)}{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{v^2}(1-\beta^2)}, \tag{1.9}$$

$$A_m(\lambda) = -B_m(\lambda), \quad \beta = \frac{v}{c}. \tag{1.10}$$

После излучения ищем в виде [6–8]:

$$\tilde{E}^{(1)}_{\omega r} = \pm\frac{q}{2\pi v}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi}\int_0^\infty \big[\tilde{D}_m(\lambda)J_{m+1}(\lambda r)$$

$$-\tilde{\mathscr{E}}(\lambda)J_{m-1}(\lambda r)\big]e^{i\varkappa z}\lambda d\lambda, \tag{1.11}$$

$$\tilde{E}^{(1)}_{\omega\varphi} = \mp\frac{iq}{2\pi v}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi}\int_0^\infty \big[\tilde{D}_m(\lambda)J_{m+1}(\lambda r)$$

$$+\tilde{\mathscr{E}}(\lambda)J_{m-1}(\lambda r)\big]e^{i\varkappa z}\lambda d\lambda, \tag{1.12}$$

$$\tilde{E}^{(1)}_{\omega z} = \mp\frac{i\omega q}{\pi v^2}\big(1-\beta^2\big)\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi}$$

$$\times\int_0^\infty \tilde{A}_m(\lambda)J_m(\lambda r)e^{i\varkappa z}\lambda d\lambda, \tag{1.13}$$

где $0 \le r < \infty$, $J_m(\lambda r)$ — функции Бесселя, а $\tilde{A}_m(\lambda)$, $\tilde{D}_m(\lambda)$, $\tilde{\mathscr{E}}(\lambda)$ — произвольные функции, при которых интегралы и ряды, входящие в (1.11)–(1.13), сходятся. При $z < 0$ заменяем $\sim$ на $\approx$ и $\varkappa$ на $-\varkappa$. Здесь

$$\varkappa = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \lambda^2}, \quad \mathrm{Im}\varkappa > 0. \tag{1.14}$$

Решение задачи ищем при $R > R_0$, где R — сферический радиус. Граничные условия имеют вид

$$\Big[H^{(0)}_{\omega\varphi} + \tilde{H}^{(1)}_{\omega\varphi}\Big]_{R=R_0} = 0, \tag{1.15}$$

$$\Big[H^{(0)}_{\omega\varphi} + \tilde{\tilde{H}}^{(1)}_{\omega\varphi}\Big]_{R=R_0} = 0, \tag{1.16}$$

$$\Big[E^{(0)}_{\omega R} + \tilde{E}^{(1)}_{\omega R}\Big]_{R=R_0} = 0, \tag{1.17}$$

$$\Big[E^{(0)}_{\omega R} + \tilde{\tilde{E}}^{(1)}_{\omega R}\Big]_{R=R_0} = 0, \tag{1.18}$$

где

$$\mathbf{H}_\omega = -\frac{ic}{\omega}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_\omega, \tag{1.19}$$

$$E_{\omega R} = E_{\omega r}\sin\theta + E_{\omega z}\cos\theta. \tag{1.20}$$

Здесь R, θ, φ — сферические координаты. Кроме того, должны выполняться условия

$$\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{E}}^{(1)}_\omega = 0, \tag{1.21}$$

$$\mathrm{div}\,\tilde{\tilde{\mathbf{E}}}^{(1)}_\omega = 0 \tag{1.22}$$

и условия излучения на бесконечности.

2. Решение задачи о переходном и дифракционном излучениях заряда на радиально проводящем шаре

Так как при $R > R_0$ и $z = 0$ составляющие $E^{(1)}_{\omega r}$ и $E^{(1)}_{\omega\varphi}$ непрерывны, то

$$\tilde{D}_m(\lambda) = \tilde{\tilde{D}}_m(\lambda)\Big[= D_m(\lambda)\Big], \tag{2.1}$$

$$\tilde{\mathscr{E}}_m(\lambda) = \tilde{\tilde{\mathscr{E}}}_m(\lambda)\Big[= \mathscr{E}_m(\lambda)\Big]. \tag{2.2}$$

Займемся условиями (1.15), (1.16). Рассмотрим функцию

$$F^{(1)}_{\omega m}(R,\theta) = \begin{cases} H^{(0)}_{\omega\varphi m} + \tilde{H}^{(0)}_{\omega\varphi m} \text{ при } 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \\ H^{(0)}_{\omega\varphi m} + \tilde{\tilde{H}}^{(0)}_{\omega\varphi m} \text{ при } \frac{\pi}{2} < \theta \le \pi, \end{cases} \tag{2.3}$$

которую, как функцию $\theta(r = R\sin\theta,\ z = R\cos\theta)$, разложим по присоединенным функциям Лежандра на отрезке $[0,\pi]$

$$F^{(1)}_{\omega m}(R,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} h_{\omega mn\varphi}(R)P^{(m)}_n(\cos\theta), \tag{2.4}$$

где

$$h_{\omega mn\varphi}(R) = \frac{2n+1}{2}\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}$$

$$\times\int_0^\pi F^{(1)}_{\omega m}(R,\theta')P^m_n(\cos\theta')\sin\theta' d\theta'. \tag{2.5}$$

Тогда граничные условия (2.3) можно заменить условием

$$h_{\omega mn\varphi}(R_0) = 0. \tag{2.6}$$

Разбив интеграл в (2.5) на два интеграла: от 0 до $\pi/2$ и от $\pi/2$ до π, получим уравнение

$$C_{11}(\lambda)D_{mn}(\lambda) + C_{12}(\lambda)\mathscr{E}_{mn}(\lambda) = b_1(\lambda), \tag{2.7}$$

где

$$C_{11}(\lambda) = \int_0^1 \Bigg\{ \bigg[J_{m+1}\Big(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\Big)\lambda\varkappa + \frac{\lambda^3}{\varkappa} J'_m\Big(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\Big)\bigg] e^{i\varkappa R_0 x}\Big[P_n^{(m)}(x) - P_n^{(m)}(-x)\Big]\Bigg\} dx, \tag{2.8}$$

$$C_{12}(\lambda) = -\int_0^1 \Bigg\{ \bigg[J_{m-1}\Big(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\Big)\lambda\varkappa - \frac{\lambda^3}{\varkappa} J'_m\Big(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\Big)\bigg] e^{i\varkappa R_0 x}\Big[P_n^{(m)}(x) - P_n^{(m)}(-x)\Big]\Bigg\} dx, \tag{2.9}$$

$$b_1(\lambda) = \frac{2\omega}{v} B_m(\lambda) \int_0^1 \Big\{ J'_m\Big(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\Big)\lambda^2 \times \Big[e^{i\frac{\omega}{v}R_0x}P_n^{(m)}(x) - e^{i\frac{\omega}{v}R_0x}P_n^{(m)}(-x)\Big] dx. \tag{2.10}$$

Поступая аналогично с граничными условиями (1.17), (1.18), получим уравнение

$$C_{21}(\lambda)D_{mn}(\lambda) + C_{22}(\lambda)\mathscr{E}_{mn}(\lambda) = b_2(\lambda), \tag{2.11}$$

где

$$C_{21}(\lambda) = \int_0^1 \Bigg\{ \bigg[J_{m+1}\Big(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\Big)\sqrt{1-x^2} + i\frac{\lambda}{\varkappa} x J_m\Big(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\Big)\bigg]\Big[P_n^{(m)}(x) + P_n^{(m)}(-x)\Big]\Bigg\} e^{i\varkappa R_0 x} dx, \tag{2.12}$$

$$C_{22}(\lambda) = \int_0^1 \Bigg\{ \bigg[-J_{m-1}\Big(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\Big) + i\frac{\lambda}{\varkappa} x J_m\Big(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\Big)\bigg] e^{i\varkappa R_0 x}\Big[P_n^{(m)}(x) + P_n^{(m)}(-x)\Big]\Bigg\}, \tag{2.13}$$

$$b_2(\lambda) = 2B_m(\lambda) \int_0^1 \Bigg\{ J'_m\Big(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\Big)\lambda \times \Big[e^{-i\frac{\omega}{v}R_0x}P_n^{(m)}(x) + e^{i\frac{\omega}{v}R_0x}P_n^{(m)}(-x)\Big] + \frac{i\omega}{v}(1-\beta^2) J_m\Big(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\Big)x \times \Big[e^{-i\frac{\omega}{v}R_0x}P_n^{(m)}(x) - e^{i\frac{\omega}{v}R_0x}P_n^{(m)}(-x)\Big]\Bigg\} dx. \tag{2.14}$$

Заметим, что в процессе решения задачи появился значок n $(0 \le n < \infty)$. Поэтому поле излучения имеет вид

$$\mathbf{E}_\omega^{(1)} = \frac{q}{2\pi v}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \mathbf{E}_{\omega mn}^{(1)} e^{im\varphi}, \tag{2.15}$$

$$\mathbf{H}_\omega^{(1)} = -\frac{ic}{\omega}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_\omega^{(1)}, \tag{2.16}$$

и сумма по m будет от $-n$ до $+n$, так как

$$P_n^{(m)}(\cos\theta) = 0 \quad \text{при } |m| > n. \tag{2.17}$$

Заменив в сумме по m от $-n$ до -1 знак m на $-m$ и используя формулу [10]

$$P_n^{(-m)}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^{(m)}(x), \tag{2.18}$$

получим

$$D_{(-m)n}(\lambda) = (-1)^m \mathscr{E}_{mn}(\lambda), \tag{2.19}$$

$$\mathscr{E}_{(-m)n}(\lambda) = (-1)^m D_{mn}(\lambda). \tag{2.20}$$

Таким образом,

$$\tilde{E}_{\omega r}^{(1)} = \frac{q}{2\pi v}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \varepsilon_m(\varphi) \int_0^\infty \Big[D_{mn}(\lambda)J_{m+1}(\lambda r) - \mathscr{E}_{mn}(\lambda)J_{m-1}(\lambda r)\Big] e^{i\varkappa z}\lambda d\lambda, \tag{2.21}$$

$$\tilde{E}_{\omega\varphi}^{(1)} = -\frac{iq}{2\pi v}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \sin m\varphi \int_0^\infty \Big[D_{mn}(\lambda)J_{m+1}(\lambda r) + \mathscr{E}_{mn}(\lambda)J_{m-1}(\lambda r)\Big] e^{i\varkappa z}\lambda d\lambda, \tag{2.22}$$

$$\tilde{E}_{\omega z}^{(1)} = -\frac{i\omega q}{\pi v^2}(1-\beta^2) \times \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \int_0^\infty \varepsilon_m(\varphi)\tilde{A}_{mn}(\lambda)J_m(\lambda r)e^{i\varkappa z}\lambda d\lambda, \tag{2.23}$$

где

$$\varepsilon_m(\varphi) = \begin{cases} 1 \text{ при } m = 0, \\ 2\cos m\varphi \text{ при } m \ne 0. \end{cases} \tag{2.24}$$

В волновой зоне

$$\frac{\omega}{c} R \gg 1, \tag{2.25}$$

переход от функций Бесселя к функциям Ханкеля, используя асимптотику и соотношения обхода последних [10], а также метод перевала, получим

$$\tilde{E}_{\omega r mn}^{(1)} = \frac{q\omega}{\pi v c}\left[D_{mn}\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right) + \mathscr{E}_{mn}\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right)\right] \times \cos\theta\,\varepsilon_m(\varphi)\,\frac{e^{i\frac{\omega}{c}R - im\frac{\pi}{2}}}{R}, \tag{2.26}$$

$$\tilde{E}^{(1)}_{\omega\varphi mn} = -\frac{iq\omega}{\pi v c}\left[D_{mn}\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right) - \mathscr{E}_{mn}\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right)\right]$$
$$\times \cos\theta \sin m\varphi \, \frac{e^{i\frac{\omega}{c}R - im\frac{\pi}{2}}}{R}, \tag{2.27}$$

$$\tilde{E}^{(1)}_{\omega z mn} = -\frac{q\omega}{\pi v c}\left[D_{mn}\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right) + \mathscr{E}_{mn}\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right)\right]$$
$$\times \sin\theta\varepsilon_m(\varphi) \, \frac{e^{i\frac{\omega}{c}R - im\frac{\pi}{2}}}{R}. \tag{2.28}$$

Используя формулу

$$E_{\omega\theta} = E_{\omega r}\cos\theta - E_{\omega z}\sin\theta, \tag{2.29}$$

получим

$$\tilde{E}^{(1)}_{\omega\theta mn} = \frac{q\omega}{\pi v c}\left[D_{mn}\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right) + \mathscr{E}_{mn}\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right)\right]$$
$$\times \varepsilon_m(\varphi) \, \frac{e^{i\frac{\omega}{c}R - im\frac{\pi}{2}}}{R}. \tag{2.30}$$

Выясним вопрос о поляризации излучения. Для этого заметим [10], что

$$P^m_n(-x) = (-1)^{n+m}P^{(m)}_n(x), \tag{2.31}$$

ввиду чего следует рассмотреть 2 случая:

1) $n+m$ — нечетное ($m \neq 0$). Имеем

$$C_{11}(\lambda) = |C_{11}(\lambda)|e^{i\chi_1},$$
$$C_{12}(\lambda) = |C_{12}(\lambda)|e^{i\chi_2} \quad \text{— известные,}$$
$$D_{mn}(\lambda) = |D_{mn}(\lambda)|e^{i\psi_1},$$
$$\mathscr{E}_{mn}(\lambda) = |\mathscr{E}_{mn}(\lambda)|e^{i\psi_2} \quad \text{— неизвестные.}$$

Решая систему уравнений (2.7) и ей комплексно сопряженную, полагая

$$D_{mn}(\lambda) + \mathscr{E}(\lambda) = |D_{mn}(\lambda) + \mathscr{E}_{mn}(\lambda)|e^{i\overline{\psi}}, \tag{2.32}$$

$$D_{mn}(\lambda) - \mathscr{E}_{mn}(\lambda) = |D_{mn}(\lambda) - \mathscr{E}_{mn}(\lambda)|e^{i\overline{\overline{\psi}}}, \tag{2.33}$$

и потребовав, чтобы

$$\overline{\psi} = \overline{\overline{\psi}}[= \psi],$$

получим

$$\frac{|D_{mn}(\lambda)|}{|\mathscr{E}_{mn|}(\lambda)} = -\frac{|C_{12}(\lambda)|}{|C_{11}(\lambda)|}\,\frac{\sin(\psi_2+\chi_2)}{\sin(\psi_1+\chi_1)}, \tag{2.34}$$

откуда следует, что

$$\frac{\sin(\psi_2+\chi_2)}{\sin(\psi_1+\chi_1)} < 0. \tag{2.35}$$

Положим

$$\psi_1 + \chi_1 = -\alpha_1, \quad \psi_2 + \chi_2 = \alpha_1. \tag{2.36}$$

Из условия $\overline{\psi} = \overline{\overline{\psi}}$ получаем уравнение для α_1

$$\frac{|C_{12}|\sin(\alpha_1-\chi_2) + |C_{11}|\sin(\alpha_1+\chi_1)}{|C_{12}|\cos(\alpha_1-\chi_2) - |C_{11}|\cos(\alpha_1+\chi_1)} =$$
$$\frac{|C_{12}|\sin(\alpha_1-\chi_2) - |C_{11}|\sin(\alpha_1+\chi_1)}{|C_{12}|\cos(\alpha_1-\chi_2) + |C_{11}|\cos(\alpha_1+\chi_1)}. \tag{2.37}$$

Из вышеизложенного и формул (2.27) и (2.30) следует, что поле в волновой зоне эллиптически поляризовано, причем электрический вектор вращается против часовой стрелки.

2) $n+m$ — четное ($m \neq 0$).

Записав уравнение, комплексно сопряженное (2.11), и полагая

$$C_{21}(\lambda) = |C_{21}(\lambda)|e^{i\chi_3},$$
$$C_{22}(\lambda) = |C_{22}(\lambda)|e^{i\chi_4} \quad \text{— известные,}$$
$$D_{mn}(\lambda) = |D_{mn}(\lambda)|e^{i\psi_3},$$
$$\mathscr{E}_{mn}(\lambda) = |\mathscr{E}_{mn}(\lambda)|e^{i\psi_4} \quad \text{— неизвестные, найдем} \tag{2.38}$$

$$\frac{\operatorname{Re} b_2(\lambda)\sin(\psi_4+\chi_4) - \operatorname{Im} b_2(\lambda)\cos(\psi_4+\chi_4)}{\operatorname{Im} b_2(\lambda)\cos(\psi_3+\chi_3) - \operatorname{Re} b_2(\lambda)\sin(\psi_3+\chi_3)} > 0, \tag{2.39}$$

откуда следует, что либо числитель и знаменатель (2.38) положительные, либо оба они отрицательные.

Полагая

$$\psi_3 + \chi_3 = -\alpha_2; \quad \psi_4 + \chi_4 = \alpha_2 \tag{2.40}$$

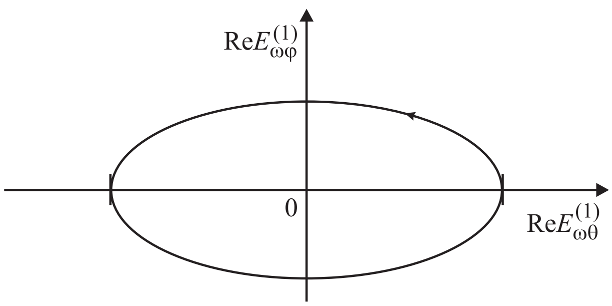
и перемножив числитель и знаменатель (2.39), найдем, что в обоих случаях

$$[\operatorname{Re} b_2(\lambda)]^2\sin^2\alpha_2 + [\operatorname{Im} b_2(\lambda)]^2\cos^2\alpha_2 > 0, \tag{2.41}$$

что всегда справедливо.

Потребовав в формулах (2.32) и (2.33), чтобы $\overline{\psi} = \overline{\overline{\psi}}[= \psi]$, снова получим уравнение для α_2 (2.37), где следует заменить $|C_{11}|$ на $|C_{21}|$ и $|C_{12}|$ на $|C_{22}|$, χ_1 на χ_3, χ_2 на χ_4, α_1 на α_2.

Таким образом, и в этом случае имеем эллиптическую поляризацию, где электрический вектор вращается против часовой стрелки (см. рисунок).



Для спектральной интенсивности излучения в единицу телесного угла Ω получим

$$\frac{dW_{\omega mn}}{d\Omega} = c\left|E^{(1)}_{\omega\theta 0n}\right|^2. \tag{2.42}$$

3. Переходное излучение заряда на радиально проводящем шаре, когда траектория заряда проходит через центр шара ($r_0 = 0$) и скорость заряда мала

Известно в этом случае (дипольное излучение) излучаются в основном низкие частоты. Поэтому будем считать

$$\frac{\omega}{v} R_0 \ll 1. \tag{3.1}$$

Тогда и

$$\frac{\omega}{c} R_0 \ll 1. \tag{3.2}$$

Рассмотрим вначале случай

$$m \neq 0. \tag{3.3}$$

Поскольку $r_0 = 0$, то

$$b_1(\lambda) = b_2(\lambda) = 0. \tag{3.4}$$

Поскольку определитель системы (2.7), (2.11) не равен нулю, то излучение отсутствует.

Пусть теперь

$$m = 0. \tag{3.5}$$

Если a) n — четное, то уравнение (2.7) обращается в тождество

$$0D_{0n}(\lambda) + 0\mathscr{E}_{0n}(\lambda) = 0, \tag{3.6}$$

а уравнение (2.11) принимает вид

$$C_{21}(\lambda)D_{0n}(\lambda) + C_{22}(\lambda)\mathscr{E}_{0n}(\lambda) = b_2(\lambda), \tag{3.7}$$

где с учетом (3.1), (3.2) имеем

$$C_{21}(\lambda) = \int\limits_0^1 \frac{i\lambda}{\varkappa} x 2P_n(x)dx, \tag{3.8}$$

$$C_{22}(\lambda) = \frac{i\lambda}{\varkappa} \int\limits_0^1 x 2P_n(x)dx. \tag{3.9}$$

$$b_2(\lambda) = 0. \tag{3.10}$$

С учетом (3.6)–(3.8) получаем

$$D_{0n}(\lambda) = \mathscr{E}_{0n}(\lambda) = 0, \tag{3.11}$$

т. е. излучение отсутствует.

Если же b) n — нечетное, то уравнение (2.7) принимает вид

$$C_{11}(\lambda)D_{0n}(\lambda) + C_{12}(\lambda)\mathscr{E}_{0n}(\lambda) = b_1(\lambda), \tag*{(3.11)$'$}$$

где

$$C_{11}(\lambda) = C_{12}(\lambda) = \int\limits_0^1 J_1(\lambda R_0\sqrt{1-x^2})\frac{\lambda}{\varkappa}\frac{\omega^2}{c^2} 2P_n(x)dx, \tag{3.12}$$

$$b_1(\lambda) = -\frac{2\omega}{v} B_0(\lambda)\lambda^2 \int\limits_0^1 J_1\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right)2P_n(x)dx. \tag{3.13}$$

Так как $C_{21}(\lambda) = 0$, $C_{22}(\lambda) = 0$, $b_2(\lambda) \neq 0$, то уравнение (2.11) не имеет решений. Из (3.11)$'$

$$C_{11}(\lambda)[D_{0n}(\lambda) + \mathscr{E}_{0n}(\lambda)] = b_1(\lambda), \tag{3.14}$$

откуда

$$D_{0n}(\lambda) + \mathscr{E}_{0n}(\lambda)$$

$$= \frac{-\frac{2\omega}{v} B_0(\lambda)\lambda \int\limits_0^1 J_1\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right)2P_n(x)dx}{\int\limits_0^1 J_1\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right)\frac{\lambda}{\varkappa}\frac{\omega^2}{c^2} 2P_n(x)dx}, \tag{3.15}$$

$$D_{0n}(\lambda) + \mathscr{E}_{0n}(\lambda) = -\frac{2\omega}{v}\frac{c^2}{\omega}\varkappa\lambda - B_0(\lambda). \tag{3.16}$$

Откуда спектральная интенсивность излучения в единицу телесного угла Ω равна

$$\frac{dW_{\omega 0n}}{d\Omega} = \frac{4q^2}{\pi^2 c}\sin^2\theta\cos^2\theta. \tag{3.17}$$

Интегрируя по углам, получим

$$dW_{\omega 0n} = \frac{32q^2}{15\pi} d\omega. \tag{3.18}$$

И наконец, интегрируя по ω от 0 до v/R_0, получим, что заряда теряет на излучение энергию

$$\frac{32q^2}{15\pi R_0}\beta. \tag{3.19}$$

Поляризация излучения в этом случае линейная, причем электрический вектор лежит в плоскости, проходящей через луч в точку наблюдения и ось z.

Список литературы

[1] *Гинзбург В.Л., Франк И.М.* // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. Вып. 1. С. 15–28.

[2] *Варданян Л.А., Мелкумова И.Г.* Библиография работ по переходному излучению заряженных частиц (1945–1982) / Под ред. Г.М. Гарибяна. Ереван: Ереванский физический институт, 1983.

[3] *Гарибян Г.М., Ян-Ши.* Рентгеновское переходное излучение. Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1983. 320 с.

[4] *Гинзбург В.Л., Цытович В.Н.* Переходное излучение и переходное рассеяние. М.: Наука, 1984. 360 с.

[5] *Барсуков К.А., Нарышкина Л.Г.* // Радиофизика, 1965. Т. 8. № 5. С. 936–941.

[6] *Каликинский И.И.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 9. С. 20–26.

[7] *Каликинский И.И.* // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 10. С. 131–142.
[8] *Каликинский И.И.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 6. С. 1–4.
[9] *Каликинский И.И.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 12. С. 1–9.
[10] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1097 с.