

01;07

# Светорассеяние на диэлектрических телах произвольной формы, помещенных в слоистую среду, с приложением к задачам биомедицинской оптики.

## II. Численный анализ

© К.Г. Куликов

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,  
195251 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: kulikov\_kg@hotmail.ru

(Поступило в Редакцию 16 апреля 2012 г.)

В рамках построенной модели исследованы зависимости оптических характеристик (коэффициента преломления и поглощения) моделируемой биоткани, зондируемых лазерным пучком для случая *in vivo*, а также рассчитаны спектры действия поглощенной мощности лазерного излучения оксигемоглобином и деоксигемоглобином крови, обусловленные селективностью поглощения излучения указанными производными гемоглобина.

### Введение

В настоящей работе исследуются оптические и геометрические характеристики частиц, моделирующих эритроциты, находящихся в верхнем слое дермы. Следует отметить, что в патогенезе многих заболеваний, а также состояний и осложнений основное место принадлежит гемореологическим и микроциркуляторным расстройствам. В формировании таких патологических состояний большая роль отводится функциональным свойствам эритроцитов, которые составляют основную массу клеток крови. Эритроцит как физический объект характеризуется геометрическими размерами, показателем преломления и механическими свойствами, одними из основных среди которых являются упругость и деформируемость. В связи с этим исследование различных характеристик эритроцитов, в частности их размеров, формы и показателя преломления, при различных заболеваниях системы крови представляет определенный теоретический и несомненно практический интерес.

В первом разделе исследуются эффективные приемы улучшения сходимости расчетов для  $T$ -матрицы. Во втором — непосредственно проведены численные расчеты и приведены соответствующие графики. Моделирование для спектров действия поглощенной мощности лазерного излучения оксигемоглобином и деоксигемоглобином крови выполнено в рамках теории  $T$ -матрицы в спектральном диапазоне от 300 до 800 nm. Выбор данного спектрального интервала обусловлен тем, что большинство существующих методов используют для оптического зондирования биотканей окно прозрачности в диапазоне длин волн от 650 до 1200 nm [1]. Отметим, что спектральный интервал от 400 до 600 nm является диагностическим, так как основные полосы поглощения крови — полоса Соре 420 nm,  $\alpha$ ,  $\beta$  — полосы поглощения оксигемоглобина 545 и 575 nm лежат в данном спектральном интервале.

### 1. Улучшение сходимости расчета $T$ -матрицы

Как уже отмечалось выше, расчет  $T$ -матрицы для рассеивающего объекта обычно выполняется при помощи метода расширенного граничного условия. В рамках этого подхода  $T$ -матрица для  $j$ -двухслойной частицы произвольной формы представляется в виде

$$T_2^j = - [Q_2^{11}(k, k_2) + Q_2^{13}(k, k_2)] \times D \{ [Q_2^{31}(k, k_2) + Q_2^{33}(k, k_2)] D \}^{-1},$$

где

$$D = S_{12} T_1^j S_{21},$$

$$T_1^j = -Q_{01}^{11}(k_2, k_1) [Q_{01}^{31}(k_2, k_1)]^{-1}.$$

Элементы матриц  $Q_{01}^{11}$ ,  $Q_{01}^{31}$ ,  $Q_2^{11}$ ,  $Q_2^{13}$ ,  $Q_2^{31}$ ,  $Q_2^{33}$  являются интегралами от векторных произведений векторных сферических волновых функций по поверхности рассеивателя.  $S_{12}$ ,  $S_{21}$  определены в сообщении I.

Численный расчет интегралов от векторных произведений векторных сферических функций для произвольного тела вращения, которые приведены в приложении (сообщение II), оказывается весьма проблематичным, когда рассеивающий объект имеет большой размер по отношению к длине волны света. Это связано с тем, что подынтегральное выражение в формуле для расчета элементов матрицы  $Q$  может осциллировать в очень больших пределах, что приводит к потере точности. Процесс численного обращения матрицы  $Q$  плохо обусловлен и также становится неустойчивым. Отметим, что это характерно для частиц с нулевой или очень малой мнимой частью показателя преломления.

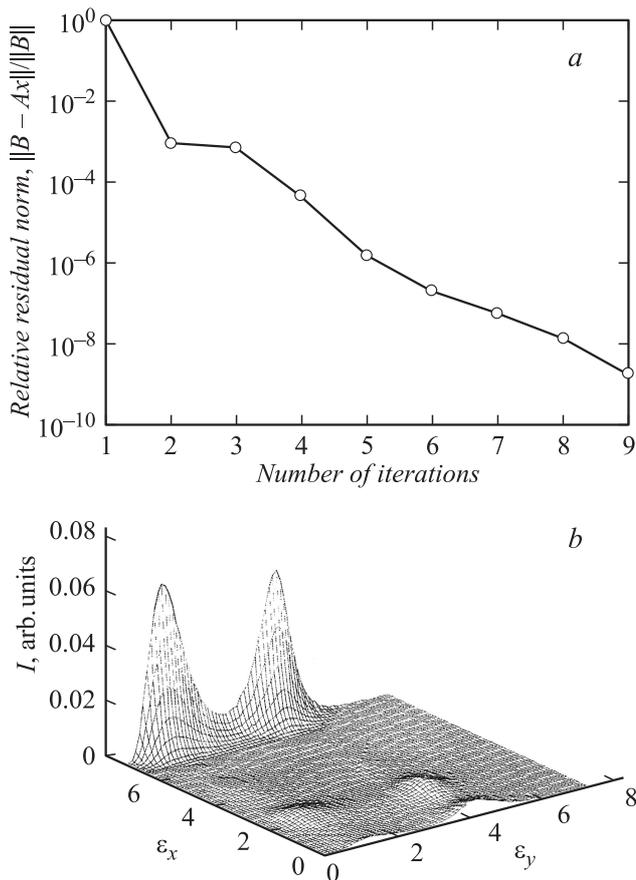
Как показано в работах [2,3], эффективными приемами улучшения сходимости расчетов, которые основаны на методе расширенного граничного условия, являются

1. Вычисление элементов матрицы  $Q$  и ее обращение с использованием учетверенной точности.

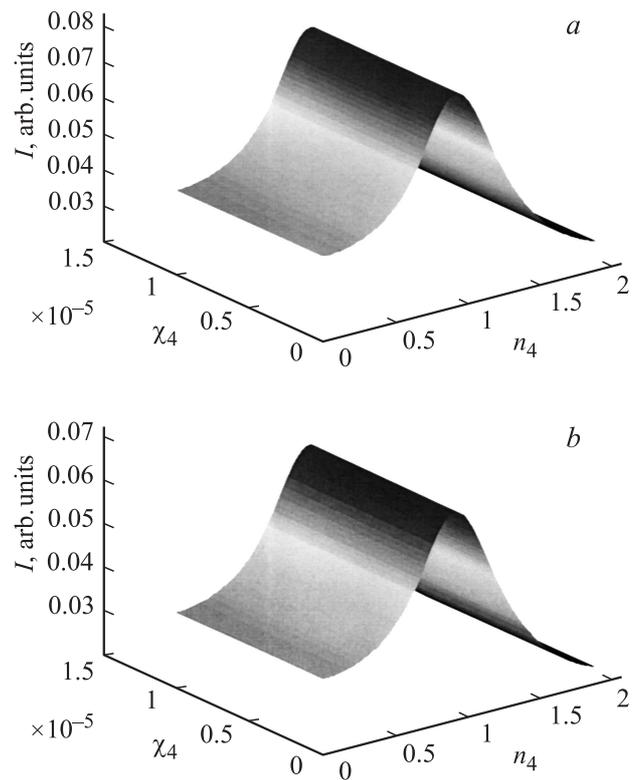
2. Обращение матрицы  $Q$  при помощи метода LU-факторизации.

## 2. Численный расчет и выводы

Рассмотрим модельную среду, она имеет следующие характеристики: характерную толщину слоев  $d_2 = 65 \cdot 10^{-6}$  м,  $d_3 = 650 \cdot 10^{-6}$  м и следующие значения параметров:  $c_1 = -0.08$ ,  $a_1 = 0.07698$ ,  $b_1 = 0.08$ ,  $c_2 = 0.062$ ,  $a_2 = 0.099$ ,  $b_2 = 0.012$ . При этом значения параметров подобраны для границы раздела каждого слоя таким образом, чтобы форма поверхности наиболее соответствовала форме границы раздела соответствующего слоя в структуре нормальной кожи человека, длина волны  $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$  (центр линии гелий-неонового лазера). Так как эритроцит не содержит клеточных органелл, а его клеточная мембрана очень тонкая и не оказывает значительного влияния на процесс рассеяния света, следовательно, эритроцит можно рассматривать как однородный рассеиватель. Таким образом, расчеты



**Рис. 1.** *a* — зависимость относительной нормы невязки от номера итерации для предобусловленного метода бисопряженных градиентов; *b* — распределение интенсивности излучения для многослойной поглощающей и рассеивающей свет среды при конкретных параметрах:  $\theta = 0^\circ$ ,  $\phi = 0^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ , коэффициент преломления эпидермиса  $1.303 + i10^{-3}$ , коэффициент преломления дермы  $1.31 + i10^{-3}$ .



**Рис. 2.** Зависимости интенсивности лазерного излучения от коэффициента преломления и поглощения эпидермиса. Коэффициент преломления верхней дермы составляет: *a* —  $1.36 + 0.0001i$ ; *b* —  $1.6 + 0.001i$ .

проводились для однослойных сферуллированных частиц, моделирующих эритроциты, при этом количество частиц в моделируемом слое принималось равным десяти при следующих параметрах: относительный коэффициент преломления для первых пяти сферуллированных эритроцитов принимался равным  $n = 1.035 + 10^{-5}i$ , для остальных —  $1.033 + 10^{-5}i$  при радиусе частиц, равном  $4.3 \mu\text{m}$ ,  $H = 0.4$ ,  $f = 0.08$ ,  $S = 0.75$ ,  $C_v = 0.595$  [4]. Все расчеты проводились с точностью до 32 знака после запятой.

Отметим, что решение системы линейных уравнений, которые определены формулой (31) в сообщении I, проводилось с использованием устойчивого алгоритма бисопряженных градиентов. Данный метод построен на основе квадратичного метода сопряженных градиентов, но не допускает накопления погрешностей округления и нестабильного поведения невязки [5,6]. Зависимость относительной нормы невязки от номера итерации для предобусловленного метода бисопряженных градиентов (рис. 1, *a*) говорит о достаточной устойчивой сходимости метода.

Рис. 1, *b* иллюстрирует распределение интенсивности излучения для многослойной поглощающей и рассеивающей свет среды, моделирующей кожу человека при конкретных электрофизических и геометрических характеристиках моделируемой биологической структуры.

Зависимости интенсивности лазерного излучения от коэффициента преломления и поглощения эпидермиса при различных электрофизических характеристиках моделируемой биоткани представлены на рис. 2.

Следует отметить, что построенная модель достаточно чувствительна к изменению коэффициента преломления, моделируемой биологической структуры, и также модель позволяет варьировать электрофизические параметры исследуемого биологического образца, геометрические характеристики и устанавливать зависимости между ними и биологическими свойствами моделируемой биоткани. Таким образом, при помощи данной математической модели возможно измерение спектральных различий нормальной и патологической тканей для случая *in vivo* для определения патологических изменений в исследуемых биологических образцах, связанных с изменением электрофизических свойств эпидермиса и форменных элементов крови, находящихся в верхнем слое дермы.

На рис. 3 приведены нормированные спектры действия лазерного излучения на окси- и деоксигемоглобин. При этом спектральные зависимости показателей

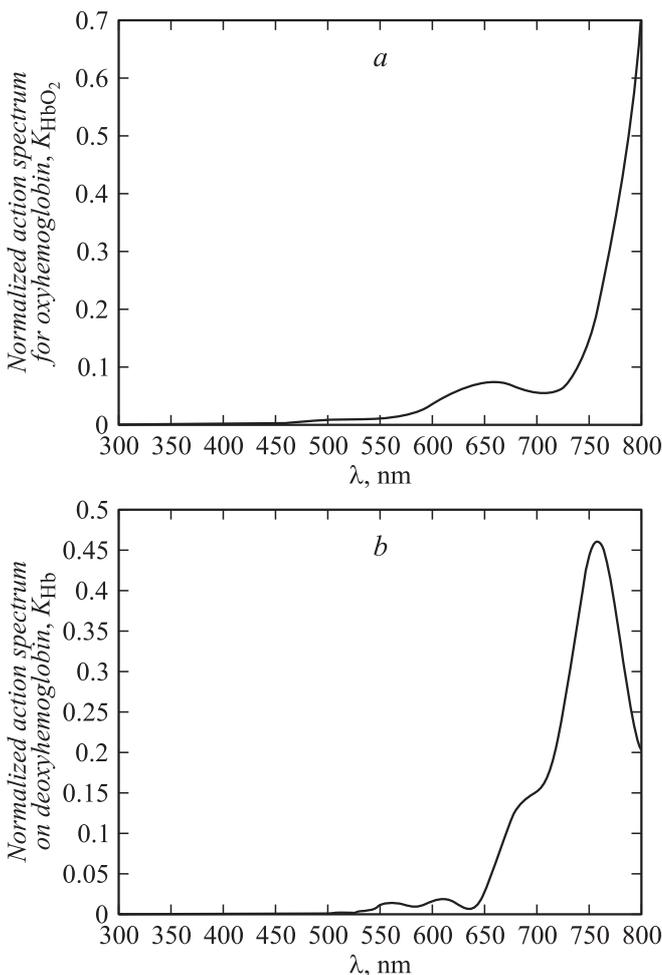


Рис. 3. Нормированные спектры действия лазерного излучения: *a* — на оксигемоглобин; *b* — деоксигемоглобин.

преломления дермы и эпидермиса были описаны соответственно следующими выражениями [7]:

$$n(\lambda) = 1.30904 - \frac{434.60068}{\lambda^2} + \frac{1.60647 \cdot 10^9}{\lambda^4} - \frac{1.28111 \cdot 10^{14}}{\lambda^6},$$

$$n(\lambda) = 1.68395 - \frac{1.87232 \cdot 10^4}{\lambda^2} + \frac{1.09644 \cdot 10^{10}}{\lambda^4} - \frac{8.64842 \cdot 10^{14}}{\lambda^6}.$$

Отметим, что аналогичные результаты исследования спектров действия лазерного излучения на окси- и деоксигемоглобин были получены в работе [8]. Некоторое различие между данными, приведенными в работе [8] и рис. 3 связаны, во-первых, с использованием исходными спектрами поглощения окси- и деоксигемоглобина, во-вторых, для более адекватного описания распространения лазерного излучения в биологических средах необходимо знание спектральных зависимостей показателя поглощения эпидермиса, дермы и форменных элементов крови, тогда как в расчетах использовались усредненный показатель поглощения эпидермиса, дермы и усредненный показатель преломления форменных элементов крови.

## Заключение

Таким образом, построенная модель позволяет выбрать оптимальные длины волн для эффективного воздействия лазерного излучения на биологические структуры, но и дает возможность изучать эффективность поглощения не только кровью, но и биологическими тканями, например меланином эпидермиса, и т. д.

Приведенные зависимости могут быть использованы для предсказаний изменений оптических свойств крови в капиллярном русле, обусловленных в ней различными биофизическими, биохимическими и физиологическими процессами, и могут быть рассчитаны для лазеров с другими параметрами, а также полученные количественные оценки могут быть применены для обработки и интерпретации экспериментальных данных.

## Приложение. Вывод явных выражений интегралов от векторных произведений векторных сферических функций для произвольного тела вращения

Запишем выражение для нормали объекта в декартовой системе координат:

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k},$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  — единичные орты соответствующей системы.

Согласно [9], для произвольно расположенного тела

$$\mathbf{n}dS = \left[ \frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \varphi)} \mathbf{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(\theta, \varphi)} \mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)} \mathbf{k} \right],$$

откуда

$$n_x dS = [rr'_\varphi \sin(\varphi) + r^2 \sin^2(\theta) \cos(\varphi) - rr'_\theta \sin(\theta) \cos(\varphi)] d\theta d\varphi,$$

$$n_y dS = [-rr'_\varphi \cos(\varphi) + r^2 \sin^2(\theta) \cos(\varphi) - rr'_\theta \sin(\theta) \sin(\varphi)] d\theta d\varphi,$$

$$n_z dS = [r^2 \sin^2(\theta) \sin(\theta) \cos(\theta) - rr'_\theta \sin^2(\theta)] d\theta d\varphi.$$

Воспользовавшись формулами перехода от декартовых координат к сферическим, получим

$$n_r dS = [\sin(\theta) \cos(\varphi) n_x + \sin(\theta) \sin(\varphi) n_y + \cos(\theta) n_z] d\theta d\varphi = r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi,$$

$$n_\theta dS = [\sin(\theta) \cos(\varphi) n_x + \cos(\theta) \sin(\varphi) n_y - \sin(\theta) n_z] d\theta d\varphi = -rr'_\theta \sin(\theta) d\theta d\varphi,$$

$$n_\varphi dS = [-\sin(\varphi) n_x + \cos(\varphi) n_y] d\theta d\varphi = rr'_\varphi d\theta d\varphi.$$

Подставляя в поверхностные интегралы, которые определены в приложении 1, 2 (сообщение I), выражения для  $\mathbf{n}dS$  и  $\mathbf{N}_{mm'}^1, \mathbf{M}_{mm'}^1, \mathbf{N}_{mm'}^3, \mathbf{M}_{mm'}^3$ , получаем

$$I_{mm'n'}^{11} = (-1)^{(m+m')} \int_0^\pi i [md_{0m}^n(\theta) b_{0m'}^{n'}(\theta) + m' d_{0m}^n(\theta) b_{0m'}^{n'}(\theta) b_{0m'}^{n'}(\theta)] \left[ \int_0^{2\pi} c_{mm'n'}^1(\theta, \varphi) d\varphi \right] d\theta,$$

$$I_{mm'n'}^{12} = (-1)^{(m+m')} \int_0^\pi -[b_{0m}^n(\theta) b_{0m'}^{n'}(\theta) \sin(\theta) + mm' d_{0m}^n(\theta) d_{0m'}^{n'}(\theta) / \sin(\theta)] \left[ \int_0^{2\pi} c_{mm'n'}^2(\theta, \varphi) d\varphi \right] - \frac{n(n+1)}{x} d_{0m}^n(\theta) b_{0m'}^{n'}(\theta) \sin(\theta) \left[ \int_0^{2\pi} c_{mm'n'}^3(\theta, \varphi) d\varphi \right] - i \frac{n'(n'+1)}{x_1} d_{0m}^n(\theta) d_{0m'}^{n'}(\theta) \sin \theta \times \left[ \int_0^{2\pi} c_{mm'n'}^4(\theta, \varphi) d\varphi \right] d\varphi,$$

$$I_{mm'n'}^{21} = (-1)^{(m+m')} \int_0^\pi \frac{n'(n'+1)}{x_1} b_{0m}^n(\theta) d_{0m'}^{n'}(\theta) \sin(\theta) \times \left[ \int_0^{2\pi} c_{mm'n'}^3(\theta, \varphi) d\varphi \right] - i \left[ m \frac{n'(n'+1)}{x_1} d_{0m}^n(\theta) d_{0m'}^{n'}(\theta) / \sin(\theta) \right] \times \left[ \int_0^{2\pi} c_{mm'n'}^4(\theta, \varphi) d\varphi \right] + [mm' d_{0m}^n(\theta) d_{0m'}^{n'}(\theta) / \sin(\theta)] + b_{0m}^n(\theta) b_{0m'}^{n'}(\theta) \sin(\theta) \left[ \int_0^{2\pi} c_{mm'n'}^5(\theta, \varphi) d\varphi \right] d\theta,$$

$$I_{mm'n'}^{22} = (-1)^{(m+m')} \int_0^\pi i [md_{0m}^n(\theta) b_{0m'}^{n'}(\theta) + m' d_{0m'}^{n'}(\theta) b_{0m}^n(\theta)] \left[ \int_0^{2\pi} c_{mm'n'}^6(\theta, \varphi) d\varphi \right] + \frac{n'(n'+1)}{x_1} b_{0m}^n(\theta) d_{0m'}^{n'}(\theta) \left[ \int_0^{2\pi} c_{mm'n'}^7(\theta, \varphi) d\varphi \right] - \frac{n(n+1)}{x} d_{0m}^n(\theta) b_{0m'}^{n'}(\theta) \left[ \int_0^{2\pi} c_{mm'n'}^8(\theta, \varphi) d\varphi \right] + im \frac{n'(n'+1)}{x_1} d_{0m}^n(\theta) d_{0m'}^{n'}(\theta) \left[ \int_0^{2\pi} c_{mm'n'}^9(\theta, \varphi) d\varphi \right] + im' \frac{n(n+1)}{x} d_{0m}^n(\theta) d_{0m'}^{n'}(\theta) \left[ \int_0^{2\pi} c_{mm'n'}^{10}(\theta, \varphi) d\varphi \right] d\theta,$$

$$I'_{mm'n'}^{11} = (-1)^{(m+m')} \int_0^\pi i [md_{0m}^n(\theta) b_{0m'}^{n'}(\theta) + m' d_{0m}^n(\theta) b_{0m'}^{n'}(\theta) b_{0m'}^{n'}(\theta)] \left[ \int_0^{2\pi} f_{mm'n'}^1(\theta, \varphi) d\varphi \right] d\theta,$$

$$I'_{mm'n'}^{12} = (-1)^{(m+m')} \int_0^\pi -[b_{0m}^n(\theta) b_{0m'}^{n'}(\theta) \sin(\theta) + mm' d_{0m}^n(\theta) d_{0m'}^{n'}(\theta) / \sin(\theta)] \left[ \int_0^{2\pi} f_{mm'n'}^2(\theta, \varphi) d\varphi \right] - \frac{n(n+1)}{x} d_{0m}^n(\theta) b_{0m'}^{n'}(\theta) \sin(\theta) \left[ \int_0^{2\pi} f_{mm'n'}^3(\theta, \varphi) d\varphi \right] - i \frac{n'(n'+1)}{x_1} d_{0m}^n(\theta) d_{0m'}^{n'}(\theta) \sin \theta \times \left[ \int_0^{2\pi} f_{mm'n'}^4(\theta, \varphi) d\varphi \right] d\theta,$$

$$\begin{aligned}
I'_{mmm'n'}{}^{21} &= (-1)^{(m+m')} \int_0^\pi \frac{n'(n'+1)}{x_1} b_{0m}^n(\theta) d_{0m'}^{n'}(\theta) \sin(\theta) \\
&\times \left[ \int_0^{2\pi} f_{mmm'n'}^3(\theta, \phi) d\phi \right] \\
&- im \frac{n'(n'+1)}{x_1} d_{0m}^n(\theta) d_{0m'}^{n'}(\theta) / \sin(\theta) \\
&\times \left[ \int_0^{2\pi} f_{mmm'n'}^4(\theta, \phi) d\phi \right] + [mm'd_{0m}^n(\theta) d_{0m'}^{n'}(\theta) / \sin(\theta)] \\
&+ b_{0m}^n(\theta) b_{0m'}^{n'}(\theta) \sin(\theta) \left[ \int_0^{2\pi} f_{mmm'n'}^5(\theta, \phi) d\phi \right] d\theta, \\
I'_{mmm'n'}{}^{22} &= (-1)^{(m+m')} \int_0^\pi i \left[ md_{0m}^n(\theta) b_{0m'}^{n'}(\theta) \right. \\
&+ m'd_{0m'}^{n'}(\theta) b_{0m}^n(\theta) \left. \right] \left[ \int_0^{2\pi} f_{mmm'n'}^6(\theta, \phi) d\phi \right] \\
&+ \frac{n'(n'+1)}{x_1} b_{0m}^n(\theta) d_{0m'}^{n'}(\theta) \left[ \int_0^{2\pi} f_{mmm'n'}^7(\theta, \phi) d\phi \right] \\
&- \frac{n(n+1)}{x} d_{0m}^n(\theta) b_{0m'}^{n'}(\theta) \left[ \int_0^{2\pi} f_{mmm'n'}^8(\theta, \phi) d\phi \right] \\
&+ im \frac{n'(n'+1)}{x_1} d_{0m}^n(\theta) d_{0m'}^{n'}(\theta) \left[ \int_0^{2\pi} f_{mmm'n'}^9(\theta, \phi) d\phi \right] \\
&+ im' \frac{n(n+1)}{x} d_{0m}^n(\theta) d_{0m'}^{n'}(\theta) \left[ \int_0^{2\pi} f_{mmm'n'}^{10}(\theta, \phi) d\phi \right] d\theta,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
c_{mmm'n'}^1(\theta, \phi) &= \exp[i\Delta_{m'm}] h_n(x) j_{n'}(x_1) r^2(\theta\phi), \\
c_{mmm'n'}^2(\theta\phi) &= \exp[i\Delta_{m'm}] u_n(x) j_{n'}(x_1) r^2(\theta\phi), \\
c_{mmm'n'}^3(\theta, \phi) &= \exp[i\Delta_{m'm}] h_n(x) j_{n'}(x_1) \frac{dr(\theta\phi)}{d\theta}, \\
c_{mmm'n'}^4(\theta, \phi) &= \exp[i\Delta_{m'm}] h_n(x) j_{n'}(x_1) \frac{dr(\theta\phi)}{d\theta}, \\
c_{mmm'n'}^5(\theta, \phi) &= \exp[i\Delta_{m'm}] h_n(x) v_{n'}(x_1) r^2(\theta\phi), \\
c_{mmm'n'}^6(\theta\phi) &= \exp[i\Delta_{m'm}] u_n(x) v_{n'}(x_1) r^2(\theta\phi), \\
c_{mmm'n'}^7(\theta, \phi) &= \exp[i\Delta_{m'm}] u_n(x) j_{n'}(x_1) \frac{dr(\theta\phi)}{d\phi}, \\
c_{mmm'n'}^8(\theta, \phi) &= \exp[i\Delta_{m'm}] h_n(x) v_{n'}(x_1) \frac{dr(\theta\phi)}{d\phi}, \\
c_{mmm'n'}^9(\theta, \phi) &= \exp[i\Delta_{m'm}] u_n(x) j_{n'}(x_1) \frac{dr(\theta\phi)}{d\theta}, \\
c_{mmm'n'}^{10}(\theta, \phi) &= \exp[i\Delta_{m'm}] h_n(x) v_{n'}(x_1) \frac{dr(\theta\phi)}{d\theta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{mmm'n'}^1(\theta, \phi) &= \exp[i\Delta_{m'm}] j_n(x) j_{n'}(x_1) r^2(\theta\phi), \\
f_{mmm'n'}^2(\theta\phi) &= \exp[i\Delta_{m'm}] v_n(x) j_{n'}(x_1) r^2(\theta\phi), \\
f_{mmm'n'}^3(\theta, \phi) &= \exp[i\Delta_{m'm}] j_n(x) j_{n'}(x_1) \frac{dr(\theta\phi)}{d\theta}, \\
f_{mmm'n'}^4(\theta, \phi) &= \exp[i\Delta_{m'm}] j_n(x) j_{n'}(x_1) \frac{dr(\theta\phi)}{d\theta}, \\
f_{mmm'n'}^5(\theta, \phi) &= \exp[i\Delta_{m'm}] j_n(x) v_{n'}(x_1) r^2(\theta\phi), \\
f_{mmm'n'}^6(\theta\phi) &= \exp[i\Delta_{m'm}] v_n(x) v_{n'}(x_1) r^2(\theta\phi), \\
f_{mmm'n'}^7(\theta, \phi) &= \exp[i\Delta_{m'm}] v_n(x) j_{n'}(x_1) \frac{dr(\theta\phi)}{d\phi}, \\
f_{mmm'n'}^8(\theta, \phi) &= \exp[i\Delta_{m'm}] j_n(x) v_{n'}(x_1) \frac{dr(\theta\phi)}{d\phi}, \\
f_{mmm'n'}^9(\theta, \phi) &= \exp[i\Delta_{m'm}] v_n(x) j_{n'}(x_1) \frac{dr(\theta\phi)}{d\theta}, \\
f_{mmm'n'}^{10}(\theta, \phi) &= \exp[i\Delta_{m'm}] j_n(x) v_{n'}(x_1) \frac{dr(\theta\phi)}{d\theta}, \\
u_n(x) &= \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x h_n(x)), \quad v_n(x) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x j_n(x)), \\
\Delta_{m'm} &= (m' - m), \quad b_{0m}^n(\theta) = \frac{d}{d\theta} d_{0m}^n(\theta), \\
x &= kr(\theta, \phi), \quad x_1 = \tilde{m}kr(\theta\phi), \quad k = 2\pi/\lambda,
\end{aligned}$$

$\lambda$  — длина волны падающего излучения,  $r(\theta, \phi)$  — уравнение поверхности частицы в сферической системе координат.

## Список литературы

- [1] Тучин В.В. Лазеры и волоконная оптика в биомедицинских исследованиях. Саратов: Изд-во СарГУ, 1998. 383 с.
- [2] Mishchenko M.I., Travis L.D. // Opt. Commun. 1994. Vol. 109. P. 16–21.
- [3] Mishchenko M.I., Travis L.D. // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 1998. Vol. 60. P. 309–324.
- [4] Меглинский И.В. // Квант. электрон. 2001. Т. 31. С. 1101.
- [5] Ильин В.П. Численный анализ. Часть 1. Новосибирск: ИВМиМГ, 2004. С. 335.
- [6] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. С. 608.
- [7] Башкатов А.Н. Автореф. канд. дис. Саратов, 2002.
- [8] Барун В.В., Иванов А.П. // Квант. электрон. 2010. Т. 40. Ч. 4. С. 371–376.
- [9] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973.