

## Потенциал в „зазоре“ тора: разложение по сферическим функциям

© Б.П. Кондратьев,<sup>1,2</sup> А.С. Дубровский,<sup>1</sup> Н.Г. Трубицына<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Удмуртский государственный университет,  
426034 Ижевск, Россия

<sup>2</sup> Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН,  
196140 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: kond@uni.udm.ru

(Поступило в Редакцию 8 ноября 2011 г. В окончательной редакции 28 февраля 2012 г.)

Развит метод решения задачи Дирихле для потенциалов тел с топологией тора, когда граничные условия заданы в виде рядов по сферическим функциям на кусках двух сферических поверхностей. Поставлена и решена задача о представлении внешнего потенциала однородного гравитирующего (или заряженного статическим электрическим зарядом) кругового тора вне вещества в особой („промежуточной“) сферической зоне. Решение получено в виде комбинации рядов Лапласа по четным положительным и нечетным отрицательным степеням радиуса-вектора пробной точки. Коэффициенты этого ряда получены в конечном аналитическом виде. Общий член ряда в пределах больших  $n$  стремится к нулю, так что ряд быстро сходится и радиусы сходимости определены геометрией тора. Указанное решение восполняет пробел в теории, связывая воедино найденные нами ранее два разложения в ряды Лапласа потенциала тора во „внутренней“ и „внешней“ сферических зонах пространства. Таким образом, доказано, что потенциал тора можно представить степенными рядами во всем свободном от вещества пространстве. Для контроля выкладок с помощью найденных рядов были рассчитаны эквипотенциалы тора.

### Введение

Многочисленные проблемы гидродинамики, физики и астрономии стимулировали глубокий интерес к исследованию силового поля кругового тора, состоящего из однородного гравитирующего (или заряженного статическим электричеством) вещества. С математической точки зрения задача о потенциале гравитирующего тора является трудной, и важный шаг в ее решении был сделан в [1], где пространственный потенциал тора удалось представить в интегральном виде.

На практике часто требуется знать численное значение внешнего потенциала (с заранее заданной точностью) для тел, у которых неизвестно аналитическое выражение силовой функции. Для этого используют представление потенциала тела в виде рядов по положительным или отрицательным степеням координат пробной точки (являющихся также рядами по сферическим функциям). Для тел с круговой симметрией такие ряды называются рядами Лапласа. Эффективность применения ряда Лапласа повышается, если коэффициенты ряда известны в конечном аналитическом виде. Однако в таком виде коэффициенты ряда известны лишь для весьма ограниченного числа тел (о состоянии проблемы см. [2]).

Задача о представлении внешнего потенциала рядом по сферическим функциям является актуальной и для однородного кругового тора. Хотя еще в девятнадцатом веке математик Риман [3] пытался представить потенциал тора двойным рядом Фурье, но в задаче Дирихле он не учел граничные условия и не довел решение до конца. Существенные шаги в этом направлении были сделаны в [4–6]. Напомним, что в цилиндрических координатах

поверхность кругового тора дается формулой

$$(R - R_0)^2 + x_3^2 = r_0^2. \quad (1)$$

Здесь  $R_0$  — радиус осевой окружности,  $r_0$  — радиус рукава. Как установлено в [4,5], следует различать два случая:

а) случай первый — разложение потенциала в первой („внутренней“) сферической зоне

$$0 \leq r \leq \sqrt{R_0^2 - r_0^2} \quad (2)$$

с представлением потенциала тора в этой области в виде ряда Лапласа по четным положительным степеням радиуса-вектора пробной точки  $r$

$$\varphi_{\text{torus}}(r, \theta) = D_0 + \sum_{m=1}^{\infty} D_{2m} r^{2m} P_{2m}(\cos \theta), \quad (3)$$

где в качестве первого (нулевого) члена выделен потенциал в центре тора

$$D_0 = \frac{8}{3} \pi G \rho R_0 r_0 \left[ \left( \frac{1}{k} + k \right) E(k) - \left( \frac{1}{k} - k \right) K(k) \right], \quad (4)$$

$$k = \frac{r_0}{R_0},$$

а все остальные коэффициенты выражаются через стандартную гипергеометрическую функцию Гаусса  ${}_2F_1(a; b; c; d)$

$$D_{2m} = 2\pi^2 G \rho r_0^2 (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{2^m m! R_0^{2m}} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}, 2, k^2\right), \quad (5)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots;$$

б) второй случай — разложение во внешней сферической оболочке

$$R_0 \leq r < \infty \quad (6)$$

с представлением в ряд „внешнего“ потенциала тора по сферическим функциям, содержащим обратные нечетные степени  $r$  в виде

$$\varphi_{\text{torus}}(r, \theta) = G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}}{r^{2n+1}} P_{2n}(\cos \theta), \quad \cos \theta = \frac{x_3}{r} \quad (7)$$

с коэффициентами

$$C_{2n} = (-1)^n \frac{\pi^2 \rho R_0^{2n+3} (1 - q^2)^{\frac{n}{2}} (2n - 1)!!}{3(n + 1) 2^{n-2}} \times \left\{ \left[ n + \left( \frac{3}{2} + 3n + 2n^2 \right) q^2 \right] P_n(\mu) - n \sqrt{1 - q^2} [1 + 2(n + 2)q^2] P_{n-1}(\mu) \right\}, \quad (8)$$

где для краткости обозначено

$$\mu = \frac{2 - q^2}{2\sqrt{1 - q^2}}, \quad q = \frac{r_0}{R_0}, \quad (9)$$

$q$  мы называем геометрическим параметром тора.

В частности, в (8) при  $n = 0$

$$C_0 = 2\pi^2 \rho R_0^3 q^2; \quad \varphi_{\text{torus}}(r) = \frac{2\pi^2 G \rho R_0 r_0^2}{r}. \quad (10)$$

Здесь и далее  $G$  — гравитационная постоянная,  $\rho$  — однородная плотность вещества в торе, полные эллиптические интегралы первого и второго родов с модулем  $k$  равны

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta. \quad (11)$$

Но на этом этапе проблему разложения потенциала тора вне вещества в ряд по сферическим функциям нельзя считать полностью решенной, так как указанные выше ряды (3) и (7) не представляют потенциал фигуры в промежуточной зоне внутри сферической оболочки с граничными радиусами [6]

$$\sqrt{R_0^2 - r_0^2} < r < R_0. \quad (12)$$

Возникает принципиальный вопрос — какими рядами можно представить потенциал вне вещества тора в указанной выше промежуточной сферической зоне (12)? В настоящей работе дан полный ответ на поставленную задачу. Излагаемый ниже метод не только позволит найти разложение потенциала тора в зоне (12), но и в кратком виде (что очень важно в задачах такой сложности) вновь получить разложения потенциала в зонах (2) и (6).

## Граничные условия для потенциала тора в „заворе“

Особенностью применяемого здесь метода является то, что авторы исходят из представления потенциала однородного кругового тора не в пространстве, а на оси симметрии  $Ox_3$  [1,7]

$$\frac{\varphi_{\text{torus}}(x_3)}{\frac{8}{3}\pi G \rho r_0 R_0} = J(k) = \left( \frac{1}{k} + k \right) E(k) - \left( \frac{1}{k} - k \right) K(k),$$

где

$$k = \frac{r_0}{\sqrt{R_0^2 + x_3^2}}. \quad (13)$$

Разложим сначала функцию  $J$  по степеням модуля эллиптических интегралов  $k$ :

$$J = -\frac{3\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(2n)!]^2 k^{2n+1}}{2^{4n+1} (n+1)! (n!)^3 (2n-1)!}. \quad (14)$$

Затем, раскладывая входящие сюда  $k^{2n+1}$  по степеням  $x_3$  сначала в окрестности 0, а затем в окрестности  $\infty$ , получим соответственно

а) разложение потенциала на оси симметрии тора  $Ox_3$  вблизи начала координат

$$J = \frac{3\pi q}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x_3^{2n}}{R_0^{2n}} \frac{(2n)! {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; n + \frac{1}{2}; 2; q^2\right)}{2^{2n+1} (n!)^2} \quad (15)$$

с радиусом сходимости  $\sqrt{R_0^2 - r_0^2}$ ;

б) разложение потенциала на оси симметрии в окрестности  $\infty$

$$J = \frac{3\pi q}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_0^{2n+1}}{x_3^{2n+1}} \frac{(2n)! {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; -n; 2; q^2\right)}{2^{2n+1} (n!)^2} \quad (16)$$

с радиусом сходимости  $R_0$ .

Далее переходим к разложению пространственного потенциала тора вне вещества в случае а), т.е. внутри сферы  $\sqrt{R_0^2 - r_0^2}$ . Для этого заменим в (15) компоненту  $x_3$  на пространственный радиус-вектор  $r$  и, кроме того, вставим полином Лежандра  $P_{2n}(\cos \theta)$ :

$$J(r, \theta) = \frac{3\pi q}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{r^{2n}}{R_0^{2n}} \frac{(2n)! {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; n + \frac{1}{2}; 2; q^2\right)}{2^{2n+1} (n!)^2} \times P_{2n}(\cos \theta). \quad (17)$$

Основанием для таких действий является то, что потенциал вне вещества тела — гармоническая функция, поэтому указанное продолжение с оси тора на любую пространственную точку является законной операцией.

Рассуждая по аналогии в случае б), пространственное разложение потенциала на оси симметрии вне сферы  $R_0$  получим из (16) в виде

$$J(r, \theta) = \frac{3\pi q}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R_0^{2n+1}}{r^{2n+1}} \frac{(2n)! {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; -n; 2; q^2\right)}{2^{2n+1} (n!)^2} \times P_{2n}(\cos \theta). \quad (18)$$

Цель в том, что разложения (17) и (18) позволяют найти граничные условия для потенциала тора. А именно значение потенциала тора на внутренней сфере  $r = \sqrt{R_0^2 - r_0^2}$ , согласно (17), будет равно

$$J_{\text{inside}} = \frac{3\pi q}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-q^2)^n \frac{(2n)! {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; n + \frac{1}{2}; 2; q^2\right)}{2^{2n+1}(n!)^2} \times P_{2n}(\cos \theta). \quad (19)$$

Граничным же условием для „внешнего“ потенциала тора на внешней сфере оболочки  $r = R_0$ , согласно (18), будет

$$J_{\text{outside}} = \frac{3\pi q}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)! {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; -n; 2; q^2\right)}{2^{2n+1}(n!)^2} P_{2n}(\cos \theta). \quad (20)$$

### Решение задачи Дирихле для потенциала тора в „зазоре“

Для представления потенциала тора в промежуточной зоне (12) надо при найденных выше граничных условиях (19) и (20) решить задачу Дирихле. Применим следующий прием. По заданным граничным условиям подберем параметры  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  так, чтобы разложение потенциала

$$\frac{\varphi_{\text{torus}}(r, \theta)}{\frac{8}{3}\pi G \rho r_0 R_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \alpha_n r^{2n} + \frac{\beta_n}{r^{2n+1}} \right) P_{2n}(\cos \theta) \quad (21)$$

давало граничное условие в виде (19) для нижней стороны „зазора“ (при  $r = R_0 \sqrt{1 - q^2}$  и граничное условие (20) при  $r = R_0$  с другой (внешней) стороны зазора. Отсюда следует система уравнений для коэффициентов  $\alpha_n$  и  $\beta_n$

$$\alpha_n (R_0^2 - r_0^2)^n + \frac{\beta_n}{(R_0^2 - r_0^2)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{3\pi q}{2} (-1)^n \frac{(R_0^2 - r_0^2)^n}{R_0^{2n}} \times \frac{(2n)! {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; n + \frac{1}{2}; 2; q^2\right)}{2^{2n+1}(n!)^2},$$

$$\alpha_n R_0^{2n} + \frac{\beta_n}{R_0^{2n+1}} = \frac{3\pi q}{2} (-1)^n \frac{(2n)! {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; -n; 2; q^2\right)}{2^{2n+1}(n!)^2}. \quad (22)$$

Решая эту систему, находим

$$\alpha_n = \frac{3}{2} \frac{\pi q (-1)^n (2n)! \left[ {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -n; 2; q^2\right) - (1 - q^2)^{2n+\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}; 2; q^2\right) \right]}{R_0^{2n} 2^{2n+1} (n!)^2 [1 - (1 - q^2)^{2n+\frac{1}{2}}]},$$

$$\beta_n = \frac{3}{2} \times \frac{\pi q (-1)^n (2n)! (1 - q^2)^{2n+1/2} \times \left[ {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}; 2; q^2\right) - {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -n; 2; q^2\right) \right]}{2^{2n+1} (n!)^2 [1 - (1 - q^2)^{2n+\frac{1}{2}}]} R_0^{2n+1}. \quad (23)$$

Подставляя далее надежные значения  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  из (23) в (21) и объединяя члены с гипергеометрическими функциями, получим

$$\frac{\varphi_{\text{torus}}(r, \theta)}{\frac{8}{3}\pi G \rho r_0 R_0} = \frac{3}{4} \pi q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{[1 - (1 - q^2)^{2n+\frac{1}{2}}] (n!)^2} \times \{ \Phi_1(n) - \Phi_2(n) \} P_{2n}(\cos \theta), \quad (24)$$

где обозначено

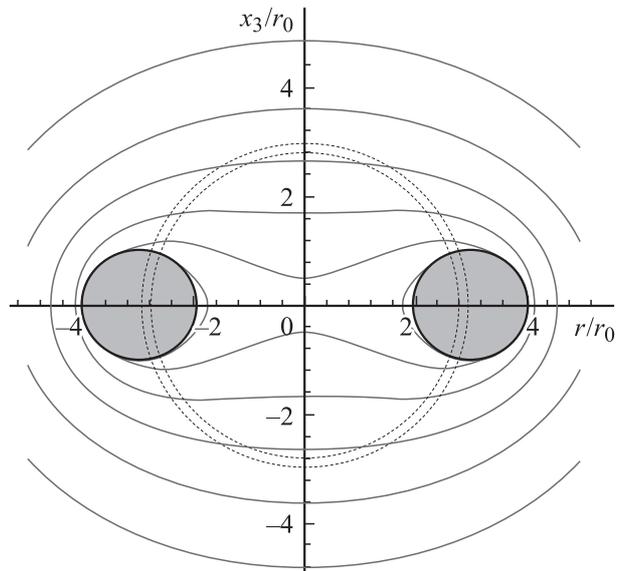
$$\Phi_1(n) = \left[ \left( \frac{r}{R_0} \right)^{2n} - (1 - q^2)^{2n+\frac{1}{2}} \left( \frac{R_0}{r} \right)^{2n+1} \right]$$

$$\times {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -n; 2; q^2\right),$$

$$\Phi_2(n) = (1 - q^2)^{2n+\frac{1}{2}} \left[ \left( \frac{r}{R_0} \right)^{2n} - \left( \frac{R_0}{r} \right)^{2n+1} \right]$$

$$\times {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}; 2; q^2\right). \quad (25)$$

Формулы (24) и (25) и решают поставленную выше задачу, представляя разложение потенциала тора вне его вещества в промежуточном „зазоре“ рядом по сферическим функциям, члены которого содержат четные положительные и нечетные отрицательные степени радиуса-вектора пробной точки  $r$ . Коэффициенты этого ряда получены нами в конечном виде. Кроме того, общий член ряда (24) в пределе больших  $n$  стремится к нулю и



Меридиональные сечения эквипотенциальных поверхностей однородного кругового тора. Геометрический параметр тора  $q = \frac{1}{3}$ . Жирные кружки, заштрихованные серым цветом, — меридиональные сечения рукава самого тора. Промежуточная зона выделена двумя пунктирными окружностями. Расчет потенциала производился по найденным рядам во всех трех сферических зонах.

этот ряд заведомо сходится, так что радиусы сходимости сверху и снизу „зазора“ нам известны.

Для контроля выкладок рассчитали эквипотенциали тора, пользуясь представлением потенциала тора указанными выше рядами во всех трех зонах. Результаты этих расчетов показаны на рисунке, где было взято  $q = 1/3$ , особая зона, выделенная двумя пунктирными окружностями, выглядит узкой. Однако с увеличением значения геометрического параметра тора будет увеличиваться и толщина особой сферической зоны (12). Так, в пределе  $q = 1$  (тор без внутреннего отверстия) эта зона начинается уже прямо от начала координат и простирается до осевой окружности тора  $0 < r < R_0$ .

## Обсуждение

Представление потенциала однородного кругового тора вне вещества с помощью ряда по сферическим функциям имеет важное значение для астрономии и физики. На практике при расчетах особенно удобно, когда коэффициенты этого ряда известны в конечном виде. Такая работа и была проделана авторами: все коэффициенты в полученных рядах для потенциала тора теперь известны в конечном виде. Как показано в работах [4–6], для тора в связи с его особой топологией существуют три сферические зоны, в каждой из которых разложение потенциала обладает своими характерными особенностями. В первой и третьей зонах это будут ряды Лапласа соответственно по четным положительным и нечетным отрицательным степеням радиуса-вектора пробной точки.

Но здесь выясняется весьма любопытный факт: оказывается, для тора имеется еще одна (промежуточная) зона, где прежние классические методы в виде рядов Лапласа уже не годятся. Возникает вопрос — каким должен быть ряд для потенциала в „зазоре“ тора. На первом этапе нами изучался вариант с представлением потенциала тора в виде ряда Лорана, для чего было получено одно неизвестное ранее дифференциальное уравнение, которому должен удовлетворять потенциал тора на оси симметрии (13):

$$(r_0^2 - R_0^2 - x_3^2)x_3(R_0^2 + x_3^2) \frac{d^2\varphi_{\text{torus}}}{dx_3^2} + [-x_3^4 + 3r_0^2x_3^2 + R_0^2(R_0^2 - r_0^2)] \frac{d\varphi_{\text{torus}}}{dx_3} + x_3^3\varphi_{\text{torus}} = 0. \quad (26)$$

Однако после трудоемких попыток поиск решения задачи с применением рекуррентных соотношений, полученных на базе уравнения (26), не дал конкретных результатов.

Искомое решение поставленной задачи удалось получить на совершенно другом пути, представив потенциал тора в третьей, „промежуточной“ зоне в виде комбинации двух рядов Лапласа. Подчеркнем, что коэффициенты найденного комбинированного ряда получены нами

в конечном виде через гипергеометрическую функцию или через полиномы Лежандра от геометрического параметра тора  $q$ .

Новизна решенной здесь задачи связана с методом нахождения граничных условий в задаче Дирихле. Эти граничные условия (19) и (20) были найдены в виде рядов по сферическим функциям. В отличие от [8], где решалась более простая задача Дирихле по представлению потенциала в виде ряда во внутренней области широкого плоского материального кольца, в нашем случае для тора с объемной (в этом все дело) плотностью пробная точка не может находиться внутри фигуры.

Комбинированный ряд (21) или (24) связывает едиными найденными нами ранее два разложения в ряды Лапласа потенциала тора во „внутренней“ и „внешней“ сферических зонах пространства. Таким образом, возможность представления потенциала тора вне вещества по сферическим функциям строго доказана.

## Список литературы

- [1] Кондратьев Б.П. Теория потенциала. Навые методы и задачи с решениями. М.: Мир, 2007. 512 с.
- [2] Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холишевников К.В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, 1988. 272 с.
- [3] Риман Б. О потенциале тора. Сочинения. М.; Л.: ОГИЗ, 1948. С. 367–372.
- [4] Кондратьев Б.П., Дубровский А.С., Трубицына Н.Г., Мухаметшина Э.Ш. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 2. С. 17–21.
- [5] Кондратьев Б.П., Трубицына Н.Г. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 1. С. 23–26.
- [6] Кондратьев Б.П. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 12. С. 105–106.
- [7] Кондратьев Б.П. Теория потенциала и фигуры равновесия. Москва; Ижевск: РХД, 2003. 624 с.
- [8] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968. 800 с.