Журнал технической физики, 2012, том 82, вып. 11

01;03

Влияние электрического поля на форму пузырька в проводящей жидкости

© А.В. Тимофеев

Национальный исследовательский центр „Курчатовский институт",
123182 Москва, Россия
e-mail: avtim@nfi.kiae.ru

(Поступило в Редакцию 11 октября 2011 г. В окончательной редакции 28 февраля 2012 г.)

Найдено, что пузырек в проводящей жидкости вытягивается вдоль электрического поля. Получены выражения для коэффициента растяжения пузырька в зависимости от характерных параметров задачи.

1. В ряде задач необходимо исследовать геометрические параметры пузырьков в жидкости в присутствии внешнего электрического поля. Так, согласно современным воззрениям, пробой жидкого диэлектрика происходит посредством зажигания разрядов в микропузырьках (см., например, [1], стр. 193). При малом размере пузырьков условия пробоя определяются левой ветвью кривой Пашена, которая характеризуется резким уменьшением напряжения пробоя с удлинением разрядного промежутка. Поэтому изменение размеров пузырька под действием электрического поля может оказаться существенным фактором, определяющим условия пробоя.

Пузырьки также играют важную роль в процессе съема тепла с нагревающей поверхности. В этом случае электрическое поле влияет на условия отрыва пузырька от поверхности, а вместе с этим и на весь процесс теплосъема [2].

Состояние инородных включений (жидких и газовых) в жидкость, находящуюся в электрическом поле, анализировалось в ряде работ (см., например, [3,4]). Так, в [4] было найдено, что вне зависимости от соотношения диэлектрических проницаемостей непроводящих основной жидкости и включения последние вытягиваются вдоль электрического поля. В работе [4] рассматривались также проводящие включения в непроводящую жидкость. Согласно [4], проводимость включения эквивалентна бесконечно большой диэлектрической проницаемости. Однако в случае непроводящих включений, например пузырьков, в проводящую жидкость такой подход оказался бы некорректным. В настоящей работе показано, что при нахождении электрического поля проводящую жидкость действительно можно считать эквивалентной диэлектрику с бесконечно большой диэлектрической проницаемостью. В то же время пондеромоторная сила, действующая на пузырек, должна рассчитываться по реальной диэлектрической проницаемости жидкости. Такой подход оставляет в силе вывод о растяжении пузырька вдоль электрического поля. В настоящей работе получены выражения для коэффициента растяжений в зависимости от параметров задачи.

2. Обычно в курсах теории электричества проводится различие между диэлектриками и проводниками. Между тем имеются среды, при анализе электрических явлений в которых необходимо учитывать как поляризуемость, присущую диэлектрикам, так и проводимость. Такой средой является, например, обычная вода.

Плотность свободного заряда ρ меняется в проводящей среде в соответствии с уравнением

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ — плотность тока, σ — проводимость.

Мгновенные значения ρ могут быть найдены из уравнения Пуассона

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho. \tag{2}$$

где $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, ε — диэлектрическая проницаемость.

Сопоставление (1) с (2) показывает, что распределение свободного заряда в проводящей поляризуемой среде устанавливается за время порядка $T \approx \varepsilon/4\pi\sigma$. Оно необходимо для накопления свободного заряда, нейтрализующего поляризационный. Поэтому для быстрых процессов с характерным временем $t \ll T$ можно игнорировать проводимость среды, используя для приближенного определения электрического поля уравнение

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = 0, \tag{3}$$

а для медленных с $t \gg T$ — ее поляризуемость. В последнем случае электрическое поле можно находить из уравнения

$$\mathrm{div}\mathbf{j} = 0. \tag{4}$$

В случае процессов, гармонических во времени и пропорциональных $\exp(-i\omega t)$, как проводимость, так и поляризуемость среды учитываются введением

$$\varepsilon_{\mathrm{eff}} = \varepsilon + \frac{4\pi i \sigma}{\omega}.$$

Уравнения (3) и (4) переходят друг в друга при замене $\varepsilon \leftrightarrow \sigma$. Это хорошо известное обстоятельство позволяет переносить результаты, полученные для одной из сред, на другую.

Из (4) следует, что в установившемся состоянии на резкой границе двух проводящих сред должны выполняться соотношения

$$E_{1,t} = E_{2,t}, \tag{5}$$

$$\sigma_1 E_{1,n} = \sigma_2 E_{2,n}, \tag{6}$$

где индексы t и n отмечают тангенциальные и нормальные компоненты электрического поля соответственно.

Поверхностная плотность свободного заряда, выступающего на границе, дается выражением

$$Q = \frac{1}{4\pi}\,(\varepsilon_1 E_{1,n} - \varepsilon_2 E_{2,n}). \tag{7}$$

Из (6), (7) следует, что поверхностный заряд отсутствует, если $\varepsilon_1/\sigma_1 = \varepsilon_2/\sigma_2$. Для плавно неоднородных сред это условие принимает вид $\sigma(\mathbf{r})/\varepsilon(\mathbf{r}) = \mathrm{const}$. Данное условие можно найти, например, в [3]. Заметим, что в этой работе при анализе пространственного распределения электрического поля предполагается отсутствие свободных зарядов даже в случае непроводящих пузырьков в проводящей жидкости, когда условие $\sigma(\mathbf{r})/\varepsilon(\mathbf{r}) = \mathrm{const}$ не выполняется. Поэтому выводы работы [3], относящиеся к этому интересующему нас случаю, неверны.

Выражение для объемной плотности пондеромоторной силы, действующей на среду со стороны электрического поля, справедливое в присутствии как поляризационных, так и свободных зарядов, удобно представить в тензорном виде

$$f_i = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\varepsilon E_i E_k + \frac{1}{2}\left(\tau\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} - \varepsilon\right)E^2\delta_{ik}\right), \tag{8}$$

где τ — плотность среды (см., например, [5], стр. 162).

Из (8) получаем, что в однородной среде ($\varepsilon = \mathrm{const}$) в состоянии равновесия должно выполняться условие

$$P = P' - \frac{1}{8\pi}\,\tau\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\,E^2 = \mathrm{const},$$

где P' — гидростатическое давление.

Если среда имеет резкую границу, то на нее наряду с давлением P действует также дополнительное пондеромоторное давление

$$P_E = \frac{1}{8\pi}\,\varepsilon(E_t^2 - E_n^2). \tag{9}$$

Здесь положительным считается направление наружу от данной среды.

Выражение (9) согласуется с известными представлениями о том, что силовые линии электрического поля отталкиваются друг от друга (слагаемое, пропорциональное E_t^2) и стремится сократить свою длину (слагаемое, пропорциональное E_n^2).

3. Одной из практически интересных задач, при решении которой могут быть полезны приведенные соотношения, является задача об электрическом поле в проводящей среде в присутствии инородного включения и о воздействии поля на само включение. Данная задача возникает, например, при исследовании пробоя жидкости в присутствии пузырьков.

В работе [4] найдено, что инородные включения в непроводящую среду в присутствии электрического поля стремятся принять форму, близкую к эллипсоидальной. Можно показать, что это положение справедливо и для проводящих сред. При нахождении электрического поля в таких средах, следуя [3,4], воспользуемся упомянутой выше аналогией с диэлектриками. Производя замену $\varepsilon \to \sigma$ в выражениях, полученных для диэлектрической среды с инородным включением в форме эллипсоида (см., например, [6], стр. 63), находим, что в интересующей нас задаче электрическое поле внутри эллипсоида равно

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0\left[1 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1\right)G\right]^{-1}, \tag{10}$$

где $\mathbf{E}_0$ — электрическое поле вдали от эллипсоида, индексом „1“ отмечены величины, характеризующие основную среду, „2“ — включения,

$$G = \frac{1}{\gamma^2 - 1}\left[\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}\,\ln\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}\right) - 1\right],$$

$\gamma = a/b$, a — большая полуось эллипсоида, b — малая полуось. Предполагается, что эллипсоид представляет собой фигуру вращения относительно $\mathbf{E}_0$ и вытянут в этом направлении, коэффициент растяжения $\gamma > 1$, см. ниже. Величина G уменьшается от $G = 1/3$ для сферы ($\gamma = 1$), до $G \to 0$ для „игольчатого“ включения ($\gamma \to \infty$).

Электрическое поле на внутренней поверхности эллипсоида — в пузырьке — дается выражениями

$$E_{2,t} = (1 + \gamma^{-4}\,\mathrm{ctg}^2\,\theta)^{-1/2} E_2,$$

$$E_{2,n} = (1 + \gamma^{4}\,\mathrm{tg}^2\,\theta)^{-1/2} E_2,$$

где θ — полярный угол в сферической системе координат, ось которой параллельна электрическому полю $\mathbf{E}_0$.

Электрическое поле на внешней поверхности — в жидкости может быть найдено с помощью соотношений (5), (6). Используя также (9), находим полное давление, оказываемое электрическим полем на границу пузырек–жидкость

$$P'_E = P_{E,1} - P_{E,2}$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left\{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)E_{2,t}^2 + \left[\varepsilon_2 - \varepsilon_1\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2\right]E_{2,n}^2\right\}. \tag{11}$$

В некоторых случаях проводящая среда, граничащая с непроводящей, оказывается аналогичной диэлектрику с $\varepsilon \to \infty$. Так, например, рассмотрим проводящее включение в диэлектрик. Согласно (10), для электрического поля внутри включения получаем $\mathbf{E}_2 \approx \mathbf{E}_0\,\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\,\frac{1}{G} \to 0$, однако пондеромоторное давление на границу включения оказывается отличным от нуля

$P'_E \approx -\frac{\varepsilon_1}{8\pi}\left(\frac{E_0}{G}\right)^2(1+\gamma^4\,\mathrm{tg}^2\,\theta)^{-1}$ (см. (11)). В силу принципа эквивалентности, упомянутого в начале предыдущего раздела, то же самое выражение для величины P'_E получили бы, положив $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \to \infty$. В то же время данный принцип несправедлив в случае непроводящего включения в проводящую среду (пузырек в воде). Действительно, при $\sigma_2/\sigma_1 \to 0$ как электрическое поле в пузырьке, так и пондеромоторное давление на пузырек, конечны (см. (8), (10)). Однако, заменяя в (10), (11) отношение σ_2/σ_1 на $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \to \infty$ и положив $\varepsilon_1 \to \infty$, нашли бы, что $P'_E \to \infty$. Этот вывод противоречит существованию стационарных пузырьков в жидкостях в присутствии внешнего электрического поля.

Наряду с пондеромоторным давлением на поверхность пузырька действует поверхностное натяжение $P_\mu = \mu C$, где μ — коэффициент поверхностного натяжения, C — кривизна поверхности пузырька.

Условие баланса сил на поверхности пузырька имеет вид
$$P_1 + P_\mu(\theta) + P'_E(\theta) = P_2.$$

На полюсе пузырька $(\theta = 0)$ $E_{2,t} = 0$, $E_{2,n} = E_2$, в то время как на экваторе $(\theta = \pi/2)$ $E_{2,t} = E_2$, $E_{2,n} = 0$. В наиболее интересном случае пузырьков в воде справедливы соотношения $\varepsilon_1/\varepsilon_2 \gg 1$, $\sigma_1/\sigma_2 \to \infty$, поэтому пондеромоторное давление жидкости на пузырек на экваторе превышает давление на полюсе. Разность давлений $P_{b,E}(\theta)$ может быть скомпенсирована за счет вытягивания пузырька вдоль внешнего электрического поля. При этом кривизна поверхности пузырька, а вместе с ней и поверхностное натяжение возрастают у полюса и уменьшаются у экватора.

Условие, при выполнении которого включение в среду вытягивается вдоль электрического поля, имеет вид
$$\varepsilon_1\left[1+\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2\right] > 2/\varepsilon_2.$$

Легко видеть, что данное условие обеспечивает вытягивание включения и в том случае, когда одна из величин $P_{b,E}(\pi/2)$, $P_{b,E}(0)$ или они обе оказываются отрицательными, и пондеромоторное давление на поверхности пузырька меняет знак.

В некоторых случаях проводящая среда, граничащая с непроводящей, ведет себя как диэлектрик с $\varepsilon \to \infty$. Так, например, рассмотрим проводящее включение в диэлектрик. Согласно (10), для электрического поля внутри включения получаем $\mathbf{E}_2 \approx \mathbf{E}_0\,\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\,\frac{1}{G} \to 0$, однако пондеромоторное давление на границу включения оказывается отличным от нуля $P'_E \approx -\frac{\varepsilon_1}{8\pi}\left(\frac{E_0}{G}\right)^2(1+\gamma^4\,\mathrm{tg}^2\,\theta)^{-1}$ (см. (11)). В силу принципа эквивалентности, упомянутого в начале предыдущего раздела, то же самое выражение для величины P'_E получили бы, положив $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \to \infty$. В то же время данный принцип несправедлив в случае непроводящего включения в проводящую среду (пузырек в воде). Действительно, при $\sigma_2/\sigma_1 \to 0$ как электрическое поле в пузырьке, так и пондеромоторное давление на пузырек конечны (см. (8), (10)). Однако, заменяя в (10), (11) отношение σ_2/σ_1 на $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \to 0$ и положив $\varepsilon_1 \to \infty$, мы нашли бы, что $P'_E \to \infty$. Этот вывод противоречит существованию стационарных пузырьков в жидкостях в присутствии внешнего электрического поля.

4. Последовательный анализ интересующей нас проблемы предполагает решение уравнения равновесия согласованно с нахождением распределения электрического поля, искажаемого пузырьком. Эта трудоемкая задача, по-видимому, может быть решена лишь численно. Она существенно упрощается, если принять, как это было сделано в [3,4], что пузырек имеет форму эллипсоида. Состояние такого пузырька характеризуется тремя параметрами: полуосями эллипса a, b и давлением газа внутри пузырька P_2.

Давление связано с объемом пузырька соотношением $P_2V = \mathrm{const}$, которое удобно представить в виде [4]
$$P_2 = P_{\mu,0}\,\frac{r_0^3}{ab^2}, \tag{12}$$
где r_0 — радиус пузырька, если бы он имел форму сферы и находился под давлением $P_{\mu,0} = 2\mu/r_0$. Радиус пузырька в отсутствие электрического поля r^* определяется равенством
$$2\mu r_0^2 = 2\mu r^{*2} + P_1 r^{*3}.$$

Уравнение (12) следует дополнить уравнениями равновесия поверхности пузырька при двух значениях полярного угла θ, например, при $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$:
$$P_1 + \gamma\,\frac{r_0}{b}\,P_{\mu,0} + \left[\varepsilon_2 - \varepsilon_1\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2\right]P_{E,0} = P_2, \tag{13}$$
$$P_1 + \frac{1}{2}\,\frac{1+\gamma^2}{\gamma^2}\,\frac{r_0}{b}\,P_{\mu,0} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)P_{E,0} = P_2, \tag{14}$$
где введено обозначение $P_{E,0} = \frac{1}{8\pi}E_2^2$. Для кривизны поверхности пузырька использованы выражения $C(0) = 2\gamma/b$, $C(\pi/2) = (1+\gamma^2)/(b\gamma^2)$, см. [3].

Следуя [4], систему уравнений (12)–(14) удобно представить в виде алгебраического (кубического) уравнения для $P_{E,0}$:
$$\alpha P_{E,0}^3 - \beta P_{E,0} - P_1 = 0,$$
где
$$\alpha = \frac{8}{\gamma P_{\mu,0}^2}\left(\frac{B}{A}\right)^3,\ \beta = \varepsilon_1 + \frac{1}{A}\left(\frac{1+\gamma^2}{\gamma^2}\,B - 2\gamma\varepsilon_2\right),$$
$$A = 2\gamma - \frac{1+\gamma^2}{\gamma^2},\ B = \varepsilon_1\left(1+\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2\right) - 2\varepsilon_2.$$

Будем считать, что выполняется условие $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$. Такое соотношение между значениями диэлектрической проницаемости выполняется для наиболее интересного случая пузырьков в воде. В слабом электрическом поле $P_E^* = \varepsilon_1 P_{E,0} \ll \max(P_{\mu,0}, P_{\mu,0}^{2/3} P_1^{1/3})$ форма пузырька близка к сферической ($\delta = \gamma - 1 \ll 1$, $\delta \propto E_0^2$):

$$\delta \approx \frac{P_E^*}{2P_{\mu,0}} \begin{cases} \left(\frac{P_{\mu,0}}{P_1}\right)^{1/3} & (P_1 \gg P_{\mu,0}), \\ 1 & (P_1 \ll P_{\mu,0}). \end{cases} \quad (15)$$

В сильном поле $P_E^* \gg \max(P_{\mu,0}, P_{\mu,0}^{2/3} P_1^{1/3})$, когда $\gamma \gg 1$, растяжение пузырька с увеличением электрического поля замедляется

$$\gamma \approx \left(\frac{P_E^*}{P_{\mu,0}}\right)^{1/2} \begin{cases} \left(\frac{P_E^*}{P_1}\right)^{1/3} & (P_1 \gg P_E^*), \\ 1 & (P_1 \ll P_E^*). \end{cases} \quad (16)$$

Оценим величину электрического поля, при котором форма пузырька в обычной воде заметно отличается от сферической. В интересующем нас случае $\sigma_1/\sigma_2 \to \infty$, поэтому $P_E^* \approx \frac{\varepsilon_1}{8\pi} \alpha E_0^2$, где $\alpha \approx 9/4$ при $\gamma - 1 = \delta \ll 1$ и $\alpha \approx 1$ при $\gamma \gg 1$.

Предположим, что полное гидростатическое давление в воде $P_1 = 1\,\mathrm{atm}$, а радиус пузырька $r^* = 1\,\mathrm{mm}$, тогда $P_1 \gg P_\mu^* = 2\mu/r^*$, и из соотношения $PV = \mathrm{const}$ находим $P_{\mu,0} \approx (P_\mu^*)^{3/2}/P_1^{1/2} \ll P_1$. При этих условиях приводим (15), (16) к виду

$$\gamma - 1 \approx \begin{cases} \frac{P_E^*}{2P_\mu^*} & (P_\mu^* \gg P_E^*), \\ \left(\frac{P_E^*}{P_\mu^*}\right)^{3/4} & (P_1 \gg P_E^* \gg P_{\mu,}^*), \\ \left(\frac{P_E^*}{P_\mu^*}\right)^{1/2} \left(\frac{P_1}{P_\mu^*}\right)^{1/4} & (P_E^* \gg P_1). \end{cases}$$

Из последних выражений следует естественный вывод, что пузырек будет заметно деформирован электрическим полем, если пондеромоторное давление по порядку величины сравняется с поверхностным натяжением. Для этого электрическое поле по порядку величины должно превышать $10\,\mathrm{kV/cm}$.

Время установления рассматриваемого нами стационарного состояния дается выражением $T \approx \varepsilon/4\pi\sigma$ (см. выше). Для обычной воды ($\varepsilon \approx 80$, $\sigma \approx 10^8\,\mathrm{s}^{-1}$) оно равно по порядку величины $T \approx 10^{-7}\,\mathrm{s}$. В результате дистилляции проводимость падает и соответственно время T возрастает примерно на четыре порядка. Дистилляция в вакууме уменьшает проводимость еще на два порядка. По своим характеристикам к последней субстанции близок глицерин ([7], стр. 326).

В проводящей жидкости наряду с пондеромоторной силой действует также сила Ампера. Соотношение между этими силами можно оценить, сравнивая величины $\frac{\varepsilon}{8\pi} E^2$ и $\frac{1}{8\pi} B^2$. Сравнение показывает, что при выполнении условия $\varepsilon \gg \left(\frac{4\pi\sigma r_0}{c}\right)^2$ сила Ампера должна слабо влиять на распределение напряжени в жидкости.

Автор благодарен В.А. Жильцову и А.А. Сковороде за полезные обсуждения.

Работа проведена при финансовой поддержке Министерства образования и наука РФ в рамках реализации ФЦП „Научные и педагогические кадры инновационной России“ на 2009–2012 гг., а также Госконтрактом 16.513.11.3090. Работа (частично) поддержана грантом НШ-65382.2010.2 президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ.

Список литературы

[1] *Энциклопедия* низкотемпературной плазмы. Т. 2 / Под ред. В.Е. Фортова. М.: Наука, 2000. 634 с.
[2] *Jalaal M., Khorshidi B., Esmailzadeh E., Mohammedi F.* // Chem. Eng. Commum. 2010. Vol. 198. N 1. P. 19–32.
[3] *O'Konski C.T., Harris F.E.* // J. Phys. Chem. 1957. Vol. 61. N 9. P. 1172–1174.
[4] *Garton C.C., Krasucki Z.* // Proc. Roy. Soc. 1964. Vol. A280. N 1381. P. 211–226.
[5] *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: ГИТТЛ, 1957. 620 с.
[6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
[7] *Таблицы* физических величин / Под ред. И.К. Кикоина. М. М.: Атомиздат, 1976. 1006 с.