

03;04;12

## Влияние радиуса проводника на динамику электрического взрыва: магнитогидродинамическое моделирование

© А.Е. Борисевич, С.Л. Черкас<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Научно-исследовательский институт ядерных проблем при Белорусском государственном университете, 220050 Минск, Белоруссия  
e-mail: bary@inp.bsu.by

(Поступило в Редакцию 11 января 2011 г. В окончательной редакции 11 января 2012 г.)

На основе магнитогидродинамических расчетов исследованы влияние радиуса проводника на динамику электрического взрыва и скорость обрыва тока в цепи. Показано, что при прочих равных условиях при уменьшении радиуса проводника характерное время обрыва тока стремится к некоторому минимальному значению.

### Введение

Электрический взрыв проводников широко используется в силовоточной электронике и технике высоких напряжений [1,2]. Время обрыва тока в цепи является важным параметром, который необходимо минимизировать. Известно, что при уменьшении времени „накачки“ проволоки характерное время электрического взрыва уменьшается. Другим способом уменьшить характерное время электрического взрыва является уменьшение радиуса проводника. Возникает вопрос, в какой степени можно ускорить электрический взрыв и тем самым увеличить напряжение на нагрузке, если при прочих равных условиях уменьшать радиус взрывающихся проводников так, чтобы их общее сечение оставалось неизменным. В настоящей работе авторы исследуют этот вопрос на основе магнитогидродинамического моделирования. Поскольку в литературе отсутствуют достаточно полные данные по проводимости меди в широком диапазоне давлений и температур, авторы используют эмпирическую формулу для проводимости, выведенную на основе наших экспериментов с медными проволоками радиусом  $50 \mu\text{m}$ , проведенных в НИИ.ЯП.

### 1. Уравнения магнитной гидродинамики

Наиболее полную информацию о механизме электрического взрыва дает магнитогидродинамическое моделирование [3–6].

Уравнения магнитной гидродинамики имеют следующий вид [3,7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r(q, t)}{\partial t} &= u(q, t), \\ \frac{\partial v(q, t)}{\partial t} &= \frac{\partial(ru)}{\partial q}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + r \frac{\partial p}{\partial q} + \frac{B}{4\pi} \frac{\partial(rB)}{\partial q} &= 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + p \frac{\partial v}{\partial t} &= v j E, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{vB}{r} \right) = \frac{\partial E}{\partial q}, \quad (1)$$

где  $c$  — скорость света в вакууме,  $r(q, t)$  — радиус взрывающейся проволоки,  $v(q, t) = 1/\rho(q, t)$  — удельный объем, обратно пропорциональный плотности вещества,  $q$  — лагранжева координата, связанная с радиусом проволоки соотношением

$$\frac{\partial r(q, t)}{\partial q} = \frac{v(q, t)}{r(q, t)},$$

$u(q, t)$  — скорость разлета материи,  $B(q, t)$  — азимутальная компонента магнитного поля,

$$E(q, t) = \frac{c}{4\pi\sigma v} \partial_q(rB)$$

— продольная компонента электрического поля,  $p(v, T)$  — давление,  $\varepsilon(v, T)$  — удельная энергия,  $j = \sigma E$  — плотность электрического тока,  $\sigma(v, T)$  — проводимость,  $T(q, t)$  — температура. В уравнениях (1) не учитываются теплопроводность и перенос излучения, которые в нашей ситуации оказываются несущественными. Производная удельной энергии в уравнении (1) может быть записана как

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Таким образом, независимыми функциями, подлежащими определению, являются  $r(q, t)$ ,  $u(q, t)$ ,  $v(q, t)$ ,  $B(q, t)$ ,  $T(q, t)$ . Необходимо также задать граничные условия  $u(0, t) = 0$ ,  $B(0, t) = 0$ ,

$$B(q_{\text{max}}, t) = \frac{2I(t)}{cn_w r(q_{\text{max}})},$$

$n_w$  — число параллельно включенных проволок,  $I(t)$  — ток во внешней цепи, описываемый уравнением

$$\begin{aligned} \frac{Q(t)}{C} + LI'(t) + \frac{d}{dt} \left[ \frac{2l}{n_w} \ln \left( \frac{x}{r_w(t)} \right) I(t) \right] \\ + E(q_{\text{max}}, t)l + R_0 I(t) = 0, \quad (2) \end{aligned}$$

где  $Q'(t) = I(t)$ ,  $x$  — расстояние до обратного токовода;  $C, L, R_0$  — емкость, индуктивность и сопротивление внешней цепи,  $l$  — длина проволоки,  $r_w(t) \approx r(q_w, t)$  — радиус взрывающейся проволоки,  $q_w$  — лагранжева координата границы между воздухом и медью.

В экспериментах, проведенных в НИИ ЯП, использовались сборки проволок, расположенных параллельно в ряд на довольно большом расстоянии друг от друга, так что пинч-эффектом можно было пренебрегать. Расстояние до обратного токовода  $x$  является весьма неопределенной величиной, поэтому в качестве  $x$  выбирался некоторый параметр  $r_{\max}$  порядка расстояния между соседними проволоками, затем на стенде измерялась суммарная индуктивность  $\tilde{L}$ , включающая ударную индуктивность, индуктивность контура, образованного подводными проводами и проволоками. Суммарная индуктивность представляется в виде

$$\tilde{L} = L + \frac{2l}{n_w} \ln\left(\frac{r_{\max}}{r_w}\right), \quad (3)$$

откуда при заданном  $r_{\max}$  находилась индуктивность  $L$ , используемая в уравнении цепи при МГД-моделировании. Более точно в ходе МГД-расчета радиус проволоки может определяться из соотношения

$$\begin{aligned} 2 \ln\left(\frac{r_{\max}}{r_w(t)}\right) &= \frac{c^2}{2(I/n_w)^2} \int_0^{r_{\max}} B^2 r dr \\ &= \frac{c^2}{2(I(t)/n_w)^2} \int_0^{q_{\max}} B^2(q, t) v(q, t) dq. \end{aligned} \quad (4)$$

Полностью консервативные численные схемы для уравнений магнитной гидродинамики описывались ранее [7]. Однако из модели [7] авторы использовали только схему пространственной дискретизации, в результате чего была получена матричная система обыкновенных дифференциальных уравнений, приведенная в приложении, которая затем решалась с помощью программы „Mathematica“.

### 1.1. Уравнение состояния

Уравнение состояния необходимо для замыкания системы гидродинамических уравнений (1). Ранее предлагались различные уравнения состояния [8–16], основанные на данных по ударному нагружению материалов, изучению ударных волн от взрывчатых веществ и воздействия мощного лазера на вещество, электрического взрыва проводников. Для нашей цели воспользуемся относительно простым уравнением состояния, предложенным в работе [4] и не включающим стадию плавления явно. В некоторой степени компенсируем данный недостаток выбором выражения для проводимости меди.

Уравнение состояния записывается в виде

$$\begin{aligned} p(v, \varepsilon_T) &= p_x(v) + p_T(v, \varepsilon_T), \\ \varepsilon(v, \varepsilon_T) &= \varepsilon_x(v) + \varepsilon_T. \end{aligned} \quad (5)$$

Упругие компоненты давления и энергии

$$\begin{aligned} p_x(v) &= 2.32 \cdot 10^{12} (\delta^{3.1} - \delta^{2.5}), \\ \varepsilon_x(v) &= 10^{12} v (1.11 \delta^{3.1} - 1.55 \delta^{2.5}), \end{aligned}$$

где  $\delta = V_0/v$ ,  $V_0$  — удельный объем при нормальных условиях (здесь и ниже используется система единиц СГС).

Для тепловой компоненты в [4] приведено следующее выражение:

$$p_T(v, \varepsilon_T) = \Gamma(v, \varepsilon_T) v \varepsilon_T, \quad (6)$$

где

$$\Gamma(v, \varepsilon_T) = \left(\frac{2}{3} + \frac{4\delta}{2 + \delta}\right) \frac{1 + 2.02 \cdot 10^{-11} \varepsilon_T}{1 + 6.06 \cdot 10^{-11} \varepsilon_T}. \quad (7)$$

Граница двухфазной области  $v_{\max}(\varepsilon_T)$  при  $v > v_c$  аппроксимируется как

$$\begin{aligned} v_{\max}(\varepsilon_T) &= \exp(-8.89607 \cdot 10^{-52} \varepsilon_T^5 + 1.46904 \cdot 10^{-40} \varepsilon_T^4 \\ &\quad - 9.37557 \cdot 10^{-30} \varepsilon_T^3 + 2.89710 \cdot 10^{-19} \varepsilon_T^2 \\ &\quad - 4.46502 \cdot 10^{-9} \varepsilon_T + 30.1788). \end{aligned}$$

Границу двухфазной области  $v_{\min}(\varepsilon_T)$  при  $v < v_c$  можно найти решением уравнения  $p(v_{\min}(\varepsilon_T), \varepsilon_T) = p(v_{\max}(\varepsilon_T), \varepsilon_T)$ . Здесь под  $v_c = v(\varepsilon_{Tc})$  подразумевается удельный объем в критической точке. Область на плоскости  $v, \varepsilon_T$  между кривыми  $v_{\min}(\varepsilon_T), v_{\max}(\varepsilon_T)$  соответствует двухфазному состоянию, в котором сосуществуют пар и жидкость.

Данное уравнение состояния подстановкой

$$\begin{aligned} \varepsilon_T(T) &= 2.5 \cdot 10^{10} \left(2.1 \cdot 10^{-4} T \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(1 - 2.1 \cdot 10^{-4} T)^2 + 2.8 \cdot 10^{-4} T - 1}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

может быть приведено к обычному виду  $\varepsilon(v, T), p(v, T)$ .

Выражение (8) следует из условия термодинамической совместимости:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} = T \frac{\partial p}{\partial T} - p.$$

## 2. Проводимость меди

В последнее время были получены данные по проводимости металлов в области плотной горячей плазмы [17–19]. Эти данные необходимо учесть при построении выражения для проводимости. Для этой цели авторы воспользовались моделью среднего иона, развитой

Потенциалы ионизации атома меди [20]

<i>n</i>	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>I<sub>n</sub></i> , eV	7.72	20.29	36.83	58.9	82	106	148	169
<i>n</i>	9	10	11	12	13	14	15	16
<i>I<sub>n</sub></i> , eV	193	255	321	352	401	435	484	520
<i>n</i>	17	18	19	20	21	22	23	24
<i>I<sub>n</sub></i> , keV	0.557	0.633	0.671	1.7	1.79	1.9	2.05	2.17
<i>n</i>	25	26	27	28	29	—	—	—
<i>I<sub>n</sub></i> , keV	2.3	2.46	2.59	11.1	11.6	—	—	—

в работе [15], которая позволяет рассчитать степень ионизации с учетом эффекта сжатия, заключающегося в снижении потенциала ионизации с ростом плотности упаковки атомов. В работе [15] было также развито уравнение состояния, которое, к сожалению, предсказывает слишком высокое давление в критической точке, что ограничивает его использование.

В модели Баско рассматривается непрерывная функция, *I*(*y*) степени ионизации *y*. В дискретных точках данная функция совпадает со значениями потенциала ионизации свободного атома [20] (см. таблицу), т.е. *I*(0) = 0, *I*(1) = *I*<sub>1</sub>, *I*(2) = *I*<sub>2</sub>, ...

Уравнение, определяющее степень ионизации *y*, записывается в виде

$$\mu(y, v, T) + I(y) - B(v, T) = 0, \tag{9}$$

где  $\mu$  — химический потенциал идеального ферми-газа. Функция *B*(*y*, *v*, *T*) представляет собой поправку на холодную ионизацию и имеет форму

$$B(v, T) = be^2a_0 \frac{\left(\frac{ZN_A}{vM}\right)^{2/3}}{1 + x_T \left(\frac{k_B T a_0}{e^2}\right)^2 \left(\frac{vM}{N_A a_0^3}\right)^s}, \tag{10}$$

где  $a_0 = \hbar^2/me^2$  — радиус Бора, *N<sub>A</sub>* — число Авогадро, *k<sub>B</sub>* — постоянная Больцмана, *Z* = 29 — атомный номер. Численные значения констант, приведенные в работе [15], следующие: *b* = 5.7, *s* = 1.82, *x<sub>T</sub>* = 3.32 · 10<sup>10-3</sup>.

Химический потенциал идеального газа аппроксимируется формулой

$$\mu(y, v, T) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \frac{yN_A}{vM}\right)^{2/3} + k_B T \left( \frac{1}{1 + \frac{2}{5}\psi(y, v, T)} - \frac{3}{2} \ln \left(1 + \frac{5}{2\psi(y, v, T)}\right) \right), \tag{11}$$

где

$$\psi(y, v, T) = \left(3\pi^2 y \frac{N_A}{vM}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2mk_B T}. \tag{12}$$

В результате решения уравнения (9) можно найти степень ионизации *y*(*v*, *T*) и вычислить концентрацию свободных электронов *n<sub>e</sub>*(*v*, *T*) = *yN<sub>A</sub>*/*vM*.

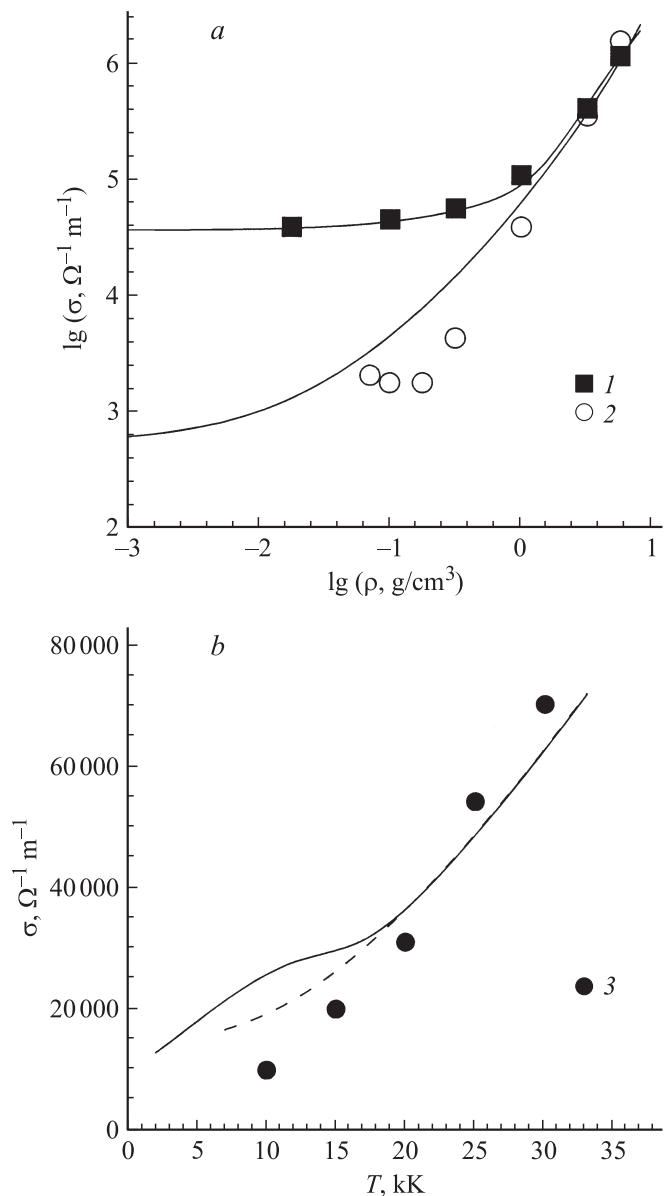
Авторы нашли, что данные из работ [17,18] для области 10 000–30 000 К можно приближенно описать эмпирической зависимостью

$$\sigma_h(v, T) = \sigma_s(T)(0.546 + 64.2\xi), \tag{13}$$

где

$$\sigma_s(T) = \left(\frac{2k_B T}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{e^2 \sqrt{m}}, \quad \xi = n_e a_0^3 \frac{e^2}{a_0 k_B T}$$

— некоторый безразмерный параметр. На рис. 1, *b* показаны данные из работы [18] и график, соответствующий формуле (13). Следует отметить, что  $\xi$  не является



**Рис. 1.** *a* — проводимость меди при температуре 10 000 (1) и 30 000 К (2) [17,18]; *b* — проводимость для  $\rho = 0.5 \text{ g/cm}^3$  [18] (3). Сплошные линии — проводимость, вычисленная по формуле (16), штриховая линия — вычисления по формуле (13).

обычно рассматриваемым параметром  $e^2 n_e^{1/3} / k_B T$  неидеальности плазмы [21].

Для проводимости в более низком диапазоне температур построили эмпирическую формулу в стиле работы [4], используя логарифмические зависимости

$$\sigma_l(v, T) = \frac{1}{\mathcal{P}_0(\varepsilon_T)} \exp \left[ -\ln \left( \frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}_0(\varepsilon_T)} \right) \frac{\left( \frac{\ln(v/V_0)}{\ln(v_c/V_0)} \right)^{\gamma_1}}{1 + \left( \frac{\ln(v/V_0)}{\ln(V_1/V_0)} \right)^{\gamma_2}} \right], \quad (14)$$

где  $\varepsilon_T(T)$  дается формулой (8) и представляет собой „содержание тепла“ в веществе,  $v_c = v_{\min}(T_c) = v_{\max}(T_c)$  — удельный объем в критической точке,  $T_c$  — критическая температура. Форма кусочно-гладкой функции (см. также [22])  $\mathcal{P}_0(\varepsilon)$  подобрана так, чтобы описать начальные стадии электрического взрыва проволоочки

$$\mathcal{P}_0(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_0} \times \begin{cases} 1 + 9.78 \cdot 10^{-10} \varepsilon, & \varepsilon < 5 \cdot 10^9, \\ 5.89 + 2.44 \cdot 10^{-9} (\varepsilon - 5 \cdot 10^9), & 5 \cdot 10^9 < \varepsilon < 7.2 \cdot 10^9, \\ 11.2 [1 + a(\varepsilon - 7.2 \cdot 10^9)]^{\gamma_3}, & \varepsilon > 7.2 \cdot 10^9, \end{cases} \quad (15)$$

где  $\sigma_0 = 5.29 \cdot 10^{17} \text{ s}^{-1} = 58.8 \cdot 10^6 \text{ } \Omega \cdot \text{m}^{-1}$  — проводимость меди при  $T_0 = 293 \text{ K}$ . Три отрезка соответствуют нагреву твердого тела, плавлению и остальным стадиям электрического взрыва. Область плавления заметна на экспериментальных данных как небольшой излом на кривой сопротивления, показанной на рис. 2.

Выбором параметров в уравнениях (14), (15) авторы постарались достичь максимального совпадения с базовым экспериментом по электрическому взрыву 50 микронных проволоочек. Численные значения параметров  $\mathcal{P}_1 = 3.3 \cdot 10^{-6} \text{ } \Omega \cdot \text{m}$ ,  $V_1 = 1000 \text{ cm}^3/\text{g}$ ,  $a = 4.2 \cdot 10^{-11} \text{ g/erg}$ ,  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = 0.8$ ,  $\gamma_3 = 0.5$ .

Общее выражение для проводимости получили сшивкой формул (13), (14) в окрестности температуры  $T_1 = 15000 \text{ K}$ :

$$\sigma(v, T) = \left( 1 - \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{T-T_1}{\Delta T}\right)} \right) \sigma_h(v, T) + \sigma_l(v, T) \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{T-T_1}{\Delta T}\right)}, \quad (16)$$

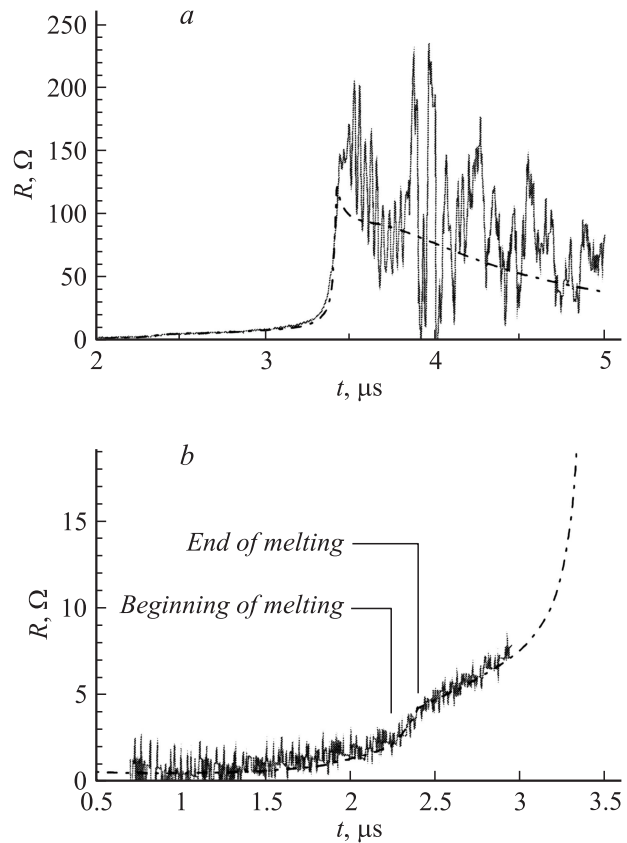
где „ширина“ области сшивки  $\Delta T = 2000 \text{ K}$ . На рис. 1 приведены результаты вычислений проводимости по формуле (16) и данные из работ [17,18].

Двухфазная область, в которой сосуществуют жидкость и пар, определяемая кривыми  $v_{\min}(T)$ ,  $v_{\max}(T)$ , показана на рис. 3. Как известно, давление и удельная энергия в этой области имеют вид  $\tilde{p} = p(v_{\min}(T), T) = p(v_{\max}(T), T)$ ,

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2, \quad (17)$$

где

$$z_1 = \frac{v_{\max}(T) - v}{v_{\max}(T) - v_{\min}(T)}, \quad z_2 = \frac{v - v_{\min}(T)}{v_{\max}(T) - v_{\min}(T)}$$



**Рис. 2.** *a* — сопротивление 4 проволочек радиусом  $50 \mu\text{m}$ . *b* — фрагмент графика сопротивления, включающий область плавления. Сплошная линия соответствует экспериментальной кривой. Штрихпунктирная линия — магнитогидродинамический расчет.

— массовые доли жидкости и газа,  $\varepsilon_1 = \varepsilon(v_{\min}(T), T)$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon(v_{\max}(T), T)$ . Для проводимости ситуация более сложная, поскольку она зависит от формы пространственной границы, разделяющей фазы. Теория проводимости гетерогенных систем [23] в предположении, что пар представляет собой сферические включения в жидкость, дает

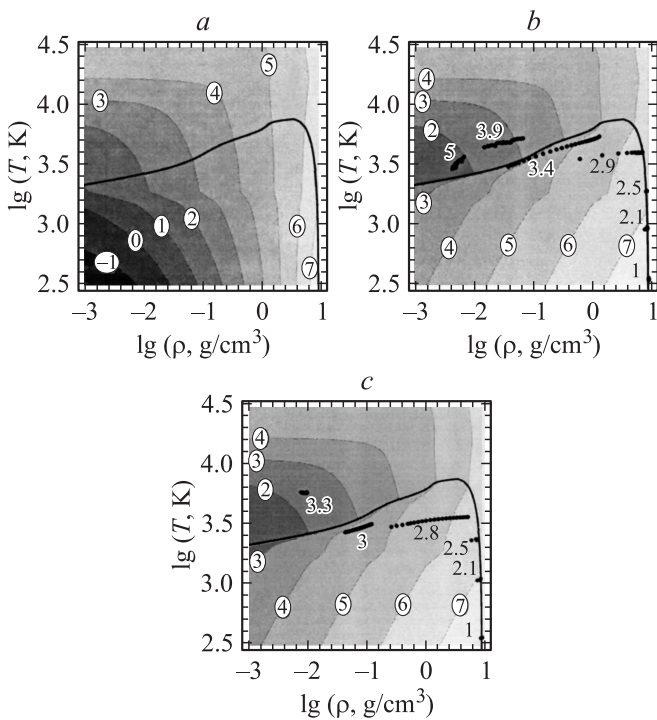
$$\tilde{\sigma} = \sigma_1 \left( 1 + \frac{x_2}{\frac{x_1}{n} - \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}} \right), \quad (18)$$

где

$$x_1 = z_1 \frac{v_{\min}(T)}{v}, \quad x_2 = z_2 \frac{v_{\max}(T)}{v}$$

— объемные части жидкости и пара в двухфазном веществе,  $\sigma_1 = \sigma(v_{\min}(T), T)$ ,  $\sigma_2 = \sigma(v_{\max}(T), T)$  и  $n = 3$ . Авторы рассматривали  $n$  как подстроочный параметр. Наилучшее совпадение с базовым экспериментом для данного уравнения состояния дает  $n = \infty$ , что соответствует параллельному включению жидкой и газообразной фаз. На рис. 3, *b, c* показана карта проводимостей, рассчитанная по формуле (16), в двухфазной области.

Типичный размер неоднородностей в двухфазной области составляет десятки нанометров [24], что подтвер-



**Рис. 3.** *a* — линии уровня проводимости, рассчитанные с помощью уравнения (16). Сплошная линия ограничивает область двухфазных состояний. Обрамленные цифры обозначают  $\lg \sigma$ , где  $\sigma$  измеряется в единицах  $\text{Om}^{-1}\text{m}^{-1}$ , *b* — эволюция физического состояния меди в процессе электрического взрыва проволоочки радиусом  $100\ \mu\text{m}$ . Группы точек, нанесенные на карту проводимости, вычисленной по формуле (18), относятся к состоянию проволоочки в различные моменты времени, указанные на рисунке в микросекундах. Крайние точки в каждой группе соответствуют состоянию вещества на оси и внешней границе взрывающихся проводников, *c* — то же самое для проволоочки радиусом  $12.5\ \mu\text{m}$ .

ждается наличием золя с таким размером частиц в продуктах электрического взрыва и служит методом получения нанопорошков. По-видимому, для этой области необходима более строгая теория проводимости, поскольку данный размер сравним с длиной свободного пробега электрона.

### 3. Результаты и обсуждение

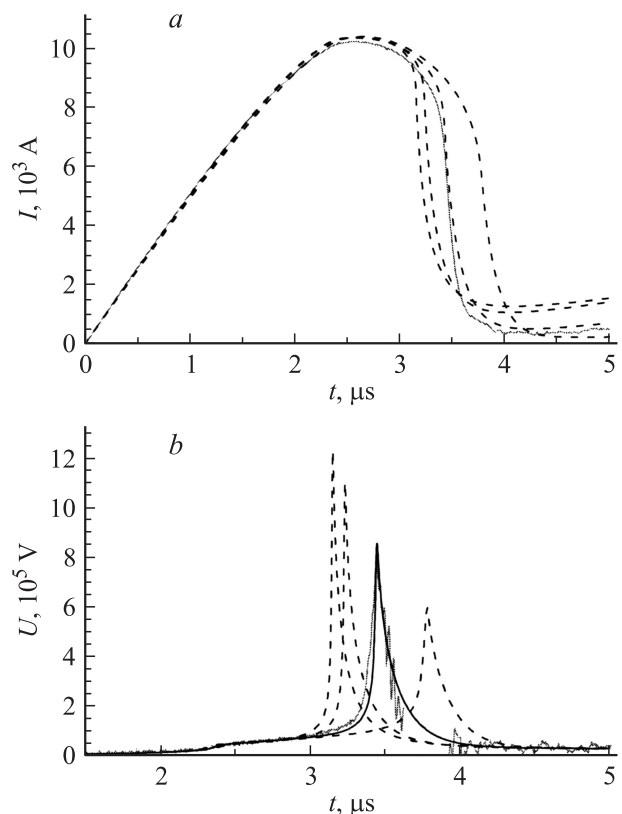
Авторы рассмотрели взрыв одной проволоочки радиусом  $r = 100\ \mu\text{m}$ ; 4 проволоочек,  $r = 50\ \mu\text{m}$ ; 16 проволоочек,  $r = 25\ \mu\text{m}$ ; 64 проволоочек,  $r = 12.5\ \mu\text{m}$ . Для 50 микронных проволоочек был проведен эксперимент, для остальных случаев — магнитогиродинамическое моделирование.

Индуктивность контура и емкость конденсаторной батареи составляли соответственно  $L = 14.6\ \mu\text{Hn}$ ,  $C = 0.56\ \text{MF}$ . Длина взрывающихся проводников  $l = 0.6\ \text{m}$ , напряжение зарядки конденсатора  $80\ \text{kV}$ . Производная тока измерялась с помощью пояса Роговского и запи-

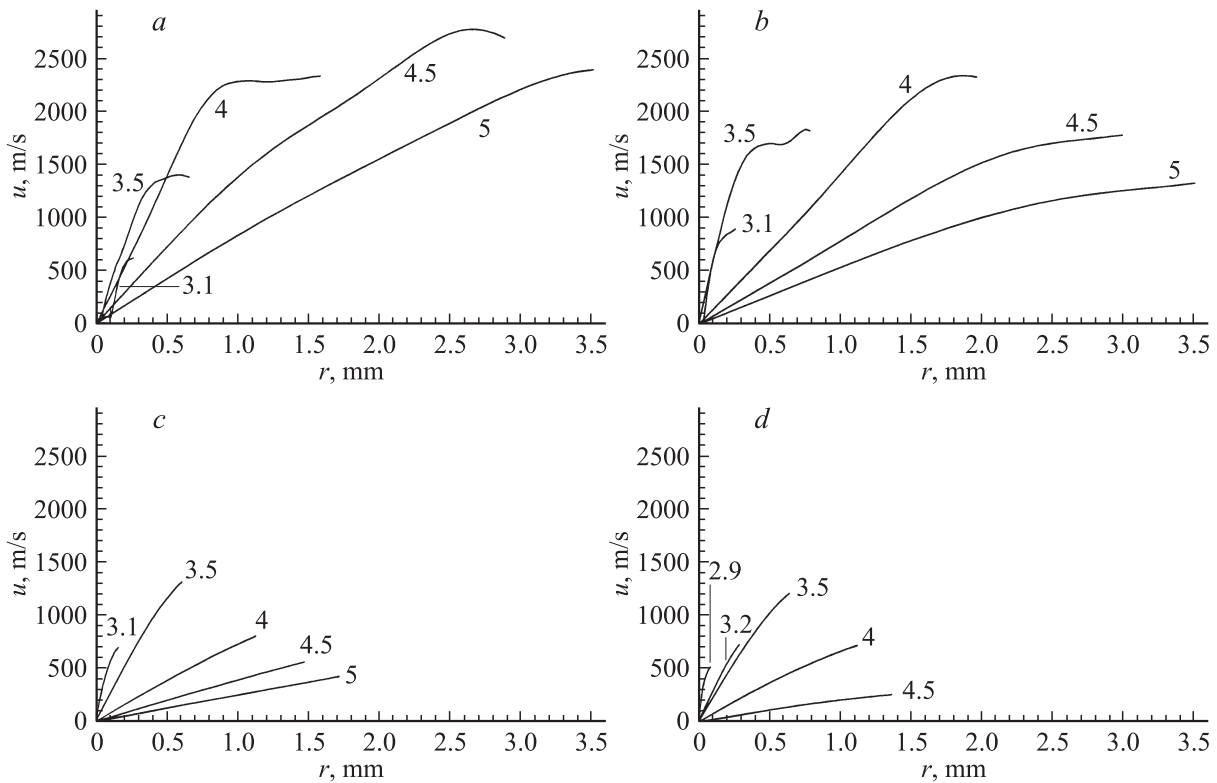
сывалась осциллографом „Tektroniks“. Ток вычислялся интегрированием производной тока.

Экспериментальные данные и результаты численных расчетов приведены на рис. 4, из которого видно, что с уменьшением радиуса проводников напряжение на них увеличивается довольно слабым образом. В частности, переход от 25 микронных проволоочек к 12.5 микронным не приводит к существенному изменению при одних и тех же параметрах внешней цепи.

На первый взгляд, согласно теории волны испарения [25], кажется, что уменьшение радиуса проводника должно привести к существенному уменьшению времени электрического взрыва, поскольку должна быть справедлива оценка  $\tau = r/\mathcal{V}$ , где  $\mathcal{V}$  — характерная скорость волны испарения. В литературе характерная скорость волны испарения оценивается как  $\mathcal{V} \approx 1000\text{--}2000\ \text{m/s}$ . Действительно, при моделировании взрыва проводников авторы получили скорости разлета материи такого порядка (показанные на рис. 5), однако при уменьшении радиуса взрывающихся проводников скорости разлета также уменьшаются, поскольку при взрыве возникают меньшие градиенты давления из-за того, что давление, возникающее за счет инерции внешних слоев, оказывается меньше. Кроме того, из рис. 3 следует, что в момент



**Рис. 4.** Зависимость тока (*a*) и напряжения (*b*) от времени при электрическом взрыве проволоочек общим сечением  $0.0314\ \text{mm}^2$ . Сплошная линия — эксперимент для проволоочек радиусом  $50\ \mu\text{m}$ . Штриховые — магнитогиродинамическое моделирование взрыва для проволоочек радиусом 100, 50, 25,  $12.5\ \mu\text{m}$ .



**Рис. 5.** Состояние проволочек радиусом 100 (a), 50 (b), 25 (c), 12.5 μm (d) в плоскости (u, r) — скорость, радиальная координата. Линии соответствуют различным моментам времени, указанным на рисунке в микросекундах.

взрыва внутри толстых проволочек достигается бóльшая температура, чем внутри тонких, что также связано с более высоким давлением на оси первых.

Если оценивать время электрического взрыва как

$$\tau = \frac{I_{\max}}{(dI/dt)_{\max}}, \tag{19}$$

где  $I_{\max}$  — максимальный ток во время взрыва,  $(dI/dt)_{\max}$  — максимальная производная во время взрыва (данные величины соответствуют несколько различ-

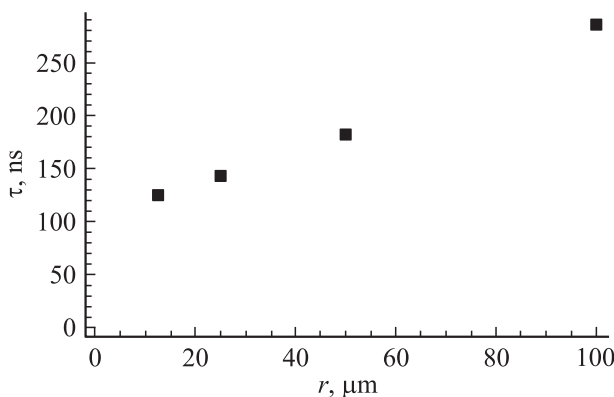
ным временам), то будем иметь ситуацию, показанную на рис. 6.

Таким образом, при уменьшении радиуса проводников характерное время взрыва стремится к некоторой константе. По-видимому, минимальный радиус проволочек, который стоит использовать (отвлекаясь от трудностей технологического характера), составляет 20 μm, по крайней мере для данных параметров электрической схемы.

#### 4. Приложение. Схема дискретизации уравнений магнитной гидродинамики

Для получения системы обыкновенных дифференциальных уравнений задается разностная сетка лагранжевой координаты  $q_i$ , определяющая массив шагов  $h_i = q_{i+1} - q_i, i \in \{1, i_{\max} - 1\}$ . Сетка может быть как равномерной, так и неравномерной, с более мелким шагом в окрестности лагранжевой координаты  $q_w$  (граница воздух–медь). Система обыкновенных дифференциальных уравнений для величин  $v_i, T_i, i \in \{1, i_{\max} - 1\}; u_i, r_i, E_i, \mathcal{B}_i \equiv r_i B_i, i \in \{2, i_{\max} - 1\}$  имела вид

$$\frac{dr_i}{dt} = u_i, \quad \frac{dv_i}{dt} = \frac{r_{i+1}u_{i+1} - r_i u_i}{h_i},$$



**Рис. 6.** Зависимость характерного времени электрического взрыва, вычисленная по формуле (19), от начального радиуса взрывающихся проводников при одном и том же их сечении.

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} + r_i \frac{p_i + \mathcal{P}_i - p_{i-1} - \mathcal{P}_{i-1}}{0.5(h_i + h_{i-1})} + \frac{1}{\pi(h_i + h_{i-1})} \\ \times \left[ \frac{r_{i+1}\mathcal{B}_i^2}{(r_i + r_{i+1})^2} - \frac{r_{i-1}\mathcal{B}_{i-1}^2}{(r_i + r_{i-1})^2} \right] = 0, \\ \frac{dT_i}{dt} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_i + \frac{dv_i}{dt} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} \right)_i = \frac{1}{2} v_i \sigma_i (E_i^2 + E_{i+1}^2) \\ - (p_i + \mathcal{P}_i) \frac{r_{i+1}u_{i+1} - r_i u_i}{h_i}, \\ \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{4v_i \mathcal{B}_i}{(r_i + r_{i+1})^2} \right) = \frac{E_{i+1} - E_i}{h_i}, \\ E_i = \frac{c(\mathcal{B}_i - \mathcal{B}_{i-1})}{2\pi(\sigma_i v_i h_i + \sigma_{i-1} v_{i-1} h_{i-1})}, \end{aligned}$$

где для сквозного счета вводилась линейная искусственная вязкость

$$\mathcal{P}_i = -\nu \frac{x_{i+1}u_{i+1} - x_i u_i}{v_i h_i},$$

где  $\nu$  — коэффициент вязкости.

Для простоты моделирования в воздухе на некотором расстоянии от проволоки задавалась твердая граница  $r_{i_{\max}} = r_{\max}$ , так что граничные условия имели вид  $\mathcal{B}_{i_{\max}} = 2I(t)/(cn_w)$ ,  $u_{i_{\max}} = 0$ ,  $r_1 = 0$ ,  $\mathcal{B}_1 = 0$ ,  $u_1 = 0$ . Из уравнения для магнитного поля также следует  $E_1 = E_2$ , кроме этого, полагалось

$$E_{i_{\max}} = \frac{c(\mathcal{B}_{i_{\max}} - \mathcal{B}_{i_{\max}-1})}{4\pi\sigma_{i_{\max}-1}v_{i_{\max}-1}h_{i_{\max}-1}}.$$

Лагранжевой координате  $q_w$  соответствует некоторый номер  $w$  узла сетки. При  $i \leq w$  используются уравнение состояния и проводимость меди, при  $i > w$  — уравнение состояния воздуха и его проводимость, полученная аппроксимацией данных из [26]. Начальные условия записываются как

$$v_i(0) = \begin{cases} V_0, & i \leq w, \\ V_a, & i > w, \end{cases} \\ r_i(0) = \begin{cases} \sqrt{2V_0 q_i}, & i \leq w, \\ \sqrt{2\sqrt{(V_0 - V_a)q_w + V_a q_i}}, & i > w, \end{cases}$$

где  $V_a$  — начальный удельный объем воздуха. Остальные начальные условия очевидны.

Авторы благодарят В.Г. Барышевского, В.В. Тихомирову, А.А. Гуринович, С.Э. Сягло, С.Н. Сытову, М.А. Горлача за интерес к работе и обсуждение.

## Список литературы

[1] Котов Ю.А., Колганов Н.Г., Седой В.С. Формирование высоковольтных импульсов с помощью взрыва проводников // Мощные наносекундные импульсные источники ускоренных электронов. Новосибирск: Наука, 1974. С. 83–96.

- [2] Бурцев В.А., Калинин Н.В., Лучинский А.В. Электрический взрыв проводников. М.: Энергоатомиздат, 1990. 288 с.
- [3] Попов Ю.П. // ЖФМ и МФ. 1971. Т. 11. Вып. 2. С. 449–461.
- [4] Бакулин Ю.Д., Куропатенко В.Ф., Лучинский А.В. // ЖТФ. 1976. Т. 20. Вып. 9. С. 1963–1968.
- [5] Волков А.А., Гребнев Е.В., Дыдыкин П.С. и др. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 5. С. 115–120.
- [6] Grinenko A., Gurovich V.Tz., Saypin A., Efimov S., Krasik Ya.E. // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. P. 066 401.
- [7] Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992. 424 с.
- [8] Альтишлер Л.В., Крупников К.К., Бражник М.И. // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. Вып. 4. С. 886–893.
- [9] Альтишлер Л.В., Баканова А.А., Трунин Р.Ф. // ЖЭТФ. 1962. Т. 42. Вып. 1. С. 91–104.
- [10] Renero C., Prieto F.E. // Revista Mexicana de Fisica. 1964. Vol. 13. N 1. P. 15–30.
- [11] Калиткин Н.Н., Кузьмина Л.В. // Физика плазмы. 1976. Т. 2. Вып. 5. С. 858–868.
- [12] Сапожников А.Т., Перишина А.В. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы решения задач математической физики. 1979. Вып. 4 (6). С. 47–56.
- [13] Кормер С.Б., Фунтиков А.И., Урлин В.Д., Колесникова А.Н. // ЖЭТФ. 1962. Т. 42. Вып. 3. С. 686–702.
- [14] Колгатин С.Н., Хачатурянц А.В. // Теплофизика высоких температур. 1982. Т. 20. Вып. 3. С. 477.
- [15] Баско М.М. // Теплофизика высоких температур. 1985. Т. 23. Вып. 3. С. 483–491.
- [16] Гордеев Д.Г., Гударенко Л.Ф., Жерноклетов М.Ф. и др. // ФГВ. 2008. Т. 44. Вып. 2. С. 61–75.
- [17] De Silva A.W., Katsouros J.D. // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57. P. 5945–5951.
- [18] Glérouin J., Renaudin P., Laudernet Y., Noiret P., Desjarlais M.P. // Phys. Rev. B. 2005. Vol. 71. P. 064 203.
- [19] Sasaki T., Nakajima M., Kawamura T., Horioka K. // Phys. Plasmas. 2010. Vol. 17. P. 084 501.
- [20] Радциг А.А., Смирнов Б.М. Параметры атомов и атомных ионов: Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1986. 344 с.
- [21] Фортон В.Е., Храпак А.Г., Якубов И.Т. Физика неидеальной плазмы. М.: Физматлит, 2004. 528 с.
- [22] Искольский А.М., Киричук В.С. // Автометрия. 1975. № 4. С. 3.
- [23] Оделевский В.И. // ЖТФ. 1951. Т. 21. С. 667.
- [24] Лебедев С.В. // Теплофизика высоких температур. 1981. Т. 19. С. 301.
- [25] Bennett F.D. High Temperature Exploding Wires. Progress in high temperature physics and chemistry. NY: Pergamon Press, 1968. Vol. 2. P. 1–63.
- [26] Калиткин Н.Н., Кузьмина Л.В., Rogov B.C. Таблицы термодинамических функций и транспортных коэффициентов плазмы. М.: ИПМ АН СССР, 1972.