

08

## Поверхностные акустические волны в упругой среде клиновидной формы

© Х.Б. Толипов

Южно-Уральский государственный университет,  
454080 Челябинск, Россия  
e-mail: thb@susu.ac.ru

(Поступило в Редакцию 23 ноября 2011 г. В окончательной редакции 16 марта 2012 г.)

Рассмотрены поверхностные акустические волны в среде, имеющей форму клина. Установлено, что исследованные волны существенно отличаются от ранее известных. Так, например, движение поверхностной волны Рэлея в направлении ребра приводит к изменению ее структуры, сопровождающейся расщеплением исходной волны на две самостоятельные моды и излучением в ходе движения сдвиговых и продольных волн. Вдоль ребра клина поверхностная волна сильно локализована в поперечном направлении. Рассмотрены возможность существования и свойства этой клиновой антисимметричной нормальной волны на поверхности упругого клина.

Волновые движения в упругом клине характеризуются сложными физическими процессами, приводящими к принципиально новым эффектам.

Отметим здесь такие интересные явления, как возникновение в результате рассеяния набегающего поля от ребра как поверхностных, так и объемных волн, резкие изменения с углом клина коэффициентов прохождения рэлеевской волны на вторую грань и отражения от ребра клина [1]. Эти явления имеют широкий спектр практических приложений: от использования в преобразователях поверхностных волн в объемные до решения проблем борьбы с ложными сигналами при дефектоскопии изделий.

Теоретическое исследование задачи дифракции на ребре клина [2,3] выявило ряд интересных особенностей распространения поверхностной волны. В частности, при движении волны Рэлея в клине в некоторой области, прилегающей к ребру, имеет место потеря ее устойчивости (стационарности). При этом возникает особый тип поверхностной волны, сопровождающийся в ходе движения непрерывной перестройкой акустического поля и излучением объемных волн. Это объясняется тем, что с приближением к ребру смещения рэлеевской волны начинают взаимодействовать со второй гранью клина, ведущей к резкому изменению ее структуры и расщеплению на две моды [3].

При движении вдоль ребра клина поверхностной волны ее траектория параллельна ребру. Акустическое поле указанной волны сильно локализовано в поперечном направлении. С практической точки зрения, такие волны было бы интересно использовать в волноводах, широко применяемых для задержки сигнала. Следует заметить, что во многих известных волноводных устройствах используются поверхностные волны [3]. Однако такие существенные недостатки, как уширение пучка, неэффективное использование площади подложки, сложность искривления звукопровода, резко ограничивают их широкое применение в технике.

Ввиду способности исследуемых волн локализоваться в поперечном направлении актуальна оценка их волно-

водных качеств в упругой среде клиновидной формы. Уширение пучка, приводящее к перекрытию соседних пучков, при использовании этих волноводов автоматически устраняется, поскольку пространственная структура волны в поперечном направлении в процессе распространения волны остается неизменной. Также ограниченная волноводом волна легко следует любым его изгибам. Ширина поперечного сечения канала получается равной нескольким длинам волн, в то время как у обычных устройств составляет 40–100 длин волн.

В настоящей работе рассмотрен ряд существенных вопросов акустики: поведение фазовой скорости волн, амплитуды, спектральных характеристик в двух направлениях — перпендикулярно ребру клина и вдоль ребра. Рассмотрим вначале волны, распространяющиеся перпендикулярно ребру клина.

Для теоретического анализа особенностей распространения решалась акустическая задача в приближении, что неоднородность волнового поля не только мала, но и является плавно меняющейся.

Уравнения движения запишем в терминах волновых потенциалов [1]

$$\Delta\Phi + k_l^2\Phi = 0, \quad \Delta\Psi + k_t^2\Psi = 0. \quad (1)$$

В двумерной геометрии потенциалы  $\Phi$  и  $\Psi$  зависят только от двух пространственных координат  $x, z$ , а также от времени  $t$  и решение (1) находим в виде

$$\begin{aligned} \Phi &= A \exp(ik_r x - i\omega t + qz), \\ \Psi &= Ap \exp(ik_r x - i\omega t + sz), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $k_t, k_l, k_r$  — соответственно волновые числа продольных, поперечных и искомых волн,  $\omega$  — круговая частота,  $q = \sqrt{k_r^2 - k_t^2}$ ,  $s = \sqrt{k_r^2 - k_l^2}$ , а  $p$  — коэффициент связи между потенциалами.

Амплитуда смещений  $A$  задается источником возбуждения и считается величиной известной, а определяемым параметром является волновое число  $k_r$ .

В классическом случае скорость волны, определяемой из соотношения  $V = \omega/k_r$ , и начальная амплитуда смещений  $A$  являются величинами конечными и неизменными в ходе движения волны.

Для среды клиновидной формы ситуация совершенно другая. В ходе движения по траектории изменяются волновое число и амплитуда смещений, зависимости которых, как правило, неизвестны, и решить уравнения (1) для функций  $\Phi$  и  $\Psi$  не представляется возможным. Однако при медленном изменении этих величин в пределах локальной длины волны можно воспользоваться приближенными методами. На малых интервалах изменения  $x$  и  $t$ , решения общего вида можно рассматривать как состоящие из элементарных решений, зависимости которых имеют вид

$$\Phi(x) = A_0 \exp[ik(x)x - i\omega t],$$

$$\Psi(x) = A_0 \exp[ik(x)x - i\omega t].$$

Волновое число в этих соотношениях выражается в комплексном виде:  $k(x) = k_1(x) + ik_2(x)$ , где действительная часть этого числа характеризует скорость волны:  $V(x) = \omega/k_1(x)$ , а мнимая — амплитуду:  $A(x) = A_0 \exp[-k_2(x)x]$ .

Введем цилиндрические координаты  $\rho, \theta, z$  таким образом, чтобы  $\rho$  была направлена перпендикулярно ребру клина, а угол  $\theta$  отсчитывался от биссектрисы угла клина.

В этом случае решения (1) выражаются в виде комбинаций функции Ханкеля первого рода

$$\Psi = [A_1 H_{\nu_2}^{(1)}(k_r \rho) \sin(\nu_2 \theta) + C_1 H_{\nu_2}^{(1)}(k_r \rho) \cos(\nu_2 \theta)],$$

$$\Phi = [A_0 H_{\nu_1}^{(1)}(k_r \rho) \cos(\nu_1 \theta) + C_0 H_{\nu_1}^{(1)}(k_r \rho) \sin(\nu_1 \theta)]. \quad (3)$$

В этих формулах  $\nu_1, \nu_2$  — угловые волновые числа, которые предполагаем медленно изменяющимися на локальной длине волны.

Дополним (1) стандартными граничными условиями, выражающими отсутствие нормальных  $\sigma_{\theta\theta}$  и сдвиговых  $\sigma_{\rho\theta}$  напряжений на поверхностях клина:

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\rho\theta} = 0, \quad \text{при } \theta = \pm\theta_0. \quad (4)$$

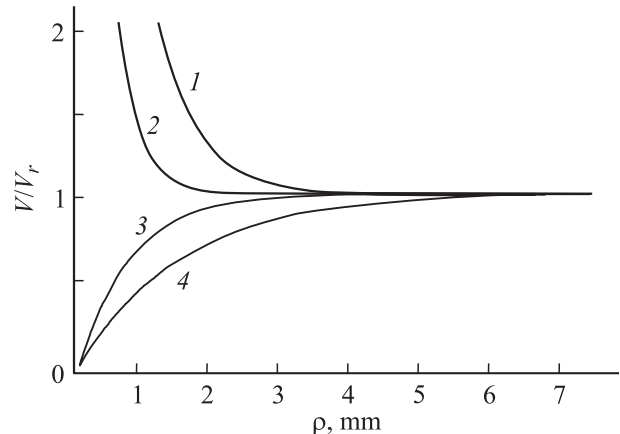
Подстановка выражений (3) в граничные условия (4) приводит к системе однородных алгебраических уравнений. Из условия разрешимости этой системы относительно амплитуд  $A_0, A_1, C_0, C_1$  получим дисперсионные соотношения

$$\frac{H_{\nu_1}^+ - 2 \left( \frac{k_2^2}{k_1^2} - 1 \right) H_{\nu_1}(k_r \rho)}{H_{\nu_1}^- H_{\nu_2}^-} H_{\nu_2}^+ - \left[ \frac{th\nu_2\theta}{th\nu_1\theta} \right]^m = 0, \quad (5)$$

$$H_{\nu_j}^{\pm}(x_j) = H_{\nu_j-2}^{(1)}(x_j) \pm H_{\nu_j+2}^{(1)}(x_j),$$

$$j = 1, 2, \quad x_1 = k_l \rho, \quad x_2 = k_t \rho, \quad m = \pm 1.$$

Уравнение (5) показывает наличие двух спектральных ветвей (мод) акустической волны — симметричной ( $m = 1$ ) и антисимметричной ( $m = -1$ ).



**Рис. 1.** Зависимость относительной скорости волны от расстояния до ребра для симметричных (1 и 2) и антисимметричных (3 и 4) мод, 1 и 4 — для угла клина  $\theta_0 = 3^\circ$ ; 2 и 3 — для  $\theta_0 = 5^\circ$ .

Для решения полученных комплексных дисперсионных уравнений применим для функций Ханкеля асимптотические выражения Лангера [4], которые при произвольном  $\nu \gg 1$  дают в интервале  $0 < z < \infty$  равномерные представления

$$H_{\nu}^{(1)}(z) \approx \sqrt{\lambda} e^{-i(2\pi/3)} H_{1/3}^{(2)}(i\nu\omega\lambda),$$

$$\omega = \sqrt{1 - \frac{z^2}{\nu^2}}; \quad \lambda = \frac{1}{\omega} \text{Artn}(\omega) - 1.$$

Численный расчет показал, что решение этой задачи существует только при комплексных значениях вектора  $k_r$ . Следовательно, чтобы удовлетворить условию отсутствия напряжений на поверхностях граней клина, волновой вектор  $k_r$  должен принимать комплексные значения, соответствующие физическим представлениям. В пределе при  $\rho \rightarrow \infty$ , как и должно быть, приходим к асимптотическому решению Рэлея, согласующемуся с экспериментальными наблюдениями.

Кривые дисперсии фазовой скорости для двух углов клина, рассчитанные из уравнения (5), представлены на рис. 1. Из поведения дисперсионных кривых следует, что основные изменения скорости мод происходят в узкой области вблизи ребра. Видно, что изменения амплитуд скоростей мод имеют разный характер и с приближением к ребру эти моды приближаются по своим спектральным показателям к волнам объемного распространения. До ребра клина доходит только одна антисимметричная мода поверхностной волны, скорость которой при приближении к ребру замедляется до нуля. С уменьшением угла клина изменения фазовой скорости выражаются некоторым повышением ее крутизны с приращением волновой толщины (толщины в области траектории волны) клина. Симметричная мода (кривые 1, 2) проходит только до определенной критической точки, не

достигая самой кромки клина. Размеры области („пробки“), куда не проникают продольные колебания, существенно зависят от угла клина. Верхняя граница этой области устанавливается по условию кратности корней дисперсионного уравнения (5). В этой точке имеет место слияние ветвей антисимметричной и симметричной мод.

Рассмотрим свободное распространение поверхностной волны вдоль ребра клина. Как специфическая разновидность клиновидная антисимметричная нормальная волна, распространяющаяся по поверхности упругого клина вдоль его ребра, видимо, впервые была описана в работе [5]. Однако причина устойчивой траектории этой волны была не совсем понятна. Согласно законам акустики, скорость частиц среды по фронту волны вследствие изменения волновой толщины должна быть различной. Как следствие специфичного проявления геометрической дисперсии, траектория вдоль ребра клина не может быть устойчивой, так как из-за рефракции (поворота волновой нормали в направлении низких скоростей) должна смещаться к его ребру.

Отсутствие математической модели, объясняющей особенности этих волн, привело к тому, что исследования ограничивались либо численными расчетами, либо эмпирическими зависимостями (см. [6] и библиографию в ней). Для описания клиновидной антисимметричной нормальной волны (КАНВ) использовали геометроакустический или лучевой метод, позволивший получить простые аналитические выражения для фазовых скоростей мод [7]. Однако анализ дисперсионного соотношения основывался на весьма приближенных оценках, полученных методом возмущения, что не позволяло судить о свойствах КАНВ с надлежащей ясностью и надежностью.

В настоящей работе впервые выявлена структура КАНВ в упругой среде клиновидной формы, основанная на аналитическом решении акустической задачи.

Как известно [8], акустическое волновое сопротивление пропорционально скорости распространения волны. В соответствии с принципом наименьшего действия при распространении упругой энергии в анизотропной среде происходит снос энергии из области с большим волновым сопротивлением в область с меньшим волновым сопротивлением.

Как выяснено выше, скорость антисимметричной моды поверхностной волны при приближении к ребру падает монотонно до нуля, что ведет к монотонному падению волнового сопротивления.

Следовательно, при возбуждении поверхностной волны преимущественное распространение ее будет в сторону более высокого пространственного градиента скорости, которое будет коллинеарно перпендикулярно к ребру клина.

При отражении этой волны от ребра, происходит наложение потоков энергий двух встречных волн, приводящее к пространственному перераспределению интенсивности колебаний с возникновением чередования максимумов и минимумов.

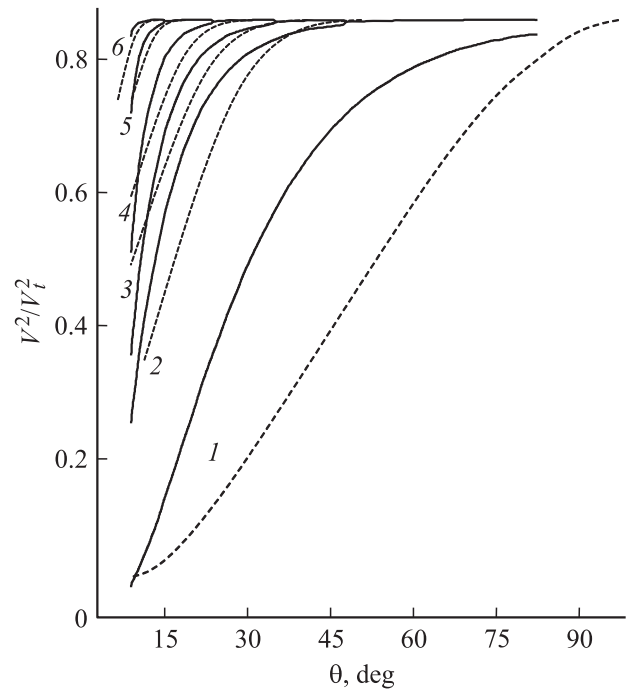


Рис. 2. Зависимости квадратов скоростей различных волновых мод от угла клина (штрихом обозначены экспериментальные кривые из [5]).

Таким образом, при возбуждении акустической волны вначале возникает волновое движение перпендикулярно к ребру клина и существующее только в начальный период времени до образования стоячих гармонических колебаний, а затем появляются колебания частиц среды вдоль кромки клина. Значение скорости волны вдоль ребра клина определяется вследствие резонансного характера колебаний среды, локальной (в точке траектории) толщиной клина при координате интерференционного максимума амплитуды. Важно отметить, что траектория этой волны теперь будет устойчивой и проходить параллельно ребру клина.

Аналогичный процесс происходит при возбуждении волны Рэлея. Скорость частиц среды будет неизменной по фронту и в силу резонансной природы волны также будет определяться условием наилучшего возбуждения — на границе поверхности.

Возбуждение в окрестности первого (от ребра клина) интерференционного максимума амплитуды приводит к распространению волны первой моды. Возбуждение частиц среды в окрестности следующих максимумов приводит к распространению мод более высокого порядка и соответственно с более высокими скоростями.

На рис. 2 представлены сплошными линиями рассчитанные теоретические зависимости квадратов скоростей шести мод волн от угла клина ( $V_i$  — скорость сдвиговой волны), штриховыми линиями обозначены экспериментальные кривые из [5].

Если в области вблизи ребра (определяемой протяженностью „пробки“) имеем дискретный спектр поля,

который отражает локальный характер распространения, то за этой областью получаем сплошной спектр, свидетельствующий о делокализации колебаний.

### Список литературы

- [1] *Гуревич С.Ю., Толипов Х.Б.* // ПМТФ. 2003. Т. 44. № 5. С. 161–168.
- [2] *Толипов Х.Б.* // ПМТФ. 2010. Т. 51. № 1. С. 28–39.
- [3] *Викторов И.А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966. 165 с.
- [4] *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции: формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977. С. 225.
- [5] *Moss S.L., Maradudin A.A., Cunningham S.L.* // Phys. Rev. B. 1973. Vol. 8. P. 2999–3008.
- [6] *Бирюков С. В.* и др. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, 1991.
- [7] *Шанин А.В.* // Акуст. журн. 1997. Т. 43. Вып. 3. С. 402–408.
- [8] *Дьелесан Э, Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1968.