01;04

Обобщенный критерий Бома для многокомпонентной плазмы

© А.Е. Дубинов, Л.А. Сенилов

Российский федеральный ядерный центр —
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,
607188 Саров, Нижегородская область, Россия
e-mail: dubinov-ae@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 6 сентября 2011 г.)

Получен обобщенный критерий Бома, регламентирующий стационарное существование приэлектродного заряженного слоя в многокомпонентной плазме, содержащей бесконечное число сортов ионов. Критерий имеет вид набора неравенств, одно из которых совпадает с критерием Бома для двухкомпонентной плазмы.

Введение

Критерий существования стационарного заряженного пристеночного слоя в плазме был получен в работе Бома [1]. Формулировка этого критерия заключается в следующем: для существования стационарного слоя необходимо, чтобы скорость ионов V_i, входящих в слой со стороны плазмы, превышала так называемую бомовскую скорость V_B.

Впоследствии было замечено, что математическое выражение для V_B совпадает с простейшим выражением для линейной скорости ионного звука $c_s = \sqrt{kT_e/M}$ в плазме, поэтому критерий Бома в современной литературе формулируется так: для существования стационарного слоя необходимо, чтобы скорость ионов V_i, входящих в слой со стороны плазмы, превышала линейную скорость ионного звука c_s [2]. Такая формулировка критерия Бома является общепринятой.

Оказывается, подобная „ионно-звуковая" формулировка критерия Бома небезупречна. Так, в [3] было указано, что в ней скорость дрейфа ионов V_i сравнивается со скоростью ионного звука c_s в плазме, в которой ионы не дрейфуют, т.е. в критерии сравниваются скорости разных плазм! Как уже отмечалось [4], неаккуратное сравнение характеристик скоростей задачи со скоростью ионного звука, полученной для другой модели плазмы, очень распространено в литературе и часто приводит к физически ошибочным выводам. Парадокс следует и из выводов [2] задачи о слое, говорящих, что стационарный слой существует тогда, когда он не может существовать: ионы должны обгонять ионный звук, а в результате этого должна возникнуть неустойчивость черенковского типа, раскачивающая ионно-звуковые волны.

Если же сравнивать скорость V_i со скоростью c_s для той же самой плазмы, в которой имеется ионный дрейф, то критерий Бома сводится к неравенству $V_i > c_s/2$ [3]. И это сказывается верным для всех моделей двухкомпонентной электрон-ионной плазмы.

Возникает вопрос: а как формулируется критерий Бома для плазмы, содержащей несколько сортов ионов, когда ионы каждого сорта входят в слой со своей дрейфовой скоростью. Подобная задача решалась во многих работах (см., например, [5–16]), и несколько вариантов формулировки критерия там были получены. Особенности этих работ следующие:

— рассматривается конечное количество сортов ионов, в результате в неравенство, выражающее критерий, входят конечные суммы;

— в большинстве работ [8,10–14,16] вводятся „индивидуальные" для каждого j-го сорта ионов скорости ионного звука без учета ионного дрейфа: $c_{sj} = \sqrt{kT_e/M_j}$. Авторы этих работ, по-видимому, полагают, что в многокомпонентной плазме существуют индивидуальные ионно-звуковые волны, в каждую из которых вовлечены только ионы данного сорта, что неверно;

— в ряде работ [5,9,15] вводится эффективная скорость ионного звука, опять же без учета ионного дрейфа. Здесь, по-видимому, считается, что в многокомпонентной плазме существует только единственная ионно-звуковая волна, которая распространяется с эффективной скоростью, что также неверно;

— в работах [6,7] записывают дисперсионное уравнение для ионно-звуковых волн с учетом дрейфа каждого сорта ионов. Но дисперсионное уравнение тогда получается в виде конечной суммы, и найти из него выражения для скоростей ионно-звуковых волн не представляется возможным.

Вместе с тем известно [17], что в многокомпонентной плазме существует несколько ионно-звуковых волн (мод), количество которых совпадает с количеством сортов ионов в плазме. При этом в каждую моду, конечно же, вовлечены все сорта ионов, а моды отличаются друг от друга законом дисперсии и фазой колебаний плотности (отличия в фазах означают следующее: когда некоторые сорта ионов находятся в фазе сжатия волны, другие сорта могут находиться в фазе разрежения). Скорости же ионно-звуковых мод отнюдь не равны индивидуальным из [8,10–14,16] $c_{sj} = \sqrt{kT_e/M_j}$, в чем легко убедиться соответствующей подстановкой в дисперсионное уравнение.

Указанные проблемы нахождения скоростей ионно-звуковых мод в многокомпонентной плазме с учетом индивидуального дрейфа каждого сорта ионов, а затем формулирования критерия Бома могут быть легко преодолены для некоторых искусственных моделей плазмы, в которых допускается бесконечное число сортов ионов. Впервые этот подход для нахождения скоростей ионно-звуковых мод в моделях плазмы с бесконечным числом сортов ионов (правда, без учета дрейфа ионов) был применен в [18].

Целью настоящей работы является формулировка обобщенного критерия Бома существования стационарного заряженного пристеночного слоя в модельных плазмах с бесконечным количеством сортов ионов в виде неравенства для скоростей дрейфа ионов и скоростей ионно-звуковых мод.

Описание модели плазмы и обозначения

Рассматривается бесстолкновительная плазма, граничащая с электродом и содержащая бесконечное число сортов положительно заряженных ионов. Пронумеруем сорта целым индексом j $(j = 1, \dots, \infty)$, электроны будем обозначать индексом e и считать, что электроны безынерционны. Каждый сорт ионов характеризуется массой частиц M_j, их зарядом q_j, концентрацией n_j, температурой T_j (или тепловой скоростью v_{Tj}), скоростью направленного дрейфа в сторону электрода V_j, ионной плазменной частотой ω_{pj}.

Тогда каждая конкретная модель плазмы будет отличаться тремя дискретными зависимостям ω_{pj}, v_{Tj}, V_j от j. Необходимо потребовать, чтобы в плазме выполнялись следующие условия:

— ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} q_j n_j$ должен сходиться, иначе условие квазинейтральности потребует бесконечной электронной концентрации n_e;

— ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} n_j kT_j$ также должен сходиться, в противном случае тепловая энергия в единице объема плазмы и давление будут бесконечны;

— расходимость рядов $\sum\limits_{j=1}^{\infty} V_j$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \omega_{pj}$ в принципе допускается при сходящихся $\sum\limits_{j=1}^{\infty} q_j n_j$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} n_j kT_j$.

Исходные уравнения

Будем исходить из следующей системы $2j$ уравнений одномерной многожидкостной газодинамики, дополненной уравнением Пуассона:

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \frac{\partial (n_j v_j)}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$M_{ik}\left(\frac{\partial v_j}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_j}{\partial x}\right) = -q_j \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{n_j}\frac{\partial P_j}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi\left(q_e n_e + \sum_{j=1}^{\infty} q_j n_j\right), \tag{3}$$

и уравнениями состояния

$$\begin{cases} P_e = n_e kT_e, \\ P_j = n_j kT_j, \end{cases} \tag{4}$$

считая при этом, что все температуры постоянны.

Дисперсионные уравнения для ионно-звуковых волн

Придадим переменным системы (1)–(4) малые гармонические возмущения $\sim \exp[i(\kappa x - \omega t)]$, в результате несложных стандартных выкладок с отбрасыванием нелинейных слагаемых более высокого порядка малости получим дисперсионное уравнение

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\omega_{pj}^2}{(\omega - \kappa V_j)^2 - \kappa^2 v_{Tj}^2} - \frac{1}{\kappa^2 \lambda_e^2} = 1, \tag{5}$$

где κ — волновое число, λ_e — электронная длина Дебая. Это уравнение можно переписать в эквивалентной форме

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\omega_{pj}^2}{\left(\frac{\omega}{\kappa} - V_j\right)^2 - v_{Tj}^2} - \frac{1}{\lambda_e^2} = \kappa^2. \tag{6}$$

Задаваясь конкретным видом зависимостей ω_{pj}, v_{Tj}, V_j от j, можно пытаться просуммировать ряд в (6). Если это удается, то далее уравнение решается относительно $c_s = \omega/\kappa$ при $\kappa \to 0$, и при этом получается бесконечный набор корней.

Вывод критерия существования стационарного слоя

Для вывода критерия существования стационарного заряженного слоя в выбранной модели плазмы воспользуемся условием, накладываемым на величину пространственного заряда, которое было получено, например, в [19–22] в результате анализа приэлектродного слоя в плазме методом псевдопотенциала Сагдеева

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{d\varphi}\Big|_{\varphi=0} \le 0, \\ \rho(\varphi) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} q_j n_j(\varphi) + q_e n_e(\varphi), \\ \rho(0) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} q_j n_j + q_e n_e = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Записанное неравенство позволяет исключить периодические решения для потенциала и концентраций частиц внутри слоя, что необходимо для формирования стационарной структуры.

Решая уравнение (2) совместно со вторым уравнением системы (1) для стационарного случая в результате интегрирования по x и дифференцирования по φ, получаем

$$\frac{dn_j}{d\varphi} = \frac{q_j n_j}{m_j V_j^2 - kT_j}. \tag{8}$$

Для электронов, которые распределены по Больцману, имеем

$$\frac{dn_e}{d\varphi} = -\frac{q_e n_e}{kT_e} \exp\left(-\frac{q_e\varphi}{k_e T_e}\right). \tag{9}$$

Подставляя (8) и (9) в систему (7) в результате несложных преобразований, получаем

$$\left.\frac{d\rho}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_j^2 n_j}{M_j V_j^2 - kT_j} - \frac{q_e^2 n_e}{kT_e} \leq 0. \tag{10}$$

В работе [6] было получено неравенство, эквивалентное (10), но для конечного числа сортов ионов. Автор [6] назвал его гидродинамическим критерием Бома и подчеркнул важность того факта, что при уменьшении числа сортов ионов до одного неравенство (10) переходит в общеизвестный критерий Бома.

Перепишем (10) в более удобных обозначениях:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\omega_{pj}^2}{V_j^2 - \upsilon_{Tj}^2} \leq \frac{1}{\lambda_e^2} \tag{11}$$

и сравним это неравенство с дисперсионным уравнением (6) в приближении $\kappa \to 0$. В результате этого получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\omega_{pj}^2}{V_j^2 - \upsilon_{Tj}^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_{pj}^2}{(c_s - V_j)^2 - \upsilon_{Tj}^2}. \tag{12}$$

Фактически (12) — это новая форма обобщенного критерия Бома. Несмотря на очевидность его частных решений, угадывающихся в (12) в силу его симметричности, полноценный анализ этого неравенства затруднен в связи с бесконечным числом слагаемых под знаками суммы. Однако для некоторых модельных зависимостей ω_{pj}, υ_{Tj}, V_j от j ряды в (12) суммируются, и удается провести полный анализ. Продемонстрируем это на двух примерах.

Примеры

Пример 1.

Рассмотрим плазму, в которой сорта ионов распределены по следующим законам: $\omega_{pj} = \Omega_0/j$, $\upsilon_{Tj} = \upsilon_0/j$, где Ω_0 и υ_0 — некоторые константы и $V_j = \text{const} = V_0$. Тогда неравенство (12) принимает вид

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Omega_0^2}{V_0^2 j^2 - \upsilon_0^2} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Omega_0^2}{(c_s - V_0)^2 j^2 - \upsilon_0^2}. \tag{13}$$

Ряды в (13) суммируются, в результате чего получаем

$$\frac{\Omega_0^2}{2\upsilon_0^2} - \frac{\pi\Omega_0^2}{2\upsilon_0 V_0} \operatorname{ctg}\frac{\pi\upsilon_0}{V_0} \leq \frac{\Omega_0^2}{2\upsilon_0^2} - \frac{\pi\Omega_0^2}{2\upsilon_0|c_s - V_0|} \operatorname{ctg}\frac{\pi\upsilon_0}{|c_s - V_0|}. \tag{14}$$

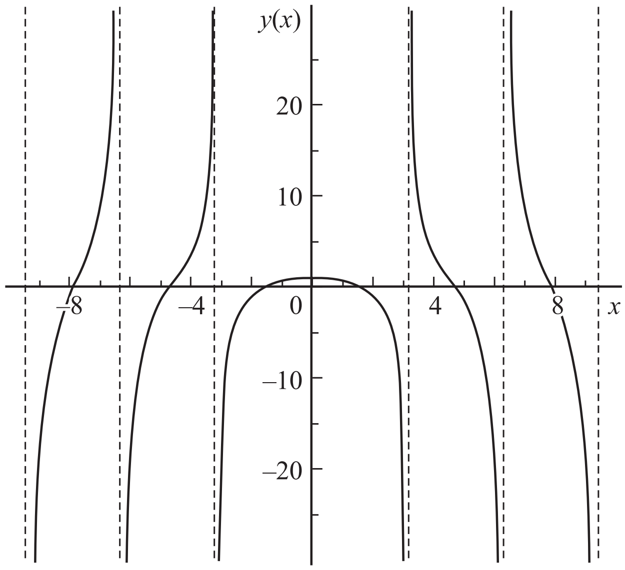

Рис. 1. Общий вид функции $y(x) = x \operatorname{ctg} x$.

После переобозначений $\xi = \pi\upsilon_0/V_0$ и $\eta = \pi\upsilon_0/|c_s - V_0|$ неравенство (14) перепишется в весьма компактной форме

$$\xi \operatorname{ctg}\xi \geq \eta \operatorname{ctg}\eta. \tag{15}$$

На рис. 1 показан график функции $y(x) = x \operatorname{ctg} x$, а его анализ приводит к следующим выводам:

— очевидно, что при всех положительных значениях аргумента x на каждом из промежутков монотонности эта функция является убывающей. Поэтому, если величины ξ и η из (15) принадлежат одному и тому же промежутку, можно утверждать, что решением (15) выступает неравенство $\xi \leq \eta$, или после возвращения к исходным переменным $V_0 \geq c_s/2$. Это решение полностью совпадает с выводами работы [3];

— пусть величины ξ и η принадлежат различным промежуткам монотонности, т.е. пусть $\xi \in [(n-1)\pi, n\pi]$, $\eta \in [(m-1)\pi, m\pi]$, где m, n — некоторые натуральные числа, причем $m \neq n$. В исходных обозначениях

$$\begin{cases} \dfrac{\upsilon_0}{n} < V_0 < \dfrac{\upsilon_0}{n-1}, \\ \dfrac{\upsilon_0}{m} < |c_s - V_0| < \dfrac{\upsilon_0}{m-1}. \end{cases} \tag{16}$$

Тогда решение неравенства (15) в общем виде можно выразить с помощью специальной многозначной трансцендентной функции Маркушина $W_{ct}(\ldots)$, которая является обратной к функции $y(x) = x \operatorname{ctg} x$. Свойства этой функции описаны в [23,24]. Это решение (15) имеет вид

$$\xi_{(m)} \leq W_{ct}^{(m)}[\eta \operatorname{ctg}\eta], \tag{17}$$

где $W_{ct}^{(m)}$ — m-я ветвь функции Маркушина. Или в исходных обозначениях

$$V_{0(n)} \geq \frac{\pi v_0}{W_{ct}^{(n)}\Big\{W_{ct}^{(m)}\big(1-\frac{2v_0^2}{\lambda_e^2\Omega_0^2}\big)\,\mathrm{ctg}\Big[W_{ct}^{(m)}\big(1-\frac{2v_0^2}{\lambda_e^2\Omega_0^2}\big)\Big]\Big\}}. \tag{18}$$

Таким образом, решение $V_0 \geq c_s/2$ в совокупности с множеством решений (18) представляют формулировку обобщенного критерия Бома для рассматриваемой здесь модели многокомпонентной плазмы.

Пример 2.

Рассмотрим еще одну модель плазмы, в которой сорта ионов распределены по следующим законам: $\omega_{pj} = \Omega_0/(2j-1)$, $v_{Tj} = v_0/(2j-1)$ и $V_j = \mathrm{const} = V_0$. Тогда обобщенный критерий Бома (12) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\Omega_0^2}{V_0^2(2j-1)^2 - v_0^2} \leq \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\Omega_0^2}{(c_s-V_0)^2(2j-1)^2 - v_0^2}. \tag{19}$$

После суммирования в (19) имеем

$$\frac{\pi\Omega_0^2}{4v_0V_0}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi v_0}{2V_0} \leq \frac{\pi\Omega_0^2}{4v_0|c_s-V_0|}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi v_0}{2|c_s-V_0|}. \tag{20}$$

Обозначим $\xi = \pi v_0/2V_0$ и $\eta = \pi v_0/2|c_s - V_0|$, после чего получим неравенство

$$\xi\,\mathrm{tg}\,\xi \leq \eta\,\mathrm{tg}\,\eta. \tag{21}$$

На рис. 2 представлен график функции $y(x) = x\,\mathrm{tg}\,x$. Суть анализа во многом аналогична анализу из предыдущего примера, а его результатом служат следующие выводы:

— при всех положительных значениях аргумента x на каждом из промежутков монотонности эта функция является возрастающей. Поэтому, если величины ξ и η из (21) принадлежат одному и тому же промежутку, можно утверждать, что решением (21) выступает неравенство $\xi \leq \eta$, или, возвращаясь к исходным переменным, $V_0 \geq c_s/2$. Это решение также совпадает с выводами работы [3];

— пусть величины ξ и η принадлежат различным промежуткам монотонности, т.е. пусть $\xi \in [(n-1)\pi, n\pi]$, $\eta \in [(m-1)\pi, m\pi]$, где m, n — некоторые натуральные числа, причем $m \neq n$. В исходных обозначениях пусть опять выполняется (16).

Решение неравенства (21) в общем виде также возможно выразить при помощи другой функции Маркушина $W_t(\ldots)$, которая является обратной функцией к $y(x) = x\,\mathrm{tg}\,x$ [23,24]. Тогда решение (21) имеет вид

$$\xi_{(m)} \leq W_t^{(m)}[\eta\,\mathrm{tg}\,\eta], \tag{22}$$

где $W_t^{(m)}$ — m-я ветвь функции Маркушина, или в исходных обозначениях

$$V_{0(n)} \geq \frac{\pi v_0}{2W_t^{(n)}\Big\{W_t^{(m)}\big(\frac{2v_0^2}{\lambda_e^2\Omega_0^2}\big)\,\mathrm{tg}\Big[W_t^{(m)}\big(\frac{2v_0^2}{\lambda_e^2\Omega_0^2}\big)\Big]\Big\}}. \tag{23}$$

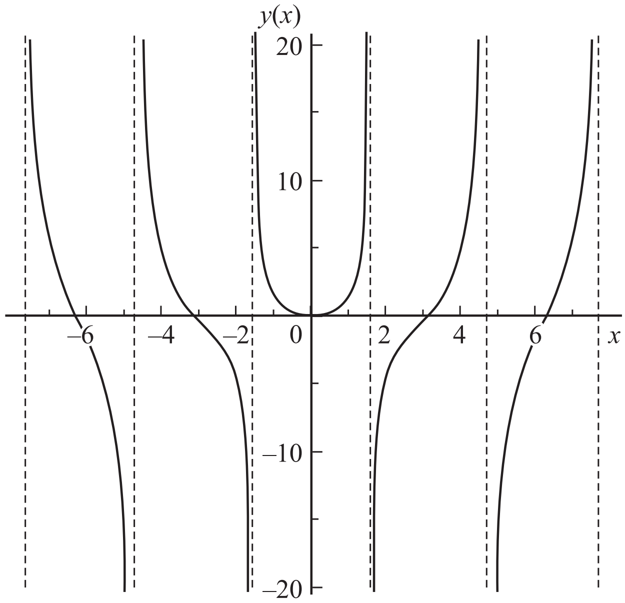

Рис. 2. Общий вид функции $y(x) = x\,\mathrm{tg}\,x$.

В результате решение $V_0 \geq c_s/2$ в совокупности с множеством решений (23) представляют формулировку обобщенного критерия Бома для модели многокомпонентной плазмы для примера 2.

Заключение

В настоящей работе проведен качественный анализ заряженного пристеночного слоя в модели многокомпонентной бесстолкновительной плазмы, состоящей из безынерционных электронов и бесконечного числа сортов горячих ионов, причем все частицы удовлетворяют уравнению состояния идеального классического газа (в изотермическом приближении). Найдены условия образования заряженного слоя путем отбрасывания осциллирующих решений задачи для потенциала в слое. С помощью оригинальной методики, основанной на нахождении полного набора скоростей бесконечного числа ионно-звуковых мод, получен обобщенный критерий Бома для многокомпонентной плазмы.

Список литературы

[1] *Bohm D.* In: The characteristics of electrical discharges in magnetic field. N.Y.: Mc-Graw-Hill, 1949. P. 77.
[2] *Чен Ф.* Введение в физику плазмы. М.: Мир, 1987. 398 с.
[3] *Дубинов А.Е., Сенилов Л.А.* // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. Вып. 19. С. 23.
[4] *Дубинов А.Е.* // Физ. плазмы. 2009. Т. 35. № 11. С. 1070.
[5] *Tokar' M.Z.* // Contrib. Plasma Phys. 1994. Vol. 34. N 2/3. P. 139.
[6] *Riemann R.-U.* // IEEE Trans. Plasma Sci. 1995. Vol. 23. N 4. P. 709.

[7] *Benilov M.S.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1996. Vol. 29. N 2. P. 364.
[8] *Valentini H.-D., Herrmann F.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1996. Vol. 29. N 5. P. 1175.
[9] *Verheest F., Hellberg M.F.* // J. Plasma Phys. 1997. Vol. 57. N 2. P. 465.
[10] *Franklin R.N.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2000. Vol. 33. N 24. P. 3186.
[11] *Franklin R.N.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2001. Vol. 34. N 13. P. 1959.
[12] *Franklin R.N.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2003. Vol. 36. N. 1. P. 34.
[13] *Franklin R.N.* // J. Phys. D. Appl. Phys. 2003. Vol. 36. N 15. P. 1806.
[14] *Severn G.D., Wang H., Ko E., Hershkowitz N.* // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 90. N 14. P. 145 001-1.
[15] *Alterkop B., Boxman R.L.* // Contrib. Plasma Phys. 2006. Vol. 46. N 10. P. 826.
[16] *Hatami M.M., Shokri B., Nikman A.R.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2009. Vol. 42. N 2. P. 025 204-1.
[17] *Fried B.D., White R.B., Samec T.K.* // Phys. Fluids. 1971. Vol. 14. N 11. P. 2388.
[18] *Dubinov A.E.* // Phys. Scripta. 2009. Vol. 80. N 3. P. 035 504-1.
[19] *Альтеркоп Б.А., Дубинова И.Д., Дубинов А.Е.* // ЖЭТФ. 2006. Т. 129. № 1. С. 197.
[20] *Альтеркоп Б.А., Дубинова И.Д., Дубинов А.Е.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 7. С. 63.
[21] *Alterkop B., Dubinova I.D., Dubinov A.E., Boxman R.L.* // Contrib. Plasma Phys. 2007. Vol. 47. N 3. P. 190.
[22] *Дубинов А.Е., Сенилов Л.А.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 6. С. 46.
[23] *Markushin V.E., Rosenfelder R., Schreiber A.W.* // Nuovo Cimento. B. 2002. Vol. 117. N 1. P. 75.
[24] *Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К.* W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2006. 160 с.