

01
Непрерывное вейвлет-преобразование и точно решаемая модель нестационарных сигналов

© С.В. Божокин

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
 195251 Санкт-Петербург, Россия
 e-mail: bsvjob@mail.ru

(Поступило в Редакцию 21 июля 2011 г. В окончательной редакции 27 октября 2011 г.)

Для нестационарного сигнала, спектральные свойства которого изменяются во времени, получено аналитическое выражение для непрерывного вейвлет-преобразования (continuous wavelet transform, CWT). В качестве модели нестационарного сигнала рассмотрена суперпозиция элементарных нестационарных сигналов, каждый из которых представляет собой произведение огибающей гауссовской формы на осциллирующую функцию. Для получения CWT используется материнский вейвлет Морле. Проведено сравнение с оконным преобразованием Фурье (преобразованием Габора). Преимущества CWT проиллюстрированы на конкретных примерах. Обсуждены применения разработанной точно решаемой модели нестационарных сигналов для моделирования переходных процессов в физике.

Введение

Большое количество процессов, происходящих в физике, существенно нестационарны. Это означает, что статистические свойства сигналов, описывающих эти процессы, характеризуются спектральными свойствами, изменяющимися во времени. За последнее время теория вейвлетов продемонстрировала свою эффективность при решении очень широкого класса задач, связанных с изучением нестационарных сигналов [1–6]. Однако следует отметить, что огромное количество работ, посвященных вейвлет-анализу нестационарных сигналов, являются численными. Сравнение с аналитическими результатами становится очень важным при разработке быстрых численных схем CWT, применимых для сигналов большой временной протяженности.

Все эти обстоятельства требуют разработки точно решаемой модели нестационарных сигналов, которая бы позволила получить аналитические выражения для непрерывного вейвлет-преобразования (continuous wavelet transform, CWT). Известно, что точно решаемые задачи играют важную роль во многих областях физики [7,8], так как являются важным инструментом для проверки многих приближенных или численных методов. Эти слова можно отнести и к теории нестационарных сигналов. Имея аналитическое выражение для CWT, можно аккуратно найти многие предельные результаты и получить необходимые критерии разрешения спектральных компонент сигнала как по частоте, так и по времени.

Целью настоящей работы является разработка математической модели нестационарного сигнала, для которого будет получено аналитическое выражения для CWT. Будет выполнено сравнение аналитической модели CWT для такого нестационарного сигнала с аналитическим выражением для преобразования Габора (оконное преобразование Фурье), а также получено много аналитических оценок и критериев.

Модельный сигнал

Для произвольного нестационарного сигнала $Z(t)$ введем его фурье-компоненту $\hat{Z}(\omega)$, определяющую его спектральный состав

$$\hat{Z}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(t') \exp(i\omega t') dt'. \tag{1}$$

Классический спектральный анализ, основанный на преобразовании Фурье, позволяет обнаружить сам факт существования различных гармоник, но не дает возможность проследить эволюцию во времени мгновенных спектральных характеристик сигналов. Известно, что наличие двух пиков в спектре мощности может соответствовать двум разным ситуациям: в динамике изучаемой системы могут одновременно присутствовать два независимых ритма или может наблюдаться процесс переключения частоты, и в каждый момент времени удастся зафиксировать только один ритмический процесс. Равенство Парсевала связывает сигнал $Z(t)$ и $\hat{Z}(\omega)$ величину

$$\int_{-\infty}^{\infty} Z^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{Z}(\omega)|^2 \left(\frac{d\omega}{2\pi}\right). \tag{2}$$

Для построения математической модели нестационарного сигнала $Z(t)$, решение для которого может быть получено аналитически, воспользуемся принципом суперпозиции и представим его в виде суммы N простейших нестационарных сигналов, каждый из которых центрирован в точке $t = t_L$ и характеризуется системой параметров L

$$Z(t) = \sum_{L=0}^{N-1} z_L(t - t_L). \tag{3}$$

Подбирая систему параметров L , можно сконструировать математическую модель сложного нестационарного сигнала $Z(t)$, спектральные свойства которого меняются

во времени. Предлагаемая математическая модель будет отражать динамику реального сигнала, характеризующего определенный физический процесс. Примером простейшего нестационарного сигнала $z_L(t - t_L)$ является выражение

$$z_L(t - t_L) = \frac{b_L}{2\tau_L\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(t - t_L)^2}{4\tau_L^2}\right] \times \cos(2\pi f_L(t - t_L) + \alpha_L). \quad (4)$$

Сигнал $z_L(t - t_L)$ представляет собой произведение огибающей гауссовской формы на осциллирующую функцию и описывается системой пяти параметров L , которые можно представить в виде

$$L = (b_L, f_L, t_L, \tau_L, \alpha_L), \quad (5)$$

где b_L — амплитуда сигнала, f_L — гармоническая частота колебаний в герцах (Hz), t_L — центр локализации сигнала по времени в секундах (s), τ_L — характерный размер локализации сигнала по времени в секундах (s), α_L — начальная фаза в радианах. Важно, что для такого простейшего сигнала (4) мы получим аналитические выражения, поэтому все формулы, относящиеся к суперпозиции простых сигналов $Z(t)$ (3), также легко проанализировать.

Компонента Фурье простейшего сигнала $\hat{z}_L(\omega)$ имеет вид

$$\hat{z}_L(\omega) = \frac{b_L \exp(i\omega t_L)}{2} \left\{ \exp[-(x_L + F_L)^2 + i\alpha_L] + \exp[-(x_L - F_L)^2 - i\alpha_L] \right\}, \quad (6)$$

где $x_L = \omega\tau_L$, $F_L = 2\pi f_L\tau_L$. Зная величину $\hat{z}_L(\omega)$, можно вычислить спектр мощности сигнала простейшего нестационарного сигнала $\hat{P}_L(\omega) = |\hat{z}_L(\omega)|^2$. Иногда в качестве аргумента вместо круговой частоты ω удобно рассматривать линейную частоту ν с помощью соотношения $\omega = 2\pi\nu$. Спектр мощности при $\nu > 0$ представляет собой гауссовский пик, центрированный в точке $\nu = f_L$. Характерная полуширина спектра мощности имеет вид $\Delta_\nu = 1/(4\pi\tau_L)$.

Для сложных сигналов $Z(t)$, представляющих собой суперпозицию простейших нестационарных сигналов (3), вычисление величины $\hat{Z}(\omega)$ (1) не представляет сложностей.

Оконное преобразование Фурье (преобразование Габора)

Введем в рассмотрение комплексную функцию $\chi_W(\nu, t)$, представляющую собой произведение гармонического колебания $\exp(-i2\pi\nu t)$ с частотой ν на вещественную функцию гауссовского окна $R_W(t)$, имеющего единичную норму

$$\chi_W(\nu, t) = R_W(t) \exp(-i2\pi\nu t), \quad (7)$$

$$R_W(t) = \frac{1}{\sqrt{W}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{4W^2}\right). \quad (8)$$

Характерная длительность гауссовского окна $R_W(t)$ равняется $\Delta_t = W$, а протяженность его частотного спектра $\hat{R}(\omega)$ равняется $\Delta_\omega = 1/2W$ [2,5]. Выбирая окно с малой шириной по времени W , получаем высокое временное разрешение, но низкое частотное разрешение. Выбрав окно с большой шириной по времени W , получаем хорошее разрешение по частоте, но плохое разрешение по времени. Слишком широкое окно будет полезно для обнаружения низкочастотных компонентов сигнала, но его ширина будет избыточной для обнаружения гармоник с высокой частотой. Достаточно узкое окно даст возможность изучить высокочастотные компоненты, но оно не в состоянии правильно отобразить низкочастотные гармоники.

Оконное преобразование Фурье (преобразование Габора) $g_W(\nu, t)$ для сигнала $Z(t)$ имеет вид

$$g_W(\nu, t) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(t') \chi_W^*(\nu, t' - t) dt' \quad (9)$$

и представляет собой свертку сигнала $Z(t)$ с комплексно сопряженной функцией $\chi_W^*(\nu, t)$. Фурье-компонента $\hat{G}_W(\nu, \omega)$ преобразования Габора (9) равняется $\hat{G}_W(\nu, \omega) = \hat{Z}(\omega) \hat{R}_W(\omega - 2\pi\nu)$.

Преобразование Габора $g_W(\nu, t)$ отображает одномерный сигнал $Z(t)$ на двумерную плоскость: время t и частота ν , характеризуя изменение его спектрального состава во времени. Центр окна находится в точке $t = t'$, а размер окна будет порядка W . Если внутри этого окна осциллирующее поведение функции $\chi_W(\nu, t)$ с частотой ν будет совпадать с частотой колебаний сигнала $Z(t)$, равной f , то в этом окне будем наблюдать максимум величины $g_W(\nu, t)$ при $\nu = f$. Чем большее количество периодов колебаний сигнала с частотой f укладывается в окне интегрирования W , тем более отчетливо в величине $g_W(\nu, t)$ выражена данная гармоника сигнала.

Передвигая центр окна t вдоль временной оси t' , причем $t - W < t' < t + W$, можем проследить за изменением частотного состава $Z(t')$ сигнала в этом окне.

Для преобразования Габора (9) справедлив аналог равенства Парсевала (2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt Z^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\nu |g_W(\nu, t)|^2, \quad (10)$$

причем величина $\varepsilon(\nu, t) = |g_W(\nu, t)|^2$ играет роль мгновенной спектральной плотности энергии сигнала, зависящей как от частоты ν , так и от времени t .

Формула обратного преобразования восстанавливает сигнал $Z(t)$

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} dt' g_W(\nu, t') \chi_W(\nu, t - t') \quad (11)$$

по известному виду функций $g_W(\nu, t)$ и $\chi_W(\nu, t)$.

Для элементарного нестационарного сигнала $z_L(t-t')$ (4) можно получить аналитическое выражение для преобразования Габора $g_W^{(L)}(v, t)$

$$g_W^{(L)}(v, t) = \frac{b_L \sqrt{W} \exp\left[-\frac{(t-t_L)^2}{4(W^2 + \tau_L^2)}\right]}{2\sqrt{\sqrt{2\pi}(W^2 + \tau_L^2)}} \times [H_W(v, f_L, \alpha_L) + H_W(v, -f_L, -\alpha_L)], \quad (12)$$

где функция

$$H_W(v, f_L, \alpha_L) = \exp\left[-\frac{4\pi^2(v-f_L)^2\tau_L^2 + 2\pi i(v + \frac{\tau_L^2}{W^2}f_L)(t-t_L) - i\alpha_L}{1 + \frac{\tau_L^2}{W^2}}\right]. \quad (13)$$

Отметим, что второе слагаемое $H_W(v, -f_L, -\alpha_L)$ в формуле (12) отличается от первого выражения заменой $f_L \rightarrow -f_L$, $\alpha_L \rightarrow -\alpha_L$. Если будем анализировать величину $g_W^{(L)}(v, t)$ при значении частот $v \approx f$, то в этом случае лишь первое слагаемое в выражении (12) дает основной вклад. В этом случае мгновенная спектральная плотность простейшего нестационарного сигнала $\varepsilon(v, t) \approx |g_W(v, t)|^2$ представляет собой гауссовскую функцию, центрированную по оси времени в точке $t = t_L$, а по частоте в точке $v = f_L$, причем характерные ширины по этим осям различны и существенным образом зависят от ширины окна W . Дальнейшие результаты приведем для случая $f_L \tau_L \gg 1$, когда внутри масштаба τ_L помещается много осцилляций сигнала с частотой f_L (4).

Если имеем узкое окно, удовлетворяющее условию $W \ll \tau_L$, то

$$\varepsilon_L(v, t) \approx \frac{b_L^2 W}{4\sqrt{2\pi}\tau_L^2} \exp\left[-\frac{(t-t_L)^2}{2\tau_L^2}\right] \exp[-8\pi^2(v-f)^2 W^2]. \quad (14)$$

В этом случае, полуширина пика $\varepsilon_L(v, t)$ по времени $\Delta_t = \tau_L$ совпадает с величиной гауссовской огибающей сигнала (4), а полуширина пика $\varepsilon_L(v, t)$ по оси частот $\Delta_v = 1/(4\pi W)$ определяется шириной окна.

Для широкого окна $W \gg \tau_L$ мгновенная спектральная плотность

$$\varepsilon_L(v, t) \approx \frac{b_L^2}{4\sqrt{2\pi}W} \exp\left[-\frac{(t-t_L)^2}{2W^2}\right] \exp[-8\pi^2(v-f)^2 \tau_L^2]. \quad (15)$$

Для такого случая $\Delta_t = W$, а полуширина пика по оси частот $\Delta_v = 1/(4\pi\tau_L)$ определяется величиной τ_L и совпадает с шириной пика в спектре мощности сигнала $\hat{P}_L(v) = |\hat{z}_L(v)|^2$ (6).

Используя выражение (9), можно найти аналитическое выражение для преобразования Габора $g_W(v, t)$ суммарного сигнала $Z(t)$ (3)

$$g_W(v, t) = \sum_{L=0}^{N-1} g_W^{(L)}(v, t - t_L) \quad (16)$$

и получить $\varepsilon(v, t) = |g_W(v, t)|^2$ мгновенную спектральную плотность энергии. Однако вид преобразования Габора (14), (15) зависит от величины окна W , поэтому выбор его оптимального размера для нестационарного сигнала, характерные частоты которого произвольно изменяются во времени, представляет собой сложную задачу.

Непрерывное вейвлет-преобразование

Непрерывное вейвлет-преобразование $V(v, t)$ (CWT)

$$V(v, t) = v \int_{-\infty}^{\infty} Z(t') \psi^*[v(t' - t)] dt' \quad (17)$$

отображает исходный одномерный сигнал $Z(t)$ на плоскость непрерывно изменяющихся аргументов частоты v и времени t . В этом выражении $\psi(x)$ — материнский вейвлет, а значок * означает комплексное сопряжение. Величина v определяет масштаб сжатия или растяжения материнского вейвлета, а аргумент t определяет положение центра его локализации. Если протяженность материнского вейвлета $\psi(x)$ равна Δ_x , то характерные моменты времени t' , вносящие основной вклад в интеграл, удовлетворяют соотношению

$$t - \frac{\Delta_x}{v} < t' < t + \frac{\Delta_x}{v}.$$

Материнский вейвлет играет роль адаптивного окна, ширина которого велика для малых частот v и мала для больших частот. Основной вклад в интеграл $V(v, t)$ дают те составляющие сигнала $z(t')$, которые в наибольшей степени „похожи“ на материнский вейвлет, центрированный в точке $t = t'$ и обладающий частотой v .

Для интегрального вейвлетного преобразования $V(v, t)$ можно ввести фурье-преобразование

$$V(v, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Z}(\omega) \hat{\psi}^*\left(\frac{\omega}{v}\right) \exp(-i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (18)$$

где $\hat{Z}(\omega)$ — фурье-компонента сигнала $z(t)$, а $\hat{\psi}^*(\omega/v)$ — фурье-компонента материнского вейвлета.

Материнский вейвлет $\psi(x)$, используемый в выражении (17), должен быть хорошо локализован вблизи точки $x = 0$, иметь нулевое среднее значение, вычисленное по всему интервалу переменной $-\infty < x < \infty$, и обладать единичной нормой. Такими свойствами удовлетворяет вейвлет Морле [6,9]

$$\psi(x) = D \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \left[\exp(-i\Omega_0 x) - \exp\left(-\frac{\Omega_0^2}{2}\right) \right], \quad (19)$$

где параметр $\Omega_0 = 2\pi$, а константа D равна

$$D = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} \left[1 - 2 \exp\left(-\frac{3\Omega_0^2}{4}\right) + \exp(-\Omega_0^2) \right]}}. \quad (20)$$

По сравнению с классическим фурье-анализом и преобразованием Габора SWT обладает более широкими возможностями и является эффективным инструментом исследования локальных свойств сигналов даже в случае сильной нестационарности, когда быстро изменяются мгновенные локальные частоты. В этом случае локальный спектральный анализ выполняется в пределах окна, зависящего от изучаемой частоты ν [10–13].

Мгновенное распределение энергии сигнала по частотам $\varepsilon(\nu, t)$, представляющее собой локальную плотность спектра сигнала, имеет вид

$$\varepsilon(\nu, t) = \frac{2}{C_\psi} \frac{|V(\nu, t)|^2}{\nu}, \quad (21)$$

где константа C_ψ определена в работе [9]. Преобразование $V(\nu, t)$ (17) обладает свойством аддитивности, поэтому для сигнала $Z(t)$ (3)

$$V(\nu, t) = \sum_{L=0}^{N-1} V_L(\nu, t - t_L). \quad (22)$$

Аналитическое выражение для $V_L(\nu, t)$ может быть получено, если в качестве сигнала $Z(t)$ в выражении (17) взять простейший нестационарный сигнал $z_L(t)$. Для произвольных соотношений между параметрами L (5) величина $V_L(\nu, t)$ имеет вид

$$V_L(\nu, t - t_L) = \frac{\nu D b_L \exp(-A)}{2\sqrt{1 + 2\nu^2 \tau_L^2}} \times [\exp(-i\gamma_+) - 2 \cos \gamma_0 \exp(-B) + \exp(i\gamma_- - C)]. \quad (23)$$

$$A = \frac{\nu^2(t - t_L)^2 + 8\pi^2 \tau_L^2 (f_L - \nu)^2}{2(1 + 2\nu^2 \tau_L^2)}, \quad (24)$$

$$B = \frac{2\pi^2(1 + 4\nu f_L \tau_L^2)}{1 + 2\nu^2 \tau_L^2}, \quad C = \frac{16\pi^2 \nu f_L \tau_L^2}{1 + 2\nu^2 \tau_L^2}, \quad (25)$$

$$\gamma_+ = \alpha_L + \frac{2\pi\nu(t - t_L)(2\nu f_L \tau_L^2 + 1)}{1 + 2\nu^2 \tau_L^2},$$

$$\gamma_- = \alpha_L + \frac{2\pi\nu(t - t_L)(2\nu f_L \tau_L^2 - 1)}{1 + 2\nu^2 \tau_L^2}, \quad (26)$$

$$\gamma_0 = \alpha_L + \frac{4\pi\nu^2 \tau_L^2 f_L (t - t_L)}{1 + 2\nu^2 \tau_L^2}. \quad (27)$$

В практически интересном случае, когда аргумент $\nu \approx f_L$, причем $\nu \tau_L \gg 1$, величина $|V_L(\nu, t - t_L)|^2$ упрощается

$$|V_L(\nu, t - t_L)|^2 = \frac{D^2 b_L^2}{8\tau_L^2} \times \exp\left[-\frac{(t - t_L)^2}{2\tau_L^2} - \frac{4\pi^2(f_L - \nu)^2}{\nu^2}\right] K(\nu), \quad (28)$$

$$K(\nu) = \left[1 - \exp\left(-\frac{8\pi^2 f_L}{\nu}\right)\right]^2 + 4 \cos^2 \gamma \times \exp\left(-\frac{4\pi^2 f_L}{\nu}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{4\pi^2 f_L}{\nu}\right)\right]^2, \quad (29)$$

$$\gamma = \alpha_L + 2\pi f_L (t - t_L). \quad (30)$$

Заметим, что при условиях $\nu \approx f_L$, $\nu \tau_L \gg 1$ второе и третье слагаемые в выражении (23) малы, $\exp(-B) \approx \sqrt{\exp(-C)} \approx 5 \cdot 10^{-15}$.

Проанализируем зависимость величины $|V_L(\nu, t - t_L)|^2$ от времени t . В отличие от преобразования Габора, вид которого зависит от размера окна W , функция $|V_L(\nu, t - t_L)|^2$ (28) имеет универсальное поведение по времени t и представляет собой гауссовский пик (28), ширина которого строго определяется шириной сигнала τ_L (4).

Поведение величины $|V_L(\nu, t - t_L)|^2$ в зависимости от частоты ν является асимметричным пиком, центр которого строго локализован в точке $\nu = f$. Это обстоятельство очень важно при анализе скелетов, анализирующих экстремальные значения поверхности SWT при нахождении мгновенных частот сигнала ν_{\max} .

На больших значениях частот ν величина $|V_L(\nu, t - t_L)|^2$ (28) спадает по закону $1/\nu^2$. Для нахождения спектральной ширины этого пика в момент времени $t = t_L$ введем величину $2\Delta_{\text{FWHM}}$ — полную ширину на половине максимума (FWHM — full width at half maximum). С точностью до отброшенных слагаемых, имеющих малость $\varepsilon = \ln 2 / (4\pi^2) \ll 1$, решение трансцендентного уравнения для определения Δ_{FWHM} имеет вид

$$\frac{2\Delta_{\text{FWHM}}}{f_L} \approx \frac{\sqrt{\ln 2}}{\pi} \left(1 + \frac{\ln 2}{4\pi^2}\right) \approx 0.27. \quad (31)$$

Это свидетельствует о том, что спектральный пик будет шире с увеличением f_L . Отметим, что в случае SWT спектральная ширина пика однозначно определяется величиной f_L , в то время как в преобразовании Габора спектральная ширина пика (14), (15) существенно зависит от ширины окна W .

Рассмотрим задачу о спектральном разрешении SWT для случая, когда нестационарный сигнал $Z(t)$ (17) представляет собой сумму двух простейших элементарных сигналов $z_K(t - t_K)$ и $z_L(t - t_L)$ с разными частотами f_L и f_K , но одинаковыми параметрами (5): $b_L = b_K$, $t_L = t_K$, $\tau_L = \tau_K$, $\alpha_L = \alpha_K$. Будем считать, что выполняются соотношения $f_L \tau_L \gg 1$, $f_K \tau_K \gg 1$. Предполагая, что $f_K > f_L$, можно получить условие разрешения этих двух спектральных пиков

$$\frac{2(f_K - f_L)}{f_K + f_L} > 0.35. \quad (32)$$

В качестве 1-го примера рассмотрим суперпозицию $Z(t)$ (3) двух простейших нестационарных сигналов с параметрами $L = (3, 2, 12, 3, 0)$ и $K = (1, 3, 21, 1, 0)$ (5).

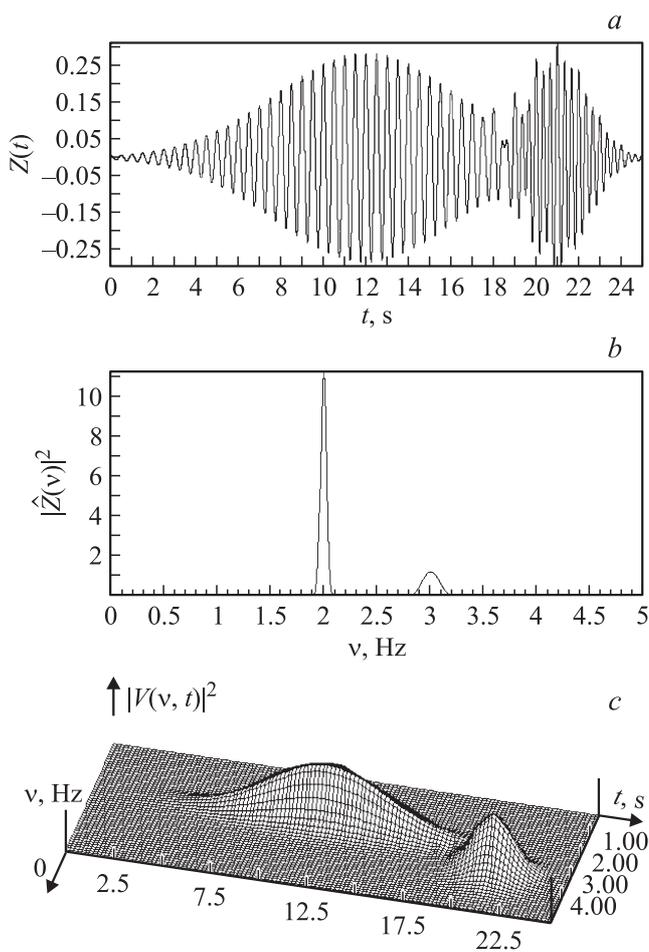


Рис. 1. Суперпозиция $Z(t)$ двух простейших нестационарных сигналов (3) с параметрами $L = (3, 2, 12, 3, 0)$ и $K = (1, 3, 21, 1, 0)$ (5): *a* — зависимость сигнала $Z(t)$ от времени t, s ; *b* — спектр мощности $P(v) = |\hat{Z}(v)|^2$ в зависимости от частоты v ; *c* — зависимость $|V(v, t)|^2$ от частоты v и времени t .

Первый простейший сигнал L имеет амплитуду $b_L = 3$, частоту $f_L = 2$ Hz, центрирован по времени в точке $t_L = 12$ s, характеризуется размером локализации $\tau_L = 3$ s и начальной фазой $\alpha_L = 0$. Второй простейший сигнал имеет чуть большую частоту, центрирован правее и более локализован: $b_K = 1$, $f_K = 3$ Hz, $t_K = 21$ s, $\tau_K = 1$ s, $\alpha_K = 0$. На рис. 1, *a* изображен этот нестационарный сигнал $Z(t)$ в зависимости от времени t . Спектр его фурье-мощности $|Z(v)|^2$ в зависимости от частоты v изображен на рис. 1, *b* и демонстрирует существование двух частот $f_L = 2$ Hz и $f_K = 3$ Hz. Однако спектр Фурье не отвечает на вопрос — когда эти частоты возникли. График квадрата модуля $|V(v, t)|^2$ сигнала $Z(t)$ в зависимости от частоты v и времени t представлен на рис. 1, *c*. Вычисленная с помощью формулы (23) величина $|V(v, t)|^2$ отчетливо показывает моменты времени $t_L = 12$ s и $t_K = 21$ s, когда колебания этих частот имеют максимальную интенсивность.

Во 2-м примере рассмотрим суперпозицию $Z(t)$ двух простейших нестационарных сигналов с параметрами

$L = (3, 2, 12, 3, 0)$ и $K = (1, 3, 12, 1, 0)$ (5). В отличие от первого случая центры локализации как первого, так и второго совпадают $t_L = t_K = 12$ s. Все другие параметры двух простейших сигналов совпадают с 1-м примером. На рис. 2, *a* изображен этот нестационарный сигнал $Z(t)$ в зависимости от времени t, s . Видно, что в отличие от 1-го примера на графике сигнала в момент времени $t = 12$ s наблюдаются биения двух колебаний с частотами $f_L = 2$ Hz и $f_K = 3$ Hz. Спектр его фурье-мощности $|Z(v)|^2$ (рис. 2, *b*) в зависимости от частоты v не отличается от рис. 1, *b*. График $|V(v, t)|^2$ для сигнала $Z(t)$ (рис. 2, *c*) показывает сложное взаимодействие двух колебаний с частотами $f_L = 2$ Hz и $f_K = 3$ Hz, причем максимумы колебаний локализованы в момент времени $t = 12$ s.

3-й пример представляет собой суперпозицию 24 пиков ($L = 0, 1, 2, \dots, 23$). У всех пиков L одинаковы амплитуды и размеры локализации $b_L = 4$, $\tau_L = 0.5$ s. На интервале времени $0 \leq t \leq 25$ s расположены равноудаленные вершины гауссовских пиков $t_L = 1 + L$, при этом частоты f_L каждого простейшего нестационарного сигнала $z_L(t)$ линейно нарастают по закону $f_L = 4L/23$ Hz.

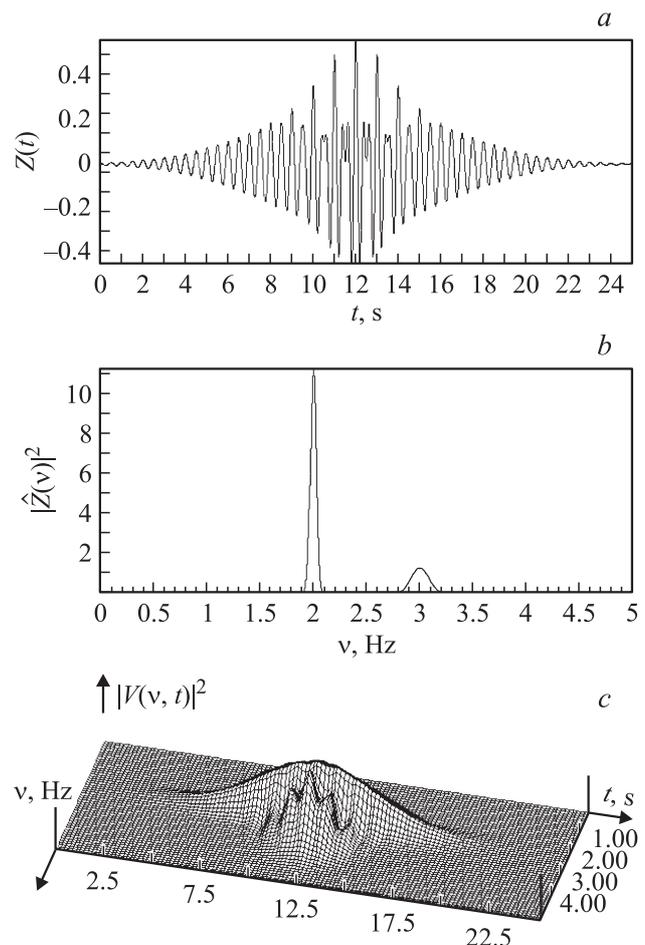


Рис. 2. Суперпозиция $Z(t)$ двух простейших нестационарных сигналов (3) с параметрами $L = (3, 2, 12, 3, 0)$ и $K = (1, 3, 12, 1, 0)$. Остальные обозначения те же, что на рис. 1.

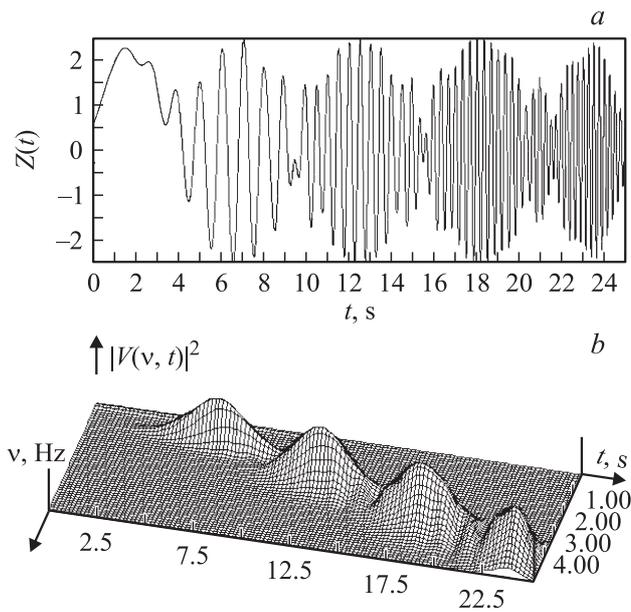


Рис. 3. Суперпозиция $Z(t)$ 24 равноотстоящих гауссовских пиков с частотами, линейно зависящими от времени: a — зависимость сигнала $Z(t)$ от времени t ; b — зависимость $|V(v, t)|^2$ от частоты v и времени t .

График такого нестационарного сигнала $Z(t)$ представлен на рис. 3, a . На рис. 3, b построена аналитическая зависимость величины $|V(v, t)|^2$, отражающая сложную зависимость от времени спектральной динамики нестационарного сигнала $Z(t)$ (рис. 3, a). Этот график показывает моменты времени возникновения локальных частот и отображает переходные этапы перестройки частотного спектра сигнала.

Заключение

В настоящей работе предложена аналитическая модель сложного нестационарного сигнала $Z(t)$, спектральные свойства которого изменяются во времени. Данная модель представляет собой суперпозицию L простейших нестационарных сигналов $z_L(t - t_L)$ (4), каждый из которых характеризуется своей амплитудой b_L . Его центр локализации находится в точке t_L , характерный размер локализации равен τ_L , частота колебаний — f_L , а начальная фаза колебаний — α_L . В статье приведена фурье-компонента сигнала $\hat{z}_L(\omega)$, зная которую можно найти спектральные свойства сложного нестационарного сигнала $\hat{z}(\omega)$. Подбирая различные комбинации параметров $L = (b_L, f_L, t_L, \tau_L, \alpha_L)$, можно сконструировать теоретическую модель, допускающую аналитическое решение, адекватно описывающую реальные физические процессы с нестационарными физическими сигналами $Z(t)$.

Рассмотрено оконное преобразование Фурье $g_W(v, t)$ (преобразование Габора), зависящее от частоты v , времени t и ширины окна W . Для сигнала $z_L(t - t_L)$ получено аналитическое выражение для оконного преобразования $g_W^{(L)}(v, t)$ (12) и приведены предельные случаи

для узкого $W \ll \tau_L$ и широкого окна $W \gg \tau_L$. Принцип аддитивности преобразования Габора дает возможность получить выражение для суммарного преобразования $g_W(v, t)$ сложного сигнала $Z(t)$. Недостатком оконного преобразования Фурье является зависимость спектральной плотности сигнала от размера окна W . Для сложных сигналов, динамично изменяющих свои спектральные свойства, оптимальный выбор размера окна является трудоемкой задачей.

Непрерывное вейвлет-преобразование $V(v, t)$ (CWT) введено с использованием материнского вейвлета Морле. Для простейшего нестационарного сигнала $z_L(t - t_L)$ получено аналитическое выражение для $V_L(v, t)$ (20). Показано, что временная протяженность величины $V_L(v, t)$ совпадает с τ_L . Спектральная ширина этого пика, центрированного в точке $v = f_L$, равняется $2\Delta_{\text{FWHM}} \approx 0.27f_L$. Получен критерий спектрального разрешения двух гармонических колебаний с частотами f_K и f_L (32). Рассмотрены три примера нестационарного сигнала $Z(t)$, для которых подробно проанализирован график сигнала, спектр Фурье и величина $V(v, t)$. Демонстрировано, как величина $V(v, t)$ отражает сложную динамику изменения спектральных свойств нестационарного сигнала, диагностирует локальные частоты и анализирует переходные этапы. Показано преимущество CWT перед преобразованием Габора.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России (2009–2013)“.

Список литературы

- [1] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, 2001. 462 с.
- [2] Чуи К. Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001. 416 с.
- [3] Витязев В.В. Вейвлет анализ временных рядов. Учебн. пособ. СПб: Изд-во СПбГУ, 2001. 58 с.
- [4] Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлет анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 176 с.
- [5] Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.
- [6] Goupillud P., Grossman A., Morlet J. // Geophysical. 1984. Vol. 23. P. 85.
- [7] Альбеверио С., Гестези Ф., Хёгг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. URSS. 1991. 566 с.
- [8] Бэкстер Р. Точно решаемые модели в статистической механике. М.: Мир, 1985. 488 с.
- [9] Божожин С.В. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 9. С. 16.
- [10] Addison P.S. // Physiol. Meas. 2005. Vol. 26. P. 155.
- [11] Shyu H.C., Sun Y.S. // Multidimensional systems and signal processing. 2002. Vol. 13. P. 101.
- [12] Sinha S., Partha P.J., Anno P.D., Castanga J.P. // Geophysics. 2005. Vol. 70. N 6. P. 19.
- [13] Bussow R. // Mechanical Systems and Signal Processing. 2007. Vol. 21. N 8. P. 2970.