

01;10;11

Влияние пространственного заряда и начальной скорости электронов на распределение потенциала в плоском диоде

© Н.С. Келлин, А.И. Толмачев

Российский новый университет,
105005 Москва, Россия
e-mail: tolmachev.alex@rambler.ru

(Поступило в Редакцию 29 марта 2011 г. В окончательной редакции 28 июня 2011 г.)

Проведено решение задачи о распределении потенциала в плоском вакуумном диоде для произвольных значений плотности пространственного заряда и начальной скорости электронов. Найденное решение позволило изучить условия появления вблизи катода минимума потенциала, определить положение и глубину минимума, получить аналитические формулы для распределения потенциала во всем пространстве между катодом и анодом, а также проанализировать проблему бесконечной плотности пространственного заряда.

Введение

Развитие теоретической электронной оптики, занимающейся исследованием интенсивных электронных потоков, в которых эффекты пространственного заряда велики, имеет большое значение для многих практических применений [1–7]. Одной из важных задач в теории формирования интенсивных электронных потоков является задача о распределении потенциала в плоском диоде. Это связано с тем, что решения уравнений для любых интенсивных потоков в областях, очень близких к катоду, подобны решениям для потока в плоском диоде [3].

Наиболее строгая постановка задачи о плоском диоде учитывает максвелловское распределение по скоростям электронов, выходящих с катода, однако в этом случае удается получить лишь численное решение, представленное в виде графиков и таблиц (см. обзоры [1–3]). В ряде дальнейших работ распределение по скоростям не учитывалось и считалось, что все электроны покидают катод с одинаковой скоростью, которая либо равна нулю [8], либо принимает некоторое конечное значение [4,5,9,10]. В указанных работах было также сделано дополнительное предположение о том, что диод работает в режиме ограничения тока пространственным зарядом, при котором напряженность электрического поля на катоде равна нулю. Недостатком такого предположения является то, что оно заранее исключает возможность появления вблизи катода минимума потенциала и, кроме того, при нулевой начальной скорости электронов вторая производная потенциала на катоде оказывается бесконечной, что соответствует бесконечной плотности пространственного заряда. В работе [6] был рассмотрен случай конечных значений напряженности поля на катоде при нулевой начальной скорости электронов, но решение задачи не было доведено до конца.

В действительности режим ограничения тока пространственным зарядом устанавливается лишь при строго определенной комбинации плотности тока, анодного

напряжения, размера диода и начальной скорости электронов. Поэтому заслуживает внимания рассмотрение задачи в общей постановке — для произвольных значений напряженности электрического поля на катоде и произвольной начальной скорости электронов.

1. Уравнение Пуассона

Мы решаем следующую задачу. В плоском диоде катод расположен в плоскости $z = 0$ и имеет потенциал $U = 0$, анод расположен в плоскости $z = D$ и имеет фиксированный положительный потенциал $U = U_0$. Электроны покидают катод, ускоряются в электрическом поле и попадают на анод, при этом на электроны действует также тормозящее электрическое поле их собственного пространственного заряда. Нашей целью является определение того, как будет меняться распределение потенциала $U(z)$ в области между катодом и анодом при постепенном увеличении плотности тока на катоде и, следовательно, при увеличении плотности пространственного заряда. Двумя параметрами в задаче являются плотность электрического тока на катоде j_0 и начальная скорость электронов v_0 .

Уравнение Пуассона для плоского диода имеет вид [4,5]

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{A}{\sqrt{\Phi + w^2}}, \quad (1)$$

где $\Phi(x) = U(x)/U_0$ — нормированный потенциал, $x = z/D$ — нормированная координата,

$$A = \frac{j_0 D^2}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2eU_0^3}}, \quad w = \sqrt{\frac{mv_0^2}{2eU_0}} \quad (2)$$

— параметры величины пространственного заряда и начальной скорости электронов соответственно, ϵ_0 — электрическая постоянная, e и m — заряд и масса электрона. Дифференциальное уравнение (1) решается при граничных условиях на катоде и аноде

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(1) = 1. \quad (3)$$

Соотношения (1) и (3) представляют собой двухточечную краевую задачу для нелинейного автономного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Применяя стандартный метод решения [11], после двукратного интегрирования получаем

$$(2AY + 6Aw - B^2)\sqrt{4AY + B^2} = \pm [6A^2x + B(6Aw - B^2)], \quad (4)$$

где вместо неизвестной функции $\Phi(x)$ введена функция

$$Y(x) = \sqrt{\Phi(x) + w^2} - w, \quad (5)$$

$B = \Phi'(0)$ — нормированная напряженность электрического поля на катоде, зависящая от параметров A и w и подлежащая определению в процессе решения задачи. Знак в правой части уравнения (4) зависит от значения параметра B . При $B \geq 0$ потенциал всюду нарастает, и ставится знак плюс. При $B < 0$ на расстоянии x_{\min} от катода появляется минимум потенциала. В этом случае в области $0 \leq x \leq x_{\min}$ в правой части уравнения (4) ставится знак минус, а в области $x_{\min} \leq x \leq 1$ — знак плюс.

Соотношения (4) и (5) дают в неявном виде распределение потенциала между катодом и анодом. Однако этими соотношениями можно пользоваться лишь после того, как с помощью граничного условия на аноде будет установлена связь между параметрами A и B .

2. Связь между параметрами A и B

Возводя обе части соотношения (4) в квадрат и проводя сокращения, получаем выражение, не содержащее радикалов и двойных знаков:

$$9A^2x^2 - 2A[2Y(Y + 3w)^2 - 9Bwx] + 3B^2(Y^2 + 2Yw - Bx) = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) в других обозначениях было получено в работе [6] для случая $w = 0$, но решение задачи на этой стадии было прекращено.

Подставляя $x = 1$, получаем квадратное уравнение для нахождения параметра A :

$$3A^2 - 3A(A_0 - 2Bw) + B^2(1 - B) = 0, \quad (7)$$

где

$$A_0(w) = \frac{4}{9}(\sqrt{1 + w^2} - w)(\sqrt{1 + w^2} + 2w)^2 \quad (8)$$

— значение параметра A при $B = 0$. Решением уравнения (7) будет

$$A(B, w) = \frac{A_0}{2} - Bw \pm \frac{A_0}{2} \left(1 - \frac{B}{B_1}\right) \sqrt{1 - \frac{B}{B_2}}, \quad (9)$$

где обозначено

$$B_1(w) = \frac{2}{3}(\sqrt{1 + w^2} - w)(\sqrt{1 + w^2} + 2w), \quad (10)$$

$$B_2(w) = -\frac{1}{3}(\sqrt{1 + w^2} + 2w)^2. \quad (11)$$

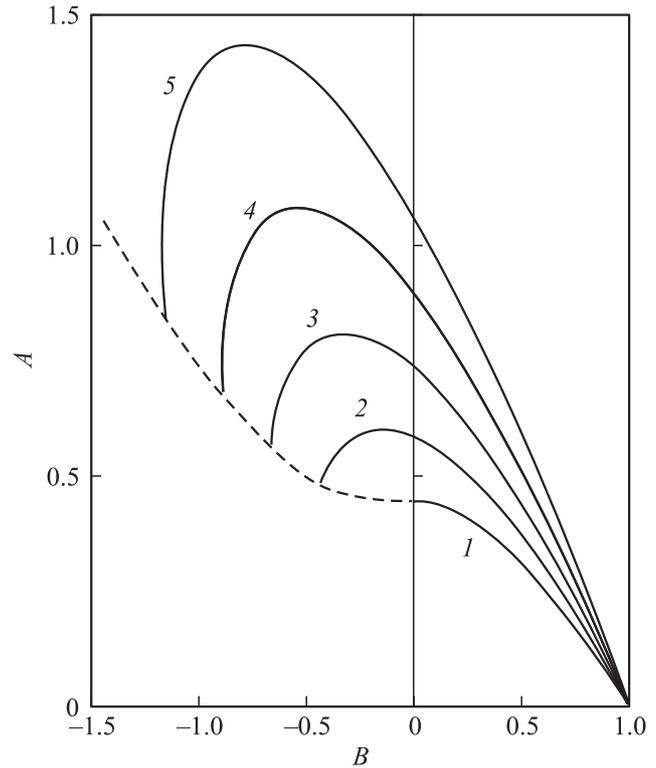


Рис. 1. Зависимость параметра пространственного заряда A от нормированной напряженности электрического поля на катоде B для значений параметра начальной скорости электронов $w = 0.0$ (кривая 1), 0.1 (2), 0.2 (3), 0.3 (4) и $w = 0.4$ (5). Пунктир — кривая отсечки.

Параметр B_2 определяет минимально возможное значение напряженности электрического поля на катоде при заданной плотности тока. При $B = B_2$ производная $A'(B)$ обращается в бесконечность, после чего функция $A(B, w)$ становится двузначной. Два знака в выражении (9) также связаны с тем, что при значениях $w \geq w_0 = 1/\sqrt{15} = 0.2582$ функция $A(B, w)$ является двузначной функцией параметра B (кривые 4 и 5 на рис. 1). При $w \leq w_0$ в выражении (9) следует оставлять только положительный знак.

Зависимость (9) изображена на рис. 1 для различных значений параметра w . При $B \leq 0$ семейство кривых $A(B, w)$ ограничено снизу кривой отсечки, которая соответствует случаю, когда кинетическая энергия электронов оказывается недостаточной для преодоления потенциального минимума, т.е. $\Phi_{\min} = -w^2$. Кривая отсечки удовлетворяет уравнению

$$(16A_{cut-off}^2 + B^4)^3 = (12A_{cut-off}^2 + B^3)^4 \quad (12)$$

и изображена на рис. 1 пунктиром. Аналогичная двузначная зависимость, полученная численно, приведена в работе [7], посвященной прохождению электронного пучка через плоский пролетный промежуток.

Поскольку параметр A пропорционален плотности тока, кривые $A(B, w)$ можно рассматривать как зависимости анодного тока от напряженности электрического

поля на катоде при различных начальных скоростях электронов. При уменьшении напряженности электрического поля анодный ток нарастает и при нулевой напряженности достигает значения, соответствующего режиму ограничения тока пространственным зарядом. При отрицательных значениях напряженности электрического поля на катоде анодный ток продолжает нарастать, проходит через максимум,

$$A_{\max}(w) = \frac{4}{9} (\sqrt{1+w^2} + w)^3, \quad (13)$$

который достигается при

$$B_{\max}(w) = -\frac{4}{3} w (\sqrt{1+w^2} + w), \quad (14)$$

затем убывает и при определенной напряженности электрического поля прекращается. В отличие от плоского вакуумного триода, в котором анодный ток прекращается при некотором отрицательном напряжении на сетке, в нашем случае диод запирается за счет отрицательного минимума потенциала, глубина которого увеличивается при увеличении пространственного заряда, то есть самого тока.

3. Распределение потенциала

Приравнивая обе части уравнения (4) к нулю, находим координату и глубину минимума потенциала, которые равны

$$x_{\min} = \frac{B(B^2 - 6Aw)}{6A^2}, \quad \Phi_{\min} = \frac{B^2(B^2 - 8Aw)}{16A^2} \quad (15)$$

при $B < 0$ и обращаются в нуль при $B \geq 0$.

Переходя в выражении (4) к неизвестной функции

$$y(x) = \sqrt{4AY(x) + B^2}, \quad (16)$$

получаем кубическое уравнение

$$y^3 + 3py + 2q = 0, \quad (17)$$

в котором

$$p = 4Aw - B^2, \quad q = \mp [6A^2x + B(6Aw - B^2)]. \quad (18)$$

В области выше кривой отсечки дискриминант $\Delta = p^3 + q^2$ положителен, и существует единственный действительный корень, определяемый по формуле Кардано [12]:

$$y(x) = \sqrt[3]{\sqrt{\Delta} - q} - \sqrt[3]{\sqrt{\Delta} + q}. \quad (19)$$

При отрицательном дискриминанте уравнение (17) имеет три различных действительных корня, и нужное нам решение имеет вид

$$y(x) = 2\sqrt{-p} \cos\left(\frac{1}{3} \arctg \sqrt{\frac{-\Delta}{q^2}} - \frac{\pi k}{3}\right), \quad (20)$$

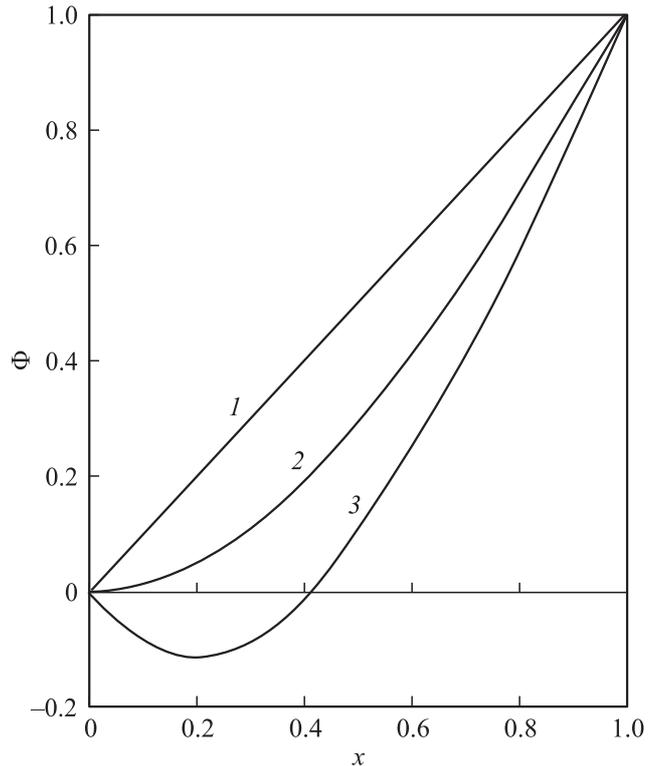


Рис. 2. Зависимость нормированного потенциала Φ от нормированной координаты x при величине параметра начальной скорости электронов $w = 0.4$ для значений нормированной напряженности электрического поля на катоде $B = 1$ (кривая 1), $B = 0$ (2) и $B = -1$ (3).

где $k = 0$ при $q \leq 0$ и $k = 1$ при $q \geq 0$. После определения функции $y(x)$ потенциал рассчитывается по формуле

$$\Phi(x) = \left(\frac{y^2 + p}{4A}\right)^2 - w^2. \quad (21)$$

Полученные результаты проиллюстрированы графиками на рис. 2, построенными по формулам (18)–(21).

В частном случае очень малого пространственного заряда $A \rightarrow 0$ и $B \rightarrow 1$ для любых значений w . Подставляя $k = 1$ в уравнение (20) и проводя разложение по степеням малого параметра A , находим $\Phi(x) = x$, что соответствует плоскому воздушному конденсатору с постоянной напряженностью электрического поля (рис. 2, кривая 1).

В другом частном случае $B = 0$ из уравнений (2) и (9) получаем закон трех вторых

$$j_0 = A_0(w) \frac{\varepsilon_0}{D^2} \sqrt{\frac{2eU_0^3}{m}} \quad (22)$$

— плотность тока пропорциональна анодному напряжению в степени три вторых. При нулевой начальной скорости электронов $A_0 = 4/9$, и соотношение (22) выражает закон Чайлда–Ленгмюра, для которого настоящий год является юбилейным [13,14]. Обобщение на

случай конечной начальной скорости электронов в виде множителя (8) было сделано Вайнштейном [4,5]. Однако из рис. 1 следует, что максимальное значение плотности тока достигается не при $B = 0$, а при отрицательном значении (14), соответствующим максимуму функции $A(B, w)$,

$$j_{\max} = A_{\max}(w) \frac{\varepsilon_0}{D^2} \sqrt{\frac{2eU_0^3}{m}}, \quad (23)$$

где значение A_{\max} задается формулой (13). При нулевой начальной скорости электронов $A_{\max} = A_0$, при $w = 0.2$ величина A_{\max} превышает A_0 на 10%, а при $w = 0.4$ — на 35%. Распределение потенциала при $B = 0$ иллюстрирует рис. 2, кривая 2.

При дальнейшем увеличении плотности тока напряженность электрического поля на катоде становится отрицательной и появляется потенциальный минимум (рис. 2, кривая 3). Распределение потенциала при $B < 0$ всюду симметрично относительно точки $x = x_{\min}$. Вблизи минимума, при малых значениях параметра q , потенциал ведет себя квадратичным образом,

$$\Phi(x) - \Phi_{\min} = \frac{A(x - x_{\min})^2}{2\sqrt{\Phi_{\min} + w^2}}, \quad (24)$$

при этом плотность пространственного заряда в минимуме потенциала остается конечной.

Интересно сравнить результат (24) с результатом, полученным при учете распределения электронов по скоростям [3]:

$$\Phi(x) - \Phi_{\min} = \frac{A(x - x_{\min})^2}{2w} \exp(\Phi_{\min}) (1 - \operatorname{erf} \sqrt{-\Phi_{\min}}), \quad (25)$$

где $\operatorname{erf}(t)$ — функция ошибок [12], параметры A и w по-прежнему определяются формулой (2), но в качестве начальной скорости берется средняя скорость теплового движения электронов, а глубина минимума потенциала определяется методом последовательных приближений. В точке максимума функции $A(B, w)$ при бесконечно малой начальной скорости электронов правые части уравнений (24) и (25) совпадают, при $w = 0.1$ — различаются на 13%, а при $w = 0.2$ — на 28%.

Квадратичная зависимость потенциала в окрестности минимума нарушается, если рабочая точка находится на кривой отсечки и знаменатель дроби в выражении (24) обращается в нуль. При этом $p = 0$ и потенциал на всем интервале $0 \leq x \leq 1$ выражается в простом виде

$$\Phi(x) = \Phi_{\min} + \left(\frac{3}{2} \sqrt{A} |x - x_{\min}| \right)^{4/3}, \quad (26)$$

которому соответствует бесконечная плотность пространственного заряда в минимуме потенциала. Эффект бесконечной плотности пространственного заряда приводит к различным видам неустойчивости, наблюдаемой при прохождении интенсивного электронного пучка через плоский пролетный промежуток [7]. Точка,

соответствующая режиму ограничения тока пространственным имеет на рис. 1 координаты $A = 4/9$, $B = 0$ и в точности лежит на кривой отсечки. Для этой точки уравнение (26) дает известное степенное распределение потенциала $\Phi(x) = x^{4/3}$.

Заключение

Решена задача о распределении потенциала в плоском диоде для произвольных значений плотности пространственного заряда и начальной скорости электронов. Показано, что максимальный ток через диод достигается при определенной отрицательной напряженности электрического поля на катоде и его величина может существенно превышать значения, соответствующие режиму ограничения тока пространственным зарядом. В результате решения кубического уравнения получены в явном виде выражения для координаты и глубины минимума потенциала и аналитические формулы для распределения потенциала во всем пространстве между катодом и анодом. Найденные формулы могут быть использованы в качестве тестовых задач для проверки создаваемых численных программ, а также для предварительных оценочных расчетов.

Список литературы

- [1] *Langmuir I.* // Phys. Rev. 1923. Vol. 21. N 4. P. 419–435.
- [2] *Nottingham W.D.* Thermionic Emission. Handbuch der Physik. Berlin: Springer Verlag, 1956. Bd. 21. S. 1–175.
- [3] *Курштейн П.Т., Кайно Г.С., Уотерс У.Е.* Формирование электронных пучков. Пер. с англ. / Под ред. Л.В. Шубина. М.: Мир, 1970. 600 с.
- [4] *Вайнштейн Л.А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. Курс лекций в 1-й зимней школе-семинаре инженеров по теоретической электронике СВЧ. Саратов: Волжские дали, 1970. Ч. 1. 220 с.
- [5] *Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Советское радио, 1973. 400 с.
- [6] *Абрамян Е.А., Альтеркоп Б.А., Кулешов Г.Д.А.* Интенсивные электронные пучки. М.: Энергоатомиздат, 1984. 232 с.
- [7] *Трубевцов Д.И., Храмов А.Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. М.: Физматлит. 2004. Т. 2. 648 с.
- [8] *Беломятцев С.Я., Коровин С.Д., Пегель И.В.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 6. С. 97–101.
- [9] *Толмачев А.И.* // Письма в ЖТФ. 1977. Т. 3. Вып. 22. С. 1203–1205.
- [10] *Акимов П.И., Богословская А.Б.* // Прикладная физика. 2002. Вып. 4. С. 90–101.
- [11] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с нем. С.В. Фомина. М.: Наука, 1971. 576 с.
- [12] *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1980. 976 с.
- [13] *Child C.D.* // Phys. Rev. 1911. Vol. 32. N 5. P. 492–511.
- [14] *Langmuir I.* // Phys. Rev. 1913. Vol. 2. N 6. P. 450–486.