

01;03;12

Компьютерное моделирование и анализ насоса Холвека в переходном режиме

© Ю.Ю. Клосс,^{1,2} Д.В. Мартынов,^{1,2} Ф.Г. Черемисин^{1,3}

¹ Московский физико-технический институт,
147700 Москва, Россия

² Российский научный центр «Курчатовский институт»,
123182 Москва, Россия

³ Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН,
117967 Москва, Россия

e-mail: kloss@mnpt.kiae.ru, mart1989@list.ru, tcherem@ccas.ru

(Поступило в Редакцию 10 июня 2011 г.)

Представлено компьютерное моделирование насоса Холвека с помощью численного решения кинетического уравнения Больцмана. Нелинейный интеграл столкновений вычислялся консервативным проекционным методом. Оператор переноса аппроксимирован с помощью тетраэдрических сеток. Исследовано отношение давлений в накачиваемом и откачиваемом резервуарах от степени разреженности газа, радиуса ротора и его скорости вращения при числах Кнудсена порядка единицы.

Введение

Первоначальный вариант высоковакуумного молекулярного насоса винтового типа был предложен французским физиком Ф. Холвеком 1 июня 1921 г. Насос состоял из ротора и статора с вырезанными дорожками. Ротор насоса имел диаметр 150 мм, был 250 мм в длину и вращался с радиальной скоростью 35 м/с. Отношение давлений на концах насоса достигало 10^6 . Далее конструкция насоса улучшалась Холвеком и другими исследователями для увеличения скорости потока газа и отношения давлений на концах насоса и уменьшения размеров насоса. В настоящее время высоковакуумные молекулярные насосы винтового типа используются в сочетании с турбомолекулярными насосами.

Для оптимизации работы насоса необходимо определить параметры, при которых эффективность насоса максимальна. Наиболее экономичным способом решения этой задачи является компьютерное моделирование течений газа в устройстве. При числах Кнудсена $Kn < 0.01$ для расчетов применимы макроскопические уравнения Навье–Стокса [1,2]. В свободном молекулярном режиме некоторые исследования были проведены с помощью метода Монте-Карло [1–3]. В переходном режиме при $0.01 \leq Kn < 10$ уравнения Навье–Стокса не применимы, а метод Монте-Карло требует больших временных затрат для достижения точных результатов [1,4].

Эффективное с точки зрения временных затрат и точности компьютерное моделирование течений газа в переходном режиме возможно с помощью решения кинетического уравнения Больцмана проекционным методом [5], консервативным по массе, импульсу и энергии. В настоящем исследовании этот метод, реализованный в разработанной проблемно-моделирующей среде nsolver [6–9], используется для анализа насоса

Холвека. Ввиду сложной геометрии устройства оператор переноса аппроксимируется с помощью тетраэдрических сеток.

В настоящей работе изучается структура потока газа и распределения давления в насосе Холвека и приводятся соответствующие графики и трехмерные изображения. Исследуется зависимость отношения давлений в резервуарах от числа Кнудсена в переходном режиме. Приводятся графики зависимости отношения давлений в резервуарах от радиуса ротора и скорости его вращения.

1. Постановка задачи

Насос Холвека состоит из двух основных частей: ротор и статор с вырезанными дорожками, по которым газ перетекает из одного резервуара в другой. Поток газа, возникающий вследствие взаимодействия с ротором, приводит к эффекту откачки. На рис. 1 изображены ротор (справа) и статор с вырезанными дорожками для газа (слева).

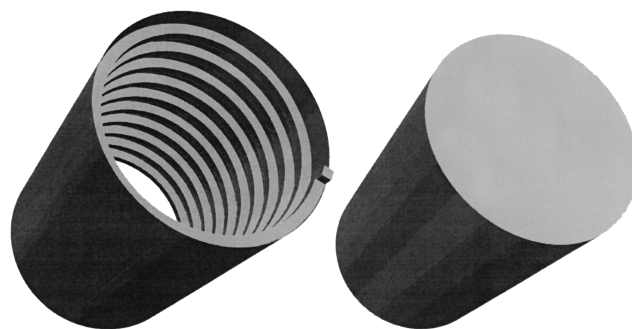


Рис. 1. Компьютерная модель статора (слева) и ротора (справа) насоса Холвека.

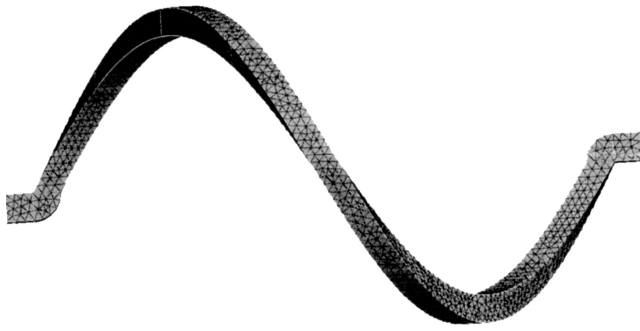


Рис. 2. Компьютерная модель дорожки в статоре насоса Холвека.

Параметрами задачи являются радиус ротора, скорость его вращения, геометрические размеры дорожек в статоре, давление газа, угол между дорожками и осью цилиндра и зазор между ротором и статором. Число Кнудсена может определяться как по ширине a , так и по высоте c дорожки. В настоящей работе полагается, что $a = c$, а число Кнудсена $Kn = \lambda/a$, где λ — длина свободного пробега газа. Зазор между ротором и статором в насосах Холвека мал по сравнению с размерами дорожек, поэтому при данном компьютерном моделировании он не учитывается.

Для анализа течений газа в насосе Холвека рассматривается часть вырезанной в статоре дорожки. Она приведена на рис. 2. Эта изогнутая трубка, имеющая вид винтовой линии, является расчетной областью. В ней численно решается кинетическое уравнение Больцмана с соответствующими начальными и граничными условиями относительно функции распределения по скоростям $f(t, x, \xi)$, зависящей от времени t , трехмерной координаты x и трехмерной скорости ξ .

Уравнение Больцмана для одноатомного газа записывается в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial x} = I. \quad (1)$$

Интеграл столкновений Больцмана, опуская переменные x и t , имеет вид

$$I(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{b_m^2/2} (f' f'_* - f f_*) g d\sigma d\varphi d\xi_*. \quad (2)$$

Здесь обозначено $f \equiv f(\xi)$, $f_* \equiv f(\xi_*)$, $f' \equiv f(\xi')$, $f'_* \equiv f(\xi'_*)$, $g = \xi_* - \xi$, σ и φ — параметры бинарного столкновения, b_m — максимальное прицельное расстояние молекул, при котором проходит столкновение. Скорости после столкновения ξ' , ξ'_* зависят от скоростей до столкновения ξ , ξ_* и параметров столкновения σ , φ .

В начальный момент газ имеет максвелловское распределение по скоростям с нулевой макроскопической скоростью

$$f(t, x, \xi) = n_0 \sqrt{\left(\frac{m}{2\pi k T_0}\right)^3} \exp\left(-\frac{m\xi^2}{2kT_0}\right),$$

где m — масса молекул газа, n_0 — начальная плотность газа, T_0 — начальная температура газа, k — постоянная Больцмана.

Граничные условия ставятся следующим образом: на стенке, граничащей с ротором, газ отражается диффузно с максвелловским распределением по скоростям с макроскопической скоростью, равной скорости вращения ротора. От остальных стенок газ отражается диффузно с нулевой макроскопической скоростью.

2. Численный метод

В процессе численного решения кинетического уравнения Больцмана моделируется функция распределения по скоростям $f(t, x, \xi)$. После того как эта функция найдена, могут быть посчитаны наблюдаемые макроскопические величины газа: числовая плотность $n(x, t)$, макроскопическая скорость $u(x, t)$, температура $T(x, t)$, тензор давлений $P_{ij}(x, t)$, поток энергии $E(x, t)$, тепловой поток $q(x, t)$ и другие

$$n = \int f d\xi, \quad u = \frac{1}{n} \int \xi f d\xi, \quad T = \frac{m}{3nk} \int c^2 f d\xi,$$

$$P_{ij} = m \int c_i c_j f d\xi, \quad E = \frac{m}{2} \int \xi^2 \xi f d\xi, \quad q = \frac{m}{2} \int c^2 c f d\xi.$$

Здесь использованы тензорные обозначения, $c = (c_x, c_y, c_z) = \xi - u$, m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана.

2.1. Безразмерные переменные

Перейдем к безразмерным переменным и безразмерной функции распределения

$$\xi^* = \frac{\xi}{v_0}, \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad x^* = \frac{x}{\lambda}, \quad T^* = \frac{T}{T_0},$$

$$n^* = \frac{n}{n_0}, \quad f^* = \frac{f}{n_0 v_0^{-3}},$$

$$v_0 = \sqrt{kT_0/m}, \quad \lambda = 1/(\sqrt{2}\pi n_0 \sigma_{\text{эф}}^2), \quad \tau_0 = \lambda/v_0,$$

где v_0 — нормировочная скорость, τ_0 — нормировочное время, m — масса молекул газа, λ — длина свободного пробега молекулы газа, $\sigma_{\text{эф}}$ — эффективный диаметр молекул, T_0 — нормировочная температура газа, n_0 — нормировочная числовая плотность газа.

Опустим знак * и вернемся к прежним обозначениям.

2.2. Расщепление и дискретизация уравнения Больцмана

В безразмерных переменных уравнение Больцмана запишется в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}} I. \quad (3)$$

Уравнение (3) разбивается на две части: перенос вещества (левая часть) и процесс релаксации (правая часть). Разбиение имеет вид $S_\tau = T_{\tau/2} C_\tau T_{\tau/2}$, где S_τ — оператор преобразования решения из момента времени t_0 в момент времени $t_0 + \tau$, $T_{\tau/2}$ — оператор решения уравнения переноса $\partial f / \partial t + \xi \cdot \partial f / \partial x = 0$ с временным шагом τ , C_τ — оператор решения уравнения релаксации $\partial f / \partial t = I / \sqrt{2}$.

Уравнение (3) решается конечно-разностным методом на постоянной сетке в скоростном и координатном пространствах. Расчетная область в координатном пространстве разбивается на тетраэдры с помощью пакета Gmsh [10] (рис. 2), и уравнение переноса решается с помощью метода конечных объемов. Сферическая область Ω на равномерной сетке с шагом $h_\tau = 2V_{\max} / N_0$, где N_0 — число узлов вдоль каждой координаты, выбирается в качестве скоростного пространства. Максимальная скорость находится, исходя из условия $V_{\max} = 4.8 \sqrt{T_{\max}}$, где T_{\max} — максимальная температура, достигаемая в течении.

При переходе от непрерывной функции распределения по скоростям к дискретной обозначим функцию распределения в i -й ячейке координатного пространства после переноса вещества $f_{i,\gamma}^*$, после расчета столкновений $f_{i,\gamma}^{n+1}$, а решение на предыдущем временном слое как $f_{i,\gamma}^n$. Получим следующую последовательность уравнений:

$$\frac{f_{i,\gamma}^* - f_{i,\gamma}^n}{\tau} = \frac{1}{V_i} \sum_{k=1}^K (\xi_\gamma, n_{i,k}) \cdot f_{i,k,\gamma}^n S_{i,k}, \quad (4)$$

$$\frac{f_{i,\gamma}^{n+1} - f_{i,\gamma}^*}{\tau} = I_{i,\gamma}, \quad (5)$$

где $n_{i,k}$ — единичная нормаль к общей грани тетраэдров i и k , $S_{i,k}$ — площадь грани, V_i — объем тетраэдра i , $f_{i,k,\gamma}$ — функция распределения на общей грани тетраэдров i и k .

2.3. Решение уравнения переноса

Уравнение переноса (4) решается с помощью явной схемы первого порядка точности, $f_{i,k,\gamma}$ определяется по формуле

$$f_{i,k,\gamma} = \begin{cases} f_{i,\gamma}, & (n_{i,k} \xi_\gamma) < 0, \\ f_{k,\gamma}, & (n_{i,k} \xi_\gamma) > 0. \end{cases}$$

Если же тетраэдр граничит со стенкой, то функция распределения на грани находится из условия

$$f_{i,k,\gamma} = \begin{cases} f_{i,\gamma}, & (\xi, n_j) < 0, \\ x \exp\left(-\frac{(\xi - U)^2}{2T_{\text{well}}}\right), & (\xi, n_j) > 0, \end{cases}$$

где x определяется из закона сохранения вещества, j — номер прилегающей к стенке грани тетраэдра.

Описанные случаи иллюстрированы на рис. 3. Слева схематично представлены граничащие тетраэдры, справа — тетраэдр, прилегающий к стенке.

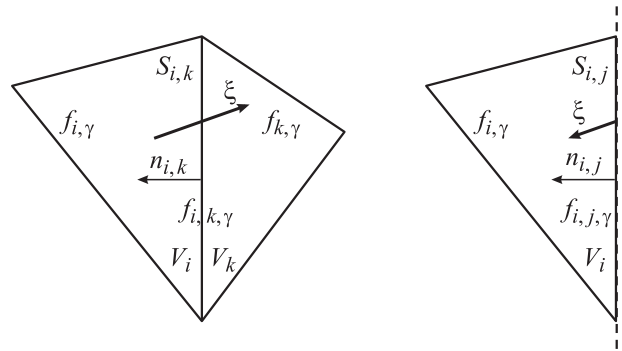


Рис. 3. Граничащие тетраэдры (слева) и тетраэдр, прилегающий к стенке (справа).

2.4. Расчет упругих столкновений

Для определения дискретных значений $I_\gamma(x, t)$ интеграла столкновений в (5) используется консервативный проекционный метод. Интеграл столкновений в скоростном узле ξ_γ определяется как проекция 8-кратного функционала вида в узел скоростной сетки ξ_γ с помощью комбинации δ -функций

$$\phi(\xi_\gamma) = \delta(\xi - \xi_\gamma) + \delta(\xi_* - \xi_\gamma) - \delta(\xi - \xi_\gamma) - \delta(\xi_* - \xi_\gamma),$$

$$I_\gamma(x, t) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{b_m^2/2} \phi(\xi_\gamma) (f' f'_* - f f_*) g d\sigma d\varphi d\xi_* d\xi. \quad (6)$$

Для вычисления (6) используется равномерная кубатурная сетка по переменным интегрирования S_v из N_v узлов $\xi_{\alpha_v}, \xi_{\beta_v}, \sigma_v, \varphi_v$, причем узлы ξ_{α_v} и ξ_{β_v} совпадают с узлами скоростной сетки S_0 . Поскольку векторы скоростей после столкновения не попадают в узлы сетки S_0 , две последних δ -функции в проекторе $\phi(\xi_\gamma)$ заменяются на комбинацию проекторов в две пары ближайших к ξ' и ξ'_* узлов $(\xi_{\mu_v}, \xi_{\lambda_v+s_v})$ и $(\xi_{\mu_v}, \xi_{\mu_v-s_v})$ где s_v — трехмерный вектор смещения в соседний узел сетки, компоненты которого могут принимать значения, равные 0, 1, -1:

$$\delta(\xi'_{\alpha_v} - \xi_\gamma) = (1 - r_v) \delta(\xi_{\lambda_v} - \xi_\gamma) + r_v \delta(\xi_{\lambda_v+s_v} - \xi_\gamma),$$

$$\delta(\xi'_{\beta_v} - \xi_\gamma) = (1 - r_v) \delta(\xi_{\mu_v} - \xi_\gamma) + r_v \delta(\xi_{\mu_v-s_v} - \xi_\gamma).$$

Обозначим $E_0 = (\xi'_{\alpha_v})^2 + (\xi'_{\beta_v})^2$, $E_1 = (\xi_{\lambda_v})^2 + (\xi_{\mu_v})^2$, $E_2 = (\xi_{\lambda_v+s_v})^2 + (\xi_{\mu_v-s_v})^2$. Выберем вектор смещения s_v так, чтобы выполнялось одно из условий $E_1 \leq E_0 < E_2$ или $E_2 < E_0 \leq E_1$. Коэффициент r_v определим из закона сохранения энергии $E_0 = (1 - r_v)E_1 + r_v E_2$, откуда следует, что $0 \leq r_v < 1$. Выбор вектора s_v не является однозначным. Чтобы сделать его однозначным, надо поставить дополнительное условие, например, достижение минимального или максимального значения коэффициента r_v . Численные эксперименты показали, что предпочтительным условием является максимальное значение

коэффициента r_v , что соответствует наиболее близкому расположению узлов $\xi_{\lambda_v+s_v}$ и $\xi_{\mu_v-s_v}$ к скоростям ξ' и ξ'' .

Величина $f'_{\alpha_v} f'_{\beta_v}$ может быть найдена интерполяцией. Из найденного значения r_v следует, что следующая формула является точной, если $f_\beta = f_M(\xi_\beta)$ во всех узлах скоростной сетки:

$$f'_{\alpha_v} f'_{\beta_v} = (f_{\lambda_v} f_{\mu_v})^{1-r_v} \cdot (f_{\lambda_v+s} f_{\mu_v-s})^{r_v}.$$

Законы сохранения массы и импульса на равномерной сетке выполняются автоматически.

Окончательно формула вычисления интеграла столкновений имеет вид

$$I_\gamma = B \sum_{v=1}^{N_v} \left[-(\delta_{\gamma,\alpha_v} + \delta_{\gamma,\beta_v}) + (1 + r_v)(\delta_{\gamma,\lambda_v} + \delta_{\gamma,\mu_v}) + r_v((\delta_{\gamma,\lambda_v+s} + \delta_{\gamma,\mu_v-s})) \right] \Delta_v, \quad (7)$$

где $\delta_{\gamma,\beta}$ — символ Кронекера, $B = V\pi b_m^2 / (4N_c)$, $N_c = N_v / N_0$, $\Delta_v = (f_{\alpha_v} f_{\beta_v} - f'_{\alpha_v} f'_{\beta_v}) g_v$.

Формула (7) обеспечивает свойство консервативности интеграла по массе, импульсу и энергии

$$\sum_{\gamma} \psi_{\gamma} I(\xi_{\gamma}) = 0, \quad \psi_{\gamma} = \{1, \xi, \xi^2\}.$$

Следствием приведенной выше интерполяции произведения $f' f'_*$ является точное равенство нулю интеграла столкновений от максвелловской функции f_M

$$I_{\gamma}[f_M, f_M] = 0.$$

2.5. Проблемно-моделирующая среда nsolver

Описанный численный метод реализован в проблемно-моделирующей среде nsolver [6–9], разрабатываемой авторами работы и другими разработчиками из их команды. Вычисления могут проводиться как на кластерной архитектуре, так и на графических процессорах. Для решения уравнения переноса могут быть использованы прямоугольные или тетраэдрические стеки. Используются явные схемы первого и второго порядков точности.

При изменении формы ячеек в координатном пространстве конечно-разностные схемы решения уравнения переноса изменяются, в то время как расчет упругих столкновений не зависит от формы ячеек. Таким образом, применяется один метод решения уравнения релаксации как для прямоугольных, так и для тетраэдрических сеток.

Проблемно-моделирующая среда nsolver позволяет исследовать поведение газа в технических устройствах — вычислять потоки газа и его макропараметры. С помощью nsolver и описанного численного метода анализировались термомолекулярные насосы Кнудсена [10–13].

Таблица 1.

Длина ребра тетраэдров	0.4	0.35	0.3	0.25	0.2	0.15	0.1
p_2/p_1	7.25	7.27	7.30	7.33	7.35	7.38	7.40

Таблица 2.

N_0	16	18	20	22	24	26	28
p_2/p_1	7.18	7.26	7.29	7.33	7.35	7.36	7.36

2.6. Проверка точности метода

Применимость описанного вычислительного метода к анализу компьютерной модели насоса Холвека исследуется с помощью различной дискретизации координатного и скоростного пространств. Давление в откачиваемом резервуаре обозначим p_1 , в накачиваемом через p_2 .

Рассматривались следующие геометрические параметры: $r = 2$, $a = b = 1$, шаг винтовой линии $l = 6$. В начальный момент температура газа равнялась $T_0 = 1$, плотность $n_0 = 1$.

В табл. 1 приведены значения отношения давлений на концах насоса Холвека при различных ребрах тетраэдров, создающих координатную сетку в расчетной области. Число узлов вдоль одной оси скоростного пространства равнялось $N_0 = 24$.

В табл. 2 приведены значения p_2/p_1 при различных числах узлов вдоль одной оси скоростного пространства N_0 . Длины ребер тетраэдров, образующих сетку в координатном пространстве, равнялись 0.2.

Результаты, представленные в табл. 1 и 2, показывают пригодность описанного численного метода для моделирования насоса Холвека. При не слишком грубых дискретизациях координатного и скоростного пространств ошибка численного метода составляет около 1%.

3. Результаты моделирования

В этой части представлены результаты анализа работы насоса Холвека при различных геометрических и физических параметрах. Исследуются зависимости отношения давлений на концах насоса от степени разреженности газа, радиуса ротора R и его скорости вращения u .

3.1. Зависимость откачки от числа Кнудсена

На рис. 4 представлен график зависимости отношения давлений в откачиваемом p_1 и накачиваемом p_2 резервуарах от числа Кнудсена. Рассматривались следующие геометрические параметры: $R = 1/Kn$, $a = b = 1/Kn$, $u = 1$.

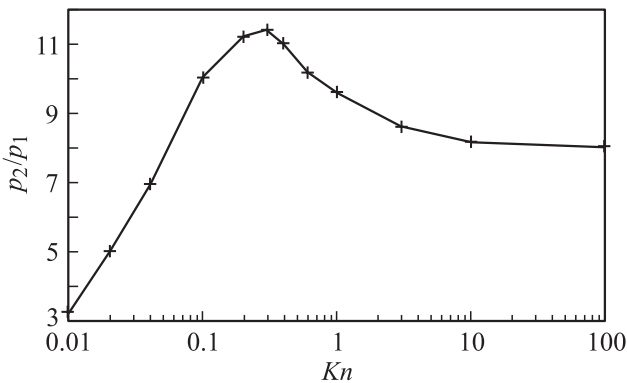


Рис. 4. Зависимость отношения давлений в резервуарах от числа Кнудсена.

График зависимости p_2/p_1 возрастает от $\lim_{Kn \rightarrow 0} (p_2/p_1) = 1$ при малых числах Кнудсена и убывает при больших, выходя на асимптоту $\lim_{Kn \rightarrow \infty} (p_2/p_1) = 8$. График имеет максимум $p_2/p_1 = 11.4$ при $Kn = 0.3$.

3.2. Распределение макропараметров газа

На рис. 5 изображены трехмерные распределения давления и потока скорости в дорожках статора в установившемся режиме при $Kn = 0.1$, $ER = 1/Kn$, $a = b = 1/Kn$, $u = 1$. В начальный момент давление и температура газа равнялись соответственно $p_0 = 1$ и $T_0 = 1$. Вдоль внутренней поверхности дорожки газ перетекает из откачиваемого резервуара в накачиваемый. Обратный поток формируется за счет неравного давления в резервуарах и в установившемся режиме уравнивает поток, вызванный вращением ротора.

Давление газа монотонно возрастает вдоль трубки от $p_1 = 0.19$ до $p_2 = 2.92$.

3.3. Влияние скорости вращения ротора

На рис. 6 представлена зависимость отношения давлений в резервуарах p_2/p_1 от скорости вращения ро-

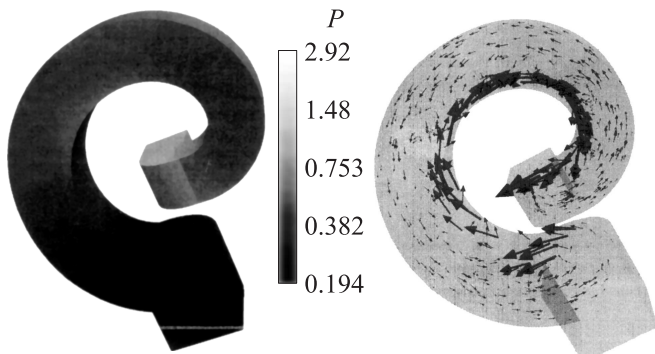


Рис. 5. Распределение давления и плотности потока массы в насосе Холвека.

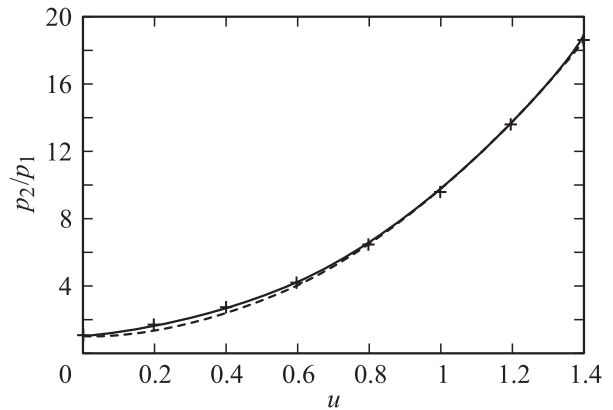


Рис. 6. Зависимость отношения давлений в резервуарах от скорости вращения ротора.

тора u при $Kn = 1$, $R = 1/Kn$, $a = b = 1/Kn$, $p_0 = 1$ и $T_0 = 1$. Крестиками, соединенными сплошной линией, обозначены результаты компьютерного моделирования. Штриховая линия обозначает интерполяционную кривую, имеющую зависимость от скорости вращения ротора $p_2/p_1 - 1 \sim u^2$. Полученная зависимость с хорошей точностью совпадает с интерполяционной кривой, следовательно, можно сделать вывод, что отношение давлений в резервуарах зависит от скорости вращения ротора квадратично.

3.4. Влияние величины радиуса ротора

На рис. 7 слева представлена зависимость отношения давлений от радиуса ротора при параметрах насоса и начальных данных $Kn = 1$, $a = b = 1/Kn$, $p_0 = 1$, $T_0 = 1$, $u = 1$. Геометрические размеры ротора брались в диапазоне $R \in [a, 5a]$. На рис. 6 справа приведено распределение давления в насосе Холвека вдоль оси ротора при его радиусе $r = 5$. Полученная кривая хорошо согласуется с зависимостью давления в дорожке статора, выраженной формулой $p = p_2^{1-z/l} p_1^{z/l}$.

Заключение

В настоящей работе описан численный метод решения кинетического уравнения Больцмана, с помощью которого был проанализирован насос Холвека, работающий в переходном режиме. Нелинейный интеграл столкновений вычислялся проекционным методом. Оператор переноса аппроксимировался с помощью явной потоковой схемы первого порядка точности на неструктурированных сетках. Приведенный метод уже был использован для численного решения других исследовательских задач [11–14]. Пригодность численного метода к анализу устройства была проверена с помощью изменения шага четок в координатном и скоростном пространствах.

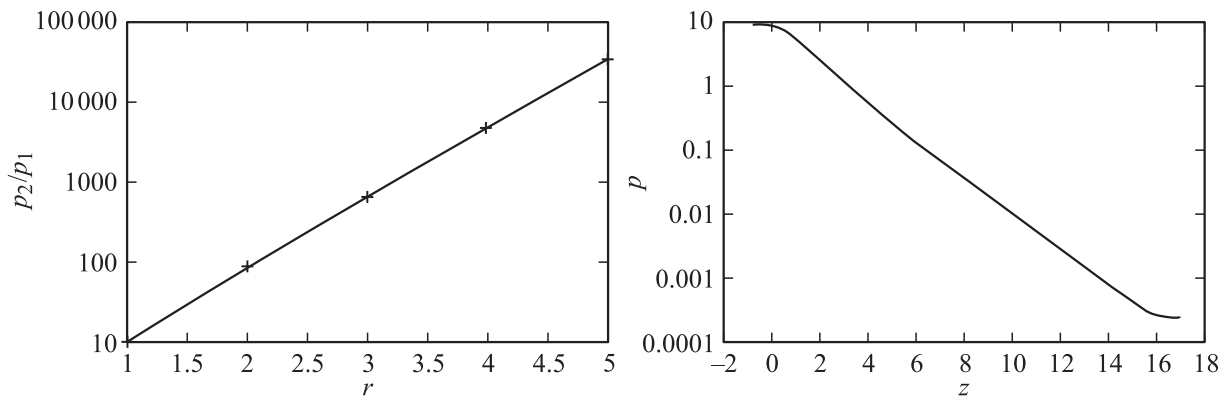


Рис. 7. Зависимость отношения давлений в резервуарах от радиуса ротора (слева) и распределение давлений вдоль продольной координаты при $r = 5$ (справа).

В ходе анализа насоса Холвека были исследованы зависимости отношения давлений на концах устройства при различных параметрах. Показано, что насос Холвека эффективен в свободно-молекулярном режиме и имеет максимум при средних числах Кнудсена. При плотном газе $Kn \ll 1$ эффективность насоса заметно снижается, вплоть до отсутствия эффекта откачки.

Отношения давлений на концах насоса Холвека зависят квадратично от скорости вращения ротора при рассмотренных геометрических параметрах. Эффективность насоса заметно возрастает при увеличении радиуса ротора, когда его размеры сравнимы с длиной свободного пробега газа.

Список литературы

- [1] Boulon O., Mathes R. // Vacuum. 2001. Vol. 60. P. 73–83.
- [2] Heo J.-S., Hwang Y.-K. // J. Vacuum. Sci. Technology. 2000. Vol. 18. N 3. P. 1025–1034.
- [3] Skovorodko P.A. Free molecular flow in the Holweck pump / Rarefied Gas Dynamics: 22 International Symposium. 2001. Vol. 585. P. 900–902.
- [4] Boulon O., Mathes R., Thibault J.P. // J. Vacuum. Sci. Technology. 1999. Vol. 17. N 4. P. 2080–2085.
- [5] Черемисин Ф.Г. // Доклады РАН. 1997. Т. 357. Вып. 1. С. 53–56.
- [6] Додулад О.И., Клосс Ю.Ю., Мартынов Д.В., Rogozin O.A., Рябченков В.В., Черемисин Ф.Г., Шувалов П.В. // Нано- и микросистемная техника. 2011. Вып. 2. С. 12–17.
- [7] Клосс Ю.Ю., Черемисин Ф.Г., Шувалов П.В. // Вычислительные методы и программирование. 2010. Т. 11. С. 144–152.
- [8] Клосс Ю.Ю., Мартынов Д.В., Черемисин Ф.Г. // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12. С. 24–38.
- [9] Додулад О.И., Клосс Ю.Ю., Рябченков В.В., Черемисин Ф.Г. // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12. С. 40–47.
- [10] Geuzaine C., Remacle J.-F. Gmsh: a finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. 1996. (available from <http://www.geuz.org/gmsh>).
- [11] Клосс Ю.Ю., Мартынов Д.В., Черемисин Ф.Г. // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 7. С. 141–149.
- [12] Клосс Ю.Ю., Мартынов Д.В., Черемисин Ф.Г. // Информационные технологии. 2010. Вып. 10. С. 30–35.
- [13] Аникин Ю.А., Клосс Ю.Ю., Мартынов Д.В., Черемисин Ф.Г. // Нано- и микросистемная техника. 2010. Вып. 8. С. 6–14.
- [14] Клосс Ю.Ю., Мартынов Д.В., Черемисин Ф.Г. // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12. С. 16–27.