Журнал технической физики, 2012, том 82, вып. 4

01

Переходное и дифракционное излучение заряда на идеально проводящем шаре

© И.И. Каликинский

(Поступило в Редакцию 29 октября 2010 г. В окончательной редакции 9 июня 2011 г.)

Решена задача о переходном излучении заряда на идеально проводящем шаре и дифракционном излучении заряда, пролетающего вблизи того же шара. Найдены энергия, спектр и поляризация излучения. Получен результат для предельного случая дипольного излучения и траектории заряда, проходящей через центр шара.

Введение

Впервые переходное излучение заряда на идеально проводящем шаре было рассмотрено в работе [1], в которой предполагалось, что траектория равномерно движущегося заряда проходит через центр шара и скорость заряда много меньше скорости света, ввиду чего использовался метод изображений.

В работе [2] предложен метод решения однородного и неоднородного векторных волновых уравнений в цилиндрических координатах, что позволило наметить решение задачи о переходном и дифракционном излучении заряда и электрического дипольного момента на идеально проводящем шаре и пространственном „ежике“ без ограничений работы [1], т. е. прицельное расстояние r_0 предполагалось заключенным в пределах $0 \le r_0 < \infty$ и скорость заряда любая (меньшая скорости света). Настоящая работа является продолжением работы [2].

1. Постановка задачи

Имеется идеально проводящий шар радиуса R_0. Начало координат поместим в центр шара. Антипараллельно оси z равномерно движется электрический заряд q, траектория которого пересекает плоскость $z = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, где будем считать $y_0 = 0$. Расстояние точки M_0 от начала координат $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, причем $0 \le r_0 < \infty$. Если $0 \le r_0 \le R_0$, то имеем дело с переходным излучением, а если $R_0 < r_0 < \infty$, то с дифракционным. Движущийся со скоростью $\mathbf{v}(0, 0, -v)$, где $\mathbf{v} = \mathrm{const}$, заряд создает ток с плотностью $\mathbf{j}(0, 0, -j)$, где

$$j = qv \cdot \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z + vt). \tag{1.1}$$

Поля находятся из уравнения Максвелла, которые для фурье-компонент имеют вид

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathbf{E}_\omega = 4\pi\rho_\omega, \\ &\operatorname{div} \mathbf{H}_\omega = 0, \\ &\operatorname{rot} \mathbf{E}_\omega = i\frac{\omega}{c}\mathbf{H}_\omega, \\ &\operatorname{rot} \mathbf{H}_\omega = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_\omega - i\frac{\omega}{c}\mathbf{E}_\omega, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где

$$\mathbf{j}_\omega = \rho_\omega \cdot \mathbf{v}, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{E} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\omega \cdot e^{-i\omega t} d\omega, \quad \mathbf{j} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j}_\omega \cdot e^{-i\omega t} d\omega \quad \text{и т. д.} \tag{1.4}$$

Выполняя преобразование Фурье, найдем

$$j_\omega = \frac{q}{2\pi}\delta(x - x_0)\delta(y - y_0) \cdot e^{-i\frac{\omega}{v}z}. \tag{1.5}$$

В плоскости $z = 0$ рассмотрим радиус-вектор $\mathbf{OM} = \mathbf{r}_0$, где $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости $z = 0$. Вектор $\mathbf{M_0M}$ обозначим через $\mathbf{r}'$. Тогда

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0; \quad \mathbf{r}' = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\varphi}, \tag{1.6}$$

где φ — полярный угол.

Имеем

$$\delta(x - x_0)\delta(y - y_0) = \frac{\delta(r')}{2\pi \cdot r'}. \tag{1.7}$$

Используя [3], запишем

$$\frac{\delta(r')}{r'} = \int\limits_0^\infty J_0(\lambda r') \cdot \lambda \cdot d\lambda, \tag{1.8}$$

где $J_0(\lambda r')$ — бесселева функция нулевого порядка.

Применяя теорему сложения бесселевых функций [4], получим

$$j_w = \frac{q}{4\pi^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi}\int\limits_0^\infty J_m(\lambda r_0) \cdot J_m(\lambda r) \cdot \lambda \cdot d\lambda \cdot e^{-i\frac{\omega}{v}z}. \tag{1.9}$$

Из уравнений Максвелла (1.2) получим уравнение для $\mathbf{E}_\omega$;

$$\Delta\mathbf{E}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}_\omega = 4\pi \cdot \operatorname{grad}\rho_\omega - \frac{4\pi i\omega}{c^2}\mathbf{j}_\omega. \tag{1.10}$$

Основная идея состоит в том, чтобы решать задачу о переходном и дифракционном излучении заряда на идеально проводящем шаре в цилиндрических координатах r, φ, z.

В качестве потенциалов берем составляющие электрической напряженности в этих координатах E_r, E_φ, E_z. Полное поле ищем в виде

$$\mathbf{E}_\omega = \mathbf{E}_\omega^{(0)} + \mathbf{E}_\omega^{(1)}, \tag{1.11}$$

где $\mathbf{E}_{\omega}^{(0)}$ — поле заряда в безграничном пространстве (частное решение неоднородного уравнения (1.10)), а $\mathbf{E}_{\omega}^{(1)}$ — свободное поле (общее решение уравнения (1.10), в котором в правой части нуль (однородное уравнение)).

Используя [2], получим

$$E_{\omega r}^{(0)} = \frac{q}{2\pi v} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^\infty \big[B_m(\lambda) \cdot J_{m+1}(\lambda r) - C_m(\lambda) \cdot J_{m-1}(\lambda r)\big] \cdot \lambda^2 \cdot d\lambda \cdot e^{-i\frac{\omega}{v}z}, \qquad (1.12)$$

$$E_{\omega\varphi}^{(0)} = -\frac{iq}{2\pi v} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^\infty \big[B_m(\lambda) \cdot J_{m+1}(\lambda r) + C_m(\lambda) \cdot J_{m-1}(\lambda r)\big] \cdot \lambda^2 \cdot d\lambda \cdot e^{-i\frac{\omega}{v}z}, \qquad (1.13)$$

$$E_{\omega z}^{(0)} = -\frac{i\omega q}{\pi v^2}\left(1-\beta^2\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \times \int_0^\infty A_m(\lambda) \cdot J_m(\lambda r) \cdot \lambda \cdot d\lambda \cdot e^{-i\frac{\omega}{v}z}, \qquad (1.14)$$

где

$$B_m(\lambda) = C_m(\lambda) = \frac{J_m(\lambda r_0)}{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{v^2}\left(1-\beta^2\right)}, \qquad (1.15)$$

$$A_m(\lambda) = -B_m(\lambda), \quad \beta = \frac{v}{c}. \qquad (1.16)$$

Свободное поле, т. е. решение однородного, векторного, волнового уравнений в цилиндрических координатах, ищем в виде (при $z > 0$) [6,7]

$$\tilde{E}_{\omega r}^{(1)} = \pm\frac{q}{2\pi v} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \times \int_0^\infty \Big[\tilde{D}_m(\lambda) \cdot J_{m+1}(\lambda r) - \tilde{\mathscr{E}}_m(\lambda) \cdot J_{m-1}(\lambda r)\Big] \cdot e^{i\varkappa z} \cdot \lambda \cdot d\lambda, \qquad (1.17)$$

$$\tilde{E}_{\omega\varphi}^{(1)} = \mp\frac{iq}{2\pi v} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \times \int_0^\infty \Big[\tilde{D}_m(\lambda) \cdot J_{m+1}(\lambda r) + \tilde{\mathscr{E}}_m(\lambda) \cdot J_{m-1}(\lambda r)\Big] \cdot e^{i\varkappa z} \cdot \lambda \cdot d\lambda, \qquad (1.18)$$

$$\tilde{E}_{\omega z}^{(1)} = \mp\frac{i\omega q}{\pi v^2}(1-\beta^2) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \times \int_0^\infty \tilde{A}_m(\lambda) \cdot J_m(\lambda r) \cdot e^{i\varkappa z} \cdot \lambda \cdot d\lambda, \qquad (1.19)$$

где следует брать либо только верхние, либо только нижние знаки, где $0 < r < \infty$, $J_m(\lambda)$ — функции Бесселя, а $\tilde{A}_m(\lambda)$, $\tilde{D}_m(\lambda)$, $\tilde{\mathscr{E}}_m(\lambda)$ — произвольные функции, при которых интегралы и ряды, входящие в (1.17)–(1.19), сходятся. При $z < 0$ заменяем $\sim$ на $\approx$ и $\varkappa$ на $-\varkappa$. Здесь

$$\varkappa = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \lambda^2}; \quad \operatorname{Im}\varkappa > 0. \qquad (1.20)$$

Решение задачи ищем при $R > R_0$, где R — сферический радиус.

Так как на границе вакуума и идеального проводника тангенциальные составляющие электрической напряженности обращаются в нуль, то имеют место граничные условия

$$\big[E_{\omega\varphi}^{(0)} + \tilde{E}_{\omega\varphi}^{(1)}\big]_{R=R_0} = 0, \qquad (1.21)$$

$$\big[E_{\omega\varphi}^{(0)} + \tilde{\tilde{E}}_{\omega\varphi}^{(1)}\big]_{R=R_0} = 0, \qquad (1.22)$$

$$\big[E_{\omega\theta}^{(0)} + \tilde{E}_{\omega\theta}^{(1)}\big]_{R=R_0} = 0, \qquad (1.23)$$

$$\big[E_{\omega\theta}^{(0)} + \tilde{\tilde{E}}_{\omega\theta}^{(1)}\big]_{R=R_0} = 0, \qquad (1.24)$$

где R, θ, φ — сферические координаты. Кроме того, должны выполняться условия

$$\operatorname{div}\tilde{\mathbf{E}}_{\omega}^{(1)} = 0, \qquad (1.25)$$

$$\operatorname{div}\tilde{\tilde{\mathbf{E}}}_{\omega}^{(1)} = 0 \qquad (1.26)$$

и условия излучения на бесконечности, т. е. при $\frac{\omega}{c}R \gg 1$ должны быть расходящиеся волны.

2. Решение задачи о переходном и дифракционном излучении заряда на идеально проводящем шаре

Так как при $R > R_0$ и $z = 0$ составляющие $E_{\omega r}^{(1)}$ и $E_{\omega\varphi}^{(1)}$ непрерывны, то

$$\tilde{D}_m(\lambda) = \tilde{\tilde{D}}_m(\lambda)\big[= D_m(\lambda)\big], \qquad (2.1)$$

$$\tilde{\mathscr{E}}_m(\lambda) = \tilde{\tilde{\mathscr{E}}}(\lambda)\big[= \mathscr{E}(\lambda)\big]. \qquad (2.2)$$

Запишем поля в виде

$$\mathbf{E}_{\omega}^{(0)} = \frac{q}{2\pi v} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{\omega m}^{(0)} \cdot e^{im\varphi}, \qquad (2.3)$$

$$\mathbf{E}_{\omega}^{(1)} = \frac{q}{2\pi v} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{\omega m}^{(1)} \cdot e^{im\varphi}. \qquad (2.4)$$

Тогда граничные условия (1.21), (1.22) примут вид

$$\big[E_{\omega m\varphi}^{(0)} + \tilde{E}_{\omega m\varphi}^{(1)}\big]_{R=R_0} = 0, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \qquad (2.5)$$

$$\big[E_{\omega m\varphi}^{(0)} + \tilde{\tilde{E}}_{\omega m\varphi}^{(1)}\big]_{R=R_0} = 0, \quad \frac{\pi}{2} < \theta \le \pi. \qquad (2.6)$$

Положим в равенствах (2.5), (2.6)

$$r = R \cdot \sin\theta; \quad z = R\cos\theta \qquad (2.7)$$

и рассмотрим функцию

$$F^{(1)}_{\omega m}(R,\theta)=\begin{cases}E^{(0)}_{\omega m\varphi}+\tilde{E}^{(1)}_{\omega m\varphi} & \text{при}\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\\ E^{(0)}_{\omega m\varphi}+\tilde{\tilde{E}}^{(1)}_{\omega m\varphi} & \text{при}\quad \frac{\pi}{2}<\theta\le\pi,\end{cases}\tag{2.8}$$

которую как функцию θ разложим в ряд по присоединенным функциям Лежандра ($0\le\theta\le\pi$)

$$F^{(1)}_{\omega m}(R,\theta)=\sum_{n=m}^{\infty}e_{\omega mn\varphi}(R)\cdot P^{(m)}_n(\cos\theta),\tag{2.9}$$

где $P^{(m)}_n(x)$ — присоединенные функции Лежандра от аргумента x, равного в нашем случае $\cos\theta$,

$$e_{\omega mn\varphi}(R)=\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\times\int\limits_0^{\pi}F^{(1)}_{\omega m}(R,\theta')P^{(m)}_n(\cos\theta')\sin\theta' d\theta'.\tag{2.10}$$

Разбив интеграл в (2.10) на два: от 0 до $\pi/2$ и от $\pi/2$ до π и приняв во внимание (2.8), найдем, что граничные условия (2.5), (2.6) равносильны условию

$$e_{\omega mn\phi}(R_0)=0,\tag{2.11}$$

из которого получаем уравнение

$$C_{11}(\lambda)\cdot D_{mn}(\lambda)+C_{12}(\lambda)\cdot\mathscr{E}_{mn}(\lambda)=b_1(\lambda),\tag{2.12}$$

где $C_{11}(\lambda)$, $C_{12}(\lambda)$, $b_1(\lambda)$ после замены $x=\cos\theta'$ могут быть приведены к виду

$$C_{11}(\lambda)=\int\limits_0^1 J_{m+1}\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right)\times e^{i\varkappa R_0x}\left[P^{(m)}_n(x)+P^{(m)}_n(-x)\right]dx,\tag{2.13}$$

$$C_{12}(\lambda)=\int\limits_0^1 J_{m-1}\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right)\times e^{i\varkappa R_0x}\left[P^{(m)}_n(x)+P^{(m)}_n(-x)\right]dx,\tag{2.14}$$

$$b_1(\lambda)=\frac{2m}{R_0}B_m(\lambda)\cdot\int\limits_0^1 J_m\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\times\left[e^{-i\frac{\omega}{v}R_0x}\cdot P^{(m)}_n(x)+e^{i\frac{\omega}{v}R_0x}\cdot P^{(m)}_n(-x)\right]dx.\tag{2.15}$$

Из условий (1.25), (1.26) с использованием рекуррентных формул для цилиндрических функций [4] найдем

$$\tilde{A}_{mn}(\lambda)=-\tilde{\tilde{A}}=-\frac{\lambda v}{2\omega\varkappa(1-\beta^2)}\left[D_{mn}(\lambda)+\mathscr{E}_{mn}(\lambda)\right].\tag{2.16}$$

Подставляя (2.16) в (1.19), получим

$$\tilde{E}^{(1)}_{\omega z}=\frac{iq}{2\pi v}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\varphi}\times\int\limits_0^{\infty}\left[D_{mn}(\lambda)+\mathscr{E}_{mn}(\lambda)\right]\frac{\lambda^2}{\varkappa}J^{(1)}_m(\lambda r)\cdot e^{i\varkappa z}\cdot d\lambda.\tag{2.17}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$F^{(2)}_{\omega m}(R,\theta)=\begin{cases}E^{(0)}_{\omega m\theta}+\tilde{E}^{(1)}_{\omega m\theta} & \text{при}\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\\ E^{(0)}_{\omega m\theta}+\tilde{\tilde{E}}^{(1)}_{\omega m\theta} & \text{при}\quad \frac{\pi}{2}<\theta\le\pi,\end{cases}\tag{2.18}$$

которую, как функцию θ на отрезке $0\le\theta\le\pi$, разложим в ряд по присоединенным функциям Лежандра $P^{(m)}_n(\cos\theta)$:

$$\tilde{F}^{(2)}_{\omega m}(R,\theta)=\sum_{n=m}^{\infty}e_{\omega nm\theta}(R)\cdot P^{(m)}_n(\cos\theta),\tag{2.19}$$

где

$$e_{\omega mn\theta}(R)=\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\times\int\limits_0^{\pi}F^{(2)}_{\omega m}(R,\theta')P^{(m)}_n(\cos\theta')\sin\theta' d\theta'.\tag{2.20}$$

При этом граничные условия (1.23), (1.24) равносильны условию

$$e_{\omega mn\theta}(R_0)=0,\tag{2.21}$$

из которого получаем уравнение

$$C_{21}(\lambda)\cdot D_{mn}(\lambda)+C_{22}(\lambda)\cdot\mathscr{E}_{mn}(\lambda)=b_2(\lambda),\tag{2.22}$$

где коэффициенты уравнения (2.22) находятся по формулам

$$C_{21}(\lambda)=\int\limits_0^1\Big\{J_{m+1}\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right)\cdot x\left[P^{(m)}_n(x)+P^{(m)}_n(-x)\right]-\frac{i\lambda}{\varkappa}J_m\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1-x^2}\times\left[P^{(m)}_n(x)-P^{(m)}_n(-x)\right]\Big\}e^{i\varkappa R_0x}dx,\tag{2.23}$$

$$C_{22}(\lambda)=-\int\limits_0^1\Big\{J_{m-1}\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right)\cdot x\times\left[P^{(m)}_n(x)+P^{(m)}_n(-x)\right]+\frac{i\lambda}{\varkappa}J_m\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right)\times\sqrt{1-x^2}\left[P^{(m)}_n(x)-P^{(m)}_n(-x)\right]\Big\}e^{i\varkappa R_0x}dx,\tag{2.24}$$

$$b_2(\lambda) = 2B_m(\lambda) \cdot \int_0^1 \left\{\lambda \cdot J'_m\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right) \cdot x\right.$$
$$\times \left[e^{-i\frac{\omega}{v}R_0x} \cdot P_n^{(m)}(x) + e^{i\frac{\omega}{v}R_0x} \cdot P_n^{(m)}(-x)\right]$$
$$+\frac{i\omega}{v}(1-\beta^2) \cdot J_m\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1-x^2}$$
$$\left.\times \left[e^{-i\frac{\omega}{v}R_0x} \cdot P_n^{(m)}(x) - e^{i\frac{\omega}{v}R_0x} \cdot P_n^{(m)}(-x)\right]\right\} dx. \quad (2.25)$$

Заметим, что в процессе решения задачи появился значок n $(0 \le n < \infty)$. Поэтому поле излучения имеет вид

$$\mathbf{E}_\omega^{(1)} = \frac{q}{2\pi v}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\mathbf{E}_{\omega mn}^{(1)} \cdot e^{im\varphi} \quad (2.26)$$

и сумма по m будет от $-n$ до $+n$, так как

$$P_n^{(m)}(\cos\theta) = 0 \quad \text{при} \quad |m| > n. \quad (2.27)$$

Заменив в сумме по m от $-n$ до -1 знак m на $-m$, используя формулу [4]

$$P_n^{(-m)}(x) = (-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^{(m)}(x), \quad (2.28)$$

откуда

$$D_{(-m)n}(\lambda) = (-1)^m \cdot \mathscr{E}_{mn}(\lambda), \quad (2.29)$$
$$\mathscr{E}_{(-m)n}(\lambda) = (-1)^m \cdot D_{mn}(\lambda) \quad (2.30)$$

получим

$$\tilde{E}_{\omega r}^{(1)} = \frac{q}{2\pi v}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\varepsilon_m(\varphi)\int_0^\infty\left[D_{mn}(\lambda)J_{m+1}(\lambda r)\right.$$
$$\left.-\mathscr{E}_{mn}(\lambda) \cdot J_{m-1}(\lambda r)\right] \cdot e^{i\varkappa z} \cdot \lambda \cdot d\lambda, \quad (2.31)$$

$$\tilde{E}_{\omega\varphi}^{(1)} = -\frac{iq}{2\pi v}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}2\sin m\varphi\int_0^\infty\left[D_{mn}(\lambda) \cdot J_{m+1}(\lambda r)\right.$$
$$\left.+\mathscr{E}_{mn}(\lambda) \cdot J_{m-1}(\lambda r)\right] \cdot e^{i\varkappa z} \cdot \lambda \cdot d\lambda, \quad (2.32)$$

$$\tilde{E}_{\omega z}^{(1)} = -\frac{i\omega q}{\pi v^2}(1-\beta^2)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\varepsilon_m(\varphi)$$
$$\times\int_0^\infty\tilde{A}_m(\lambda) \cdot J_m(\lambda r) \cdot e^{i\varkappa z} \cdot \lambda \cdot d\lambda, \quad (2.33)$$

где

$$\varepsilon_m(\varphi) = \begin{cases}1 & \text{при } m = 0\\ 2\cos m\varphi & \text{при } m \ne 0.\end{cases} \quad (2.34)$$

В волновой зоне

$$\frac{\omega}{c}R \gg 1, \quad (2.35)$$

переходя от функций Бесселя к функциям Ханкеля, используя асимптотику и соотношения обхода последних, а также метод перевала, получим

$$\tilde{E}_{\omega rmn}^{(1)} = \frac{q\omega}{\pi vc}\left[D_{mn}\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right) + \mathscr{E}_{mn}\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right)\right]$$
$$\times\cos\theta \cdot \varepsilon_m(\varphi)\frac{e^{i\frac{\omega}{c}R - im\frac{\pi}{2}}}{R}, \quad (2.36)$$

$$\tilde{E}_{\omega\varphi mn}^{(1)} = -\frac{iq\omega}{\pi vc}\left[D_{mn}\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right) - \mathscr{E}_{mn}\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right)\right]$$
$$\times\cos\theta \cdot 2\sin m\varphi\frac{e^{i\frac{\omega}{c}R - im\frac{\pi}{2}}}{R}, \quad (2.37)$$

$$\tilde{E}_{\omega zmn}^{(1)} = -\frac{q\omega}{\pi vc}\left[D_{mn}\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right) + \mathscr{E}_{mn}\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right)\right]$$
$$\times\sin\theta \cdot \varepsilon_m(\varphi)\frac{e^{i\frac{\omega}{c}R - im\frac{\pi}{2}}}{R}. \quad (2.38)$$

Используя формулу

$$E_{\omega\theta} = E_{\omega r} \cdot \cos\theta - E_{\omega z} \cdot \sin\theta, \quad (2.39)$$

получим

$$\tilde{E}_{\omega\theta mn}^{(1)} = \frac{q\omega}{\pi vc}\left[D_{mn}\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right) + \mathscr{E}_{mn}\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right)\right]$$
$$\times\varepsilon_m(\varphi)\frac{e^{i\frac{\omega}{c}R - im\frac{\pi}{2}}}{R}. \quad (2.40)$$

Выясним вопрос о поляризации излучения. Для этого заметим [4], что

$$P_n^{(m)}(-x) = (-1)^{n+m}P_n^{(m)}(x), \quad (2.41)$$

ввиду чего следует рассмотреть два случая:

1) $n+m$ — четное $(m \ne 0)$. Имеем

$$C_{11}(\lambda) = 2\int_0^1 J_{m+1}\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right) \cdot e^{i\varkappa R_0x} \cdot P_n^{(m)}(x) \cdot dx, \quad (2.42)$$

$$C_{12}(\lambda) = 2\int_0^1 J_{m-1}\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right) \cdot e^{i\varkappa R_0x} \cdot P_n^{(m)}(x) \cdot dx, \quad (2.43)$$

$$b_1(\lambda) = \frac{4m}{R_0}B_m(\lambda)\int_0^1 J_m\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right)$$
$$\times\cos\left(\frac{\omega}{v}R_0x\right) \cdot P_n^{(m)}(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (2.44)$$

Записав уравнение, комплексно сопряженное (2.12) и, записав

$$C_{11}(\lambda) = |C_{11}(\lambda)| \cdot e^{i\chi_1}; \quad C_{12}(\lambda) = |C_{12}(\lambda)| \cdot e^{i\chi_2}, \quad (2.45)$$

где $|C_{11}(\lambda)|$, $|C_{12}(\lambda)|$, χ_1, χ_2 — известны, а также

$$D_{mn}(\lambda) = |D_{mn}(\lambda)| \cdot e^{i\psi_1}; \quad \mathscr{E}_{mn}(\lambda) = |\mathscr{E}_{mn}(\lambda)| \cdot e^{i\psi_2}, \quad (2.46)$$

где $|D_{mn}(\lambda)|$, $|\mathscr{E}_{mn}(\lambda)|$, ψ_1, ψ_2 — неизвестны, получим из уравнения (2.12) и его комплексно сопряженного

$$\frac{|D_{mn}(\lambda)|}{|\mathscr{E}_{mn}(\lambda)|} = -\frac{|C_{12}(\lambda)|}{|C_{11}(\lambda)|}\frac{\sin(\psi_2+\chi_2)}{\sin(\psi_1+\chi_1)}, \quad (2.47)$$

откуда следует, что

$$\frac{\sin(\psi_2+\chi_2)}{\sin(\psi_1+\chi_1)} < 0. \quad (2.48)$$

Положим

$$\psi_2+\chi_2=\alpha_1;\quad \psi_1+\chi_1=-\alpha_1. \tag{2.49}$$

Записав

$$D_{mn}(\lambda)+\mathscr{E}_{mn}(\lambda)=|D_{mn}(\lambda)+\mathscr{E}_{mn}(\lambda)|\cdot e^{i\bar{\psi}}, \tag{2.50}$$

$$D_{mn}(\lambda)-\mathscr{E}_{mn}(\lambda)=|D_{mn}(\lambda)-\mathscr{E}_{mn}(\lambda)|\cdot e^{i\bar{\bar{\psi}}} \tag{2.51}$$

и потребовав, чтобы

$$\bar{\psi}=\bar{\bar{\psi}}[=\psi], \tag{2.52}$$

получим уравнение для α_1:

$$\frac{|C_{11}(\lambda)|\sin(\alpha_1-\chi_2)-|C_{12}(\lambda)|\sin(\alpha_1+\chi_1)}{|C_{11}(\lambda)|\cos(\alpha_1-\chi_2)+|C_{12}(\lambda)|\cos(\alpha_1+\chi_1)}$$
$$=\frac{|C_{11}(\lambda)|\sin(\alpha_1-\chi_2)+|C_{12}(\lambda)|\sin(\alpha_1+\chi_1)}{|C_{11}(\lambda)|\cos(\alpha_1-\chi_2)-|C_{12}(\lambda)|\cos(\alpha_1+\chi_1)}. \tag{2.53}$$

Таким образом, из вышеизложенного и формул (2.37) и (2.40) следует, что поле в волновой зоне эллиптически поляризовано, причем электрический вектор вращается против часовой стрелки. Из уравнения (2.22) получаем, что в этом случае $\frac{D_{mn}(\lambda)}{\mathscr{E}_{mn}(\lambda)}=-\frac{C_{12}(\lambda)}{C_{11}(\lambda)}$.

Рассмотрим теперь случай

2) $n+m$ — нечетное

Из формул (2.23)–(2.25) следует, что

$$C_{21}(\lambda)=2\int\limits_0^1 J_{m+1}\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right)\cdot x\cdot P_n^{(m)}(x)e^{i\varkappa R_0x}dx, \tag{2.54}$$

$$C_{22}(\lambda)=-2\int\limits_0^1 J_{m-1}\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right)\cdot x\cdot P_n^{(m)}(x)e^{i\varkappa R_0x}dx. \tag{2.55}$$

Формула (2.25) для $b_2(\lambda)$ остается в прежнем виде.

Записав уравнение, комплексно сопряженное (2.22), и полагая

$$C_{21}(\lambda)=|C_{21}(\lambda)|\cdot e^{i\chi_3};\quad C_{22}(\lambda)=|C_{22}(\lambda)|\cdot e^{i\chi_4}, \tag{2.56}$$

где $|C_{21}(\lambda)|$, $|C_{22}(\lambda)|$, χ_3, χ_4 — известные, а

$$D_{mn}(\lambda)=|D_{mn}(\lambda)|\cdot e^{i\psi_3};\quad \mathscr{E}_{mn}(\lambda)=|\mathscr{E}_{mn}(\lambda)|\cdot e^{i\psi_4}, \tag{2.57}$$

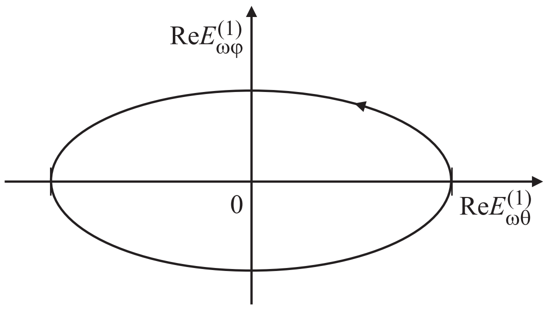
где $|D_{mn}(\lambda)|$, $|\mathscr{E}_{mn}(\lambda)|$, ψ_3, ψ_4 — неизвестные, найдем

$$\frac{\operatorname{Re}b_2(\lambda)\cdot\sin(\psi_4+\chi_4)-Jmb_2(\lambda)\cdot\cos(\psi_4+\chi_4)}{Jmb_2(\lambda)\cdot\cos(\psi_3+\chi_3)-\operatorname{Re}b_2(\lambda)\cdot\sin(\psi_3+\chi_3)}>0, \tag{2.58}$$

откуда следует, что либо числитель и знаменатель (2.58) положительные, либо оба они отрицательные.

Полагая

$$\psi_3+\chi_3=-\alpha_2;\quad \psi_4+\chi_4=\alpha_2 \tag{2.59}$$



и перемножая числитель и знаменатель (2.58), найдем, что (в обоих случаях)

$$[\operatorname{Re}b_2(\lambda)]^2\cdot\sin^2\alpha_2+[Jmb_2(\lambda)]^2\cdot\cos^2\alpha_2>0, \tag{2.60}$$

что всегда справедливо.

Потребовав в формулах (2.50), (2.51), чтобы $\bar{\psi}=\bar{\bar{\psi}}$, снова получим уравнение (для α_2) (2.53), где следует заменить $|C_{11}(\lambda)|$ на $|C_{21}(\lambda)|$, $|C_{12}(\lambda)|$ на $|C_{22}(\lambda)|$, χ_1 на χ_3, χ_2 на χ_4, α_1 на α_2.

Таким образом, и в этом случае имеем эллиптическую поляризацию, где электрический вектор вращается против часовой стрелки (см. рисунок).

Из уравнения (2.22) в этом случае получаем, что $\frac{D_m(\lambda)}{\mathscr{E}_{mn}(\lambda)}=-\frac{C_{22}(\lambda)}{C_{21}(\lambda)}$. Для спектральной интенсивности излучения в единицу телесного угла Ω получим

$$\frac{dW_{\omega mn}}{d\Omega}=c\left(\left|E^{(1)}_{\omega\varphi mn}\right|^2+\left|E^{(1)}_{\omega\theta mn}\right|^2\right)R_2, \tag{2.61}$$

т. е.

$$\frac{dW_{\omega mn}}{d\Omega}=\frac{q^2\omega^2}{4\pi^2v^2c}\Bigg\{4\sin^2m\varphi\cdot\cos^2\theta$$
$$\times\left|D_{mn}\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right)-\mathscr{E}_{mn}\cdot\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right)\right|^2$$
$$+\varepsilon_m^2(\varphi)\cdot\left|D_{mn}\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right)+\mathscr{E}_{mn}\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right)\right|^2\Bigg\}. \tag{2.62}$$

3. Переходное излучение заряда на идеально проводящем шаре, когда траектория заряда проходит через центр шара ($r_0=0$) и скорость заряда мала ($\beta\ll 1$)

Известно, что в этом случае (дипольное излучение) излучаются в основном низкие частоты. Поэтому будем считать

$$\frac{\omega}{v}R_0\ll 1. \tag{3.1}$$

Тогда и $\frac{\omega}{c}R_0\ll 1$.

Рассмотрим вначале случай

$$m\neq 0. \tag{3.2}$$

Поскольку $r_0 = 0$, то

$$b_1(\lambda) = b_2(\lambda) = 0. \tag{3.3}$$

Если а) $m+n$ — нечетное, то $C_{11}(\lambda) = C_{12}(\lambda) = 0$ и уравнение (2.12) превращается в тождество

$$0 \cdot D_{mn}(\lambda) + 0 \cdot \mathscr{E}_{mn}(\lambda) = 0, \tag{3.4}$$

а уравнение (2.22) в уравнение

$$C_{21}(\lambda) \cdot D_{mn}(\lambda) + C_{22}(\lambda) \cdot \mathscr{E}_{mn}(\lambda) = 0, \tag{3.5}$$

где

$$C_{21}(\lambda) = 2\int\limits_0^1 J_{m+1}\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right) \cdot x \cdot P_n^{(m)}(x)dx, \tag{3.6}$$

$$C_{22}(\lambda) = -2\int\limits_0^1 J_{m-1}\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right) \cdot x \cdot P_n^{(m)}(x)dx, \tag{3.7}$$

т.е. $C_{21}(\lambda) \neq C_{22}(\lambda)$ и $C_{21}(\lambda)$ и $C_{22}(\lambda)$ не равны нулю, откуда

$$D_{mn}(\lambda) = \mathscr{E}_{mn}(\lambda) = 0, \tag{3.8}$$

т.е. излучение отсутствует.

Если же б) $m+n$ — четное, то

$$C_{21}(\lambda) = C_{22}(\lambda) \neq 0 \tag{3.9}$$

и уравнение (2.22) принимает вид

$$D_{mn}(\lambda) + \mathscr{E}_{mn}(\lambda) = 0, \tag{3.10}$$

а уравнение (2.12) принимает вид

$$C_{11}(\lambda) \cdot D_{mn}(\lambda) + C_{12}(\lambda) \cdot \mathscr{E}_{mn}(\lambda) = 0,$$

где $C_{11}(\lambda) \neq C_{12}(\lambda)$ $(\neq 0)$. Поэтому

$$D_{mn}(\lambda) = \mathscr{E}_{mn}(\lambda) = 0, \tag{3.11}$$

т.е. излучение отсутствует. Таким образом, при $m \neq 0$ излучение отсутствует. Рассмотрим теперь случай

$$m = 0. \tag{3.12}$$

Если а) n — нечетное, то $C_{11}(\lambda) = C_{12}(\lambda) = 0$ и уравнение (2.12) превращается в тождество.

$$0 \cdot D_{0n}(\lambda) + 0 \cdot \mathscr{E}_{0n}(\lambda) = 0, \tag{3.13}$$

а уравнение (2.22) принимает вид

$$C_{21}(\lambda) \cdot D_{0n}(\lambda) + C_{22}(\lambda) \cdot \mathscr{E}_{0n}(\lambda) = b_2(\lambda), \tag{3.14}$$

где

$$C_{21}(\lambda) = C_{22}(\lambda) = 2\int\limits_0^1 J_1\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right) \cdot x \cdot P_n(x)dx, \tag{3.15}$$

$$b_2(\lambda) = -4B_0(\lambda) \cdot \lambda \cdot \int\limits_0^1 J_1\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right) \cdot x \cdot P_n(x)dx. \tag{3.16}$$

Положив в (3.13) $D_{0n}(\lambda) = \mathscr{E}_{0n}(\lambda) \neq 0$, найдем $2C_{21}(\lambda) \cdot D_{0n}(\lambda) = b_2(\lambda)$, откуда

$$D_{0n}(\lambda) = -\lambda \cdot B_0(\lambda). \tag{3.17}$$

Применяя метод перевала $\left(\lambda_0 = \frac{\omega}{c}\sin\theta\right)$, получим

$$D_{0n}\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right) = -\frac{\omega}{c}\sin\theta \cdot \frac{v^2}{\omega^2}. \tag{3.18}$$

Подставляя это в (2.40), получим

$$\tilde{E}^{(1)}_{\omega\theta 0n} = \frac{2q\omega}{\pi v c} D_{0n}\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right) \cdot \frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{R} \tag{3.19}$$

и из (2.61)

$$\frac{dW_{\omega 0n}}{d\Omega} = \frac{4q^2\omega^2}{\pi^2 v^2 c^2} \cdot c \cdot \frac{\omega^2}{c^2}\frac{v^4}{\omega^4}\sin^2\theta, \tag{3.20}$$

т.е.

$$\frac{dW_{\omega 0n}}{d\Omega} = \frac{4q^2v^2}{\pi^2c^3} \cdot \sin^2\theta. \tag{3.21}$$

Интегрируя по углам, найдем

$$W_{\omega 0n} = \frac{32q^2v^2}{3\pi c^3}, \tag{3.22}$$

и, наконец, интегрируя по частоте от 0 до $\frac{v}{R_0}$, получим

$$W = \frac{32q^2\beta^3}{3\pi \cdot R_0}, \tag{3.23}$$

что совпадает с результатом [1]. Заметим, что в данном случае энергия излучения не зависит от n.

2) n — четное.

Из (2.23), (2.24) получаем, что

$$C_{21}(\lambda) = C_{22}(\lambda) = 2\int\limits_0^1 J_1\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right) x \cdot P_n(x), \tag{3.24}$$

$$b_2(\lambda) = -2B_0(\lambda) \cdot \int\limits_0^1 \lambda \cdot J_1\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right) x \cdot 2P_n(x)dx, \tag{3.25}$$

откуда

$$C_{21}^{(\lambda)}\left[D_{0n}^{(\lambda)} + \mathscr{E}_{0n}^{(\lambda)}\right] = -4B_0(\lambda) \cdot \int\limits_0^1 \lambda \cdot J_1\left(\lambda R_0\sqrt{1-x^2}\right) x \cdot 2P_n(x)dx,$$

$$E_{\theta 0n} = \frac{2q\omega}{\pi v c^2} \cdot \frac{v^2}{\omega^2}\sin\theta \cdot 2\pi \tag{3.26}$$

и для спектральной интенсивности излучения после интегрирования по углам получим

$$dW_{\omega 0n} = \frac{8q^2 v^2}{\pi c^3} \cdot \frac{4}{3} \cdot d\omega.$$

И, интегрируя по ω от 0 до $\frac{v}{R_0}$, получаем результат Г.А. Аскарьяна:

$$W_0 = \frac{32q^2}{3\pi R_0}\beta^3. \qquad (3.27)$$

Таким образом, наш результат вдвое больше результата Г.А. Аскарьяна, что связано с тем, что у нас заряд излучает и при входе в шар и при выходе из него.

Заключение

Решена задача математической физики для частного случая уравнений Максвелла с граничными условиями на поверхности идеально проводящего шара и представляет, таким образом, теоретический интерес. Автор надеется, что его результаты найдут применение в будущем.

Заметим, что, как показано в работе [8], для излучения магнитного заряда нет необходимости заново проделывать все вычисления. В этом случае следует заменить q на g, где g — магнитный заряд, **E** на **H** и **H** на **E**.

Автор благодарен Б.М. Болотовскому за обсуждение, а также В.В. Белецкому и М.П. Каликинской за моральную поддержку и рецензенту, замечания которого во многом способствовали улучшению данной работы.

Список литературы

[1] *Аскарьян Г.А.* // ЖЭТФ. 1955. Т. 29. С. 388.
[2] *Каликинский И.И.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 6. С. 1–4.
[3] *Иваненко Д., Соколов А.* Классическая теория поля. М.–Л.: Гостехиздат, 1949. 432 с.
[4] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1953. 1097 с.
[5] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
[6] *Каликинский И.И.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 9. С. 20–26.
[7] *Каликинский И.И.* // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 10. С. 131–142.
[8] *Франк И.М.* // Ядерная физика. 1979. Т. 9. Вып. 1. С. 180–187.
[9] *Каликинский И.И.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 12. С. 1–9.