

01

Хаотические колебания в связанной системе бистабильных генераторов

© Э.В. Кальянов

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
141190 Фрязино, Московская область, Россия
e-mail: erast@ms.ire.rssi.ru

(Поступило в Редакцию 14 февраля 2011 г. В окончательной редакции 28 июня 2011 г.)

Исследовано влияние асимметрии характеристики нелинейного элемента на хаотические колебания бистабильного генератора Чуа. Показано, что при появлении такой асимметрии возникает асимметрия хаотического аттрактора, отображающего переключение движений между двумя бассейнами притяжения, вплоть до сосредоточения колебаний в одном бассейне. Рассмотрено управление колебаниями бистабильной хаотической автоколебательной системы, состоящей из двух связанных генераторов Чуа. Показана возможность перехода колебаний, возбуждающихся в двух бассейнах притяжения, в один из них, и, наоборот, — развития колебаний в двух бассейнах притяжения, когда автономно колебания возбуждаются в разных бассейнах притяжения. Показана возможность возбуждения хаотических колебаний в связанной системе при параметрах, при которых автономные хаотические колебания парциальных генераторов отсутствуют. Исследовано влияние внешних шумоподобных колебаний.

Введение

Схема Чуа, обладающая хаотической бистабильной динамикой, широко известна, достаточно просто реализуется на практике, а результаты эксперимента хорошо согласуются с теорией [1,2]. В ней при определенных параметрах возбуждаются колебания, хаотически переключающиеся между двумя бассейнами притяжения. При этом процессу переключений сопутствует нерегулярность времени нарастания резонансных движений.

Управление колебаниями схемы Чуа, как и управление, достигаемое в других генераторах, обладающих хаотической динамикой, является актуальной задачей. Один из способов управления заключается в использовании связанных систем.

Взаимодействие колебаний в связанных генераторах Чуа детально изучалось как при идентичных [1], так и при неидентичных [3] параметрах парциальных генераторов (подсистем). Результаты исследований находят различные приложения, в том числе в системах связи [4]. Взаимная синхронизация рассматривалась при использовании генераторов с нелинейными элементами, обладающими симметричными характеристиками; особенности работы связанных генераторов при асимметрии нелинейных характеристик, насколько известно автору, не исследовались, а это представляет как научный, так и практический интерес. В настоящей работе исследуется влияние асимметрии характеристики нелинейных элементов генераторов Чуа на взаимодействие их колебаний в случае резистивной связи при соединении двух генераторов со стороны их нелинейных элементов. Рассматривается также воздействие шумоподобных колебаний, формируемых хаотической системой, на взаимодействие колебаний связанных подсистем.

Исходные уравнения

Используя результаты работы [3], можем применительно к системе двух резистивно связанных генераторов записать

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= y_1 - h_1(x_1) + \gamma(x_2 - x_1), \\ dy_1/dt &= (x_1 - y_1 + z_1)/\alpha_1, \\ dz_1/dt &= -\delta_1 y_1, \\ dx_2/dt &= y_2 - h_2(x_2) + \gamma(x_1 - x_2), \\ dy_2/dt &= (x_2 - y_2 + z_2)/\alpha_2, \\ dz_2/dt &= -\delta_2 y_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где x_i, y_i, z_i — переменные ($i = 1, 2$), $h_i(x_i)$ — характеристики нелинейных элементов, α_i, δ_i — постоянные коэффициенты, γ — коэффициент взаимной связи подсистем.

При численном анализе уравнений парциальных генераторов для простоты полагалось, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, а их отличие определяется нелинейными элементами. Нелинейность этих элементов при асимметрии их характеристик удобно представить в виде

$$h_i(x_i) = x_i - g_i(x_i), \quad (2a)$$

где

$$g_i(x_i) = B_i x_i / [1 + (x_i - \beta_i)^2], \quad (2b)$$

B_i — коэффициенты усиления, β_i — параметры асимметрии.

Опуская индексы и полагая $\gamma = 0$ в (1), легко получить уравнения для автономного парциального генератора в переменных x, y, z . Получающиеся уравнения отличаются от общепринятых уравнений Чуа [2], что обусловлено иным выбором безразмерного времени [3].

Однако они при условии $\alpha = 0$, определяющем отсутствие емкости, шунтирующей индуктивность, позволяют в соответствии с физическим смыслом получить нормированные уравнения триггера и способствовать пониманию происходящих физических процессов. Именно наличием емкости, шунтирующей индуктивность, отличается хаотический генератор Чуа от триггера. Это незначительное отличие от триггера, которому не присущи автоколебания, приводит к принципиально новым эффектам, и простота схемы генератора является его достоинством.

При анализе влияния нерегулярных колебаний на взаимодействие генераторов видоизменяются первое и четвертое уравнения системы (1): они принимают вид

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= y_1 - h_1(x_1) + \xi(t) + \gamma(x_2 - x_1), \\ dx_2/dt &= y_2 - h_2(x_2) + \xi(t) + \gamma(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\xi(t)$ — функция, определяющая воздействие нерегулярных колебаний на систему связанных генераторов. Эту функцию можно представить следующим образом:

$$\xi(t) = \mu u(t), \quad (4)$$

где μ — постоянный коэффициент, u — переменная ($u = u(t)$), являющаяся хаотическим решением (при $u(0) = v(0) = w(0) = 0.1$) известных уравнений Спротта (модель B) [2]:

$$du/dt = vw, \quad dv/dt = u - v, \quad dw/dt = 1 - uv. \quad (5)$$

Автоколебания в автономном генераторе

Характеристика $g(x)$, получающаяся применительно к автономному парциальному генератору при $B_i = B$, $\beta_1 = \beta$, как и характеристика $g_i(x_i)$, отображаемая выражением (2b), являются симметричными при $\beta = 0$ и асимметричными при $\beta \neq 0$. Положительные значения $g(x)$ находятся в первом квадранте, а отрицательные — в третьем. При $\beta = 0$ максимальное значение $g(x)$ при фиксированной величине $B = 1.3$ достигает значения $g_{\max} = 0.65$. При этом минимальное значение $g(x)$ (в третьем квадранте) соответственно равно $g_{\min} = -0.65$. При положительной величине параметра асимметрии по мере увеличения этого параметра максимальное значение g_{\max} в первом квадранте увеличивается, а абсолютная величина g_{\min} в третьем квадранте уменьшается. Так, в случае $B = 1.3$ при $\beta = 0.03$ имеем $g_{\max} = 0.67$, $g_{\min} = -0.63$, а при $\beta = 0.2$ имеем $g_{\max} = 0.79$, $g_{\min} = -0.53$. При отрицательной величине параметра асимметрии, наоборот, с увеличением абсолютной величины этого параметра значение g_{\max} в первом квадранте уменьшается, а абсолютная величина g_{\min} в третьем квадранте увеличивается. В этом случае при $B = 1.3$, $\beta = -0.3$ максимальное значение $g(x)$ в первом квадранте равно 0.48, а абсолютная величина минимального значения $g(x)$ в третьем квадранте равна 0.87.

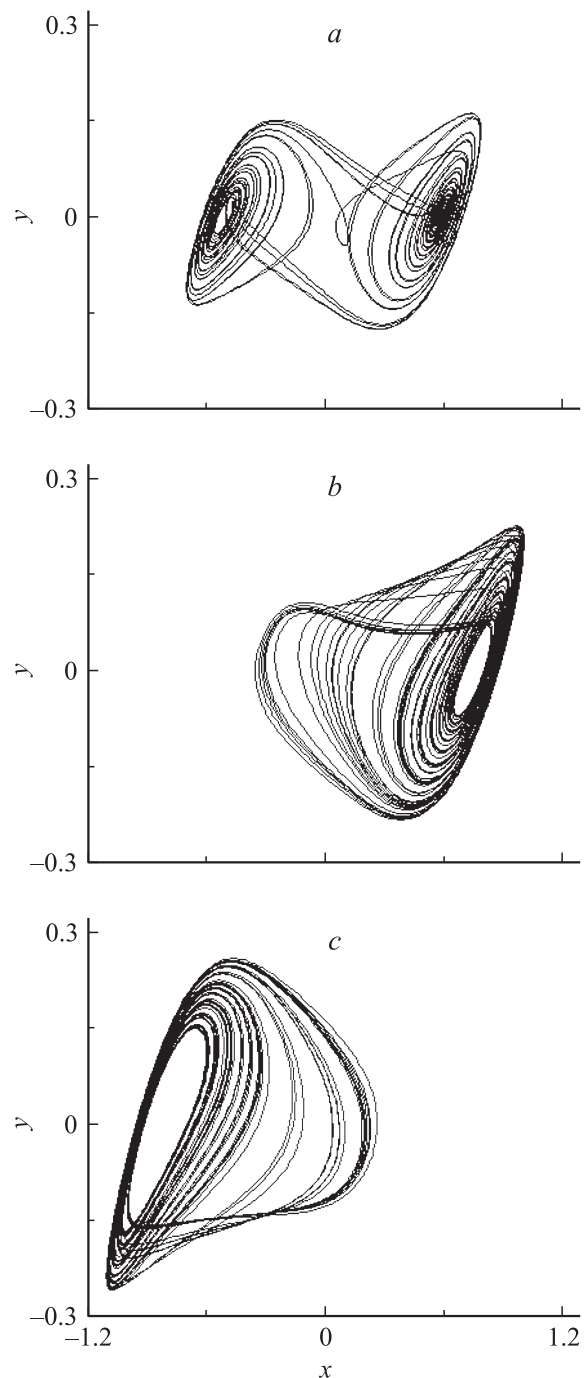


Рис. 1. Аттракторы при колебаниях с их переключением между бассейнами притяжения (a) и при колебаниях в одном бассейне притяжения (b, c), рассчитанные при $\beta = 0.03$ (a), 0.2 (b) и -0.3 (c).

Анализ колебательных процессов автономного генератора показывает, что на плоскости параметров B и β реализуются области колебаний, которым соответствуют различные по структуре аттракторы. Наблюдаются зоны генерации, в которых аттракторы, соответствующие возбуждающимся колебаниям, имеют не только асимметричную структуру, основанную на деформации

хаотического аттрактора типа „двойной завиток“, но и структуру, отображающую подобно аттрактору Ресслера хаотические колебания в одном бассейне притяжения („одинарный завиток“). Возможны также колебания, которым соответствуют различные предельные циклы (многотактные и одноктактные), в том числе и большой предельный цикл.

Асимметрия аттрактора и переход колебаний в положительный или отрицательный бассейн притяжения зависят от значения (положительного или отрицательного) параметра β . При положительной величине этого параметра возникает асимметрия колебаний с их переходом в положительный бассейн притяжения, а при отрицательной величине, наоборот, колебания сосредотачиваются в отрицательном бассейне притяжения.

На рис. 1 приведены характерные аттракторы, соответствующие колебаниям, которые будут использоваться как исходные при изучении работы связанных генераторов. Аттракторы рассчитаны в интервале времени $t \in [1200, 2400]$ при $B = 1.3$ в случаях различных значений параметра асимметрии, определяющего асимметричные характеристики нелинейного элемента. С целью создания условий для первоначального возбуждения колебаний, иллюстрируемых аттракторами рис. 1, *a, b*, в положительном бассейне притяжения начальные условия задавались так, что $x(0) = y(0) = z(0) = 0.1$. Для обеспечения возбуждения колебаний, иллюстрируемых аттрактором рис. 1, *c*, в отрицательном бассейне притяжения начальные условия заданы следующим образом: $x(0) = y(0) = z(0) = -0.1$. Во всех случаях значения неизменяемых параметров выбраны так, что $\alpha = 9$, $\delta = 1.59$. Эти величины (α и δ) будут использоваться и в дальнейшем.

Видно (рис. 1, *a*), что уже при $\beta = 0.03$ проявляется асимметрия аттрактора. При большей абсолютной величине параметра асимметрии хаотический аттрактор переходит в один бассейн притяжения — в положительный (рис. 1, *b*) или в отрицательный (рис. 1, *c*), что определяется знаком параметра асимметрии.

Взаимодействие колебаний в связанной системе

Применительно к управлению колебаниями в системе связанных генераторов представляет интерес режим, когда в одном парциальном генераторе автономно возбуждаются колебания (асимметричные) в двух бассейнах притяжения (при положительном значении параметра β_1), а в другом — колебания в одном (отрицательном) бассейне притяжения (при отрицательной величине параметра β_2). Интересен случай, когда в обоих парциальных генераторах автономно реализуются „однобассейновые“ колебания, причем в разных бассейнах ($x_1(t)$ в положительном бассейне, а $x_2(t)$ в отрицательном), а также случай, когда при отсутствии взаимной связи автономные колебания отсутствуют.

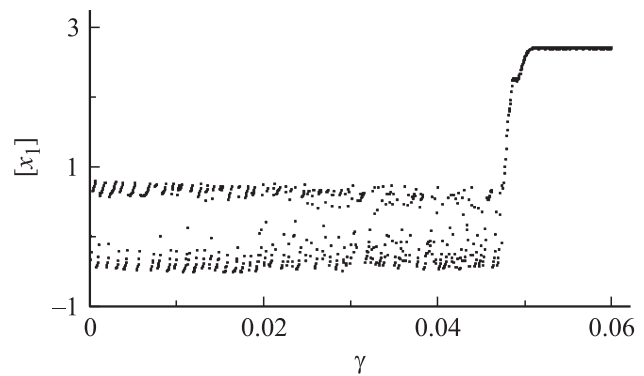


Рис. 2. Изменение максимальных значений колебательного процесса $x_1(t)$ в зависимости от коэффициента связи.

На рис. 2 иллюстрируется бифуркационная диаграмма изменения максимальных значений колебательного процесса $x_1(t)$, обозначенных через $[x_1]$, в зависимости от коэффициента связи. При расчетах параметры усиления взаимодействующих подсистем выбраны так, что $B_1 = B_2 = 1.3$. При этом в первом генераторе реализована почти симметричная характеристика (при $\beta_1 = 0.03$), а во втором — со значительной асимметрией (при $\beta_2 = -0.3$). Начальные условия обеспечивают возбуждение колебаний $x_1(t)$ в положительном бассейне притяжения, а колебаний $x_2(t)$ — в отрицательном; они представлялись соответственно в виде $x_1(0) = y_1(0) = z_1(0) = 0.1$ для первой подсистемы и в виде $x_2(0) = y_2(0) = z_2(0) = -0.1$ для второй. Такие начальные условия для подсистем задавались и в дальнейшем.

В соответствии с выбранными величинами параметров подсистем аттрактор первого генератора при $\gamma = 0$ применительно к диаграмме, представленной на рис. 2, имеет вид, показанный на рис. 1, *a*. При этом второй генератор формирует колебания в отрицательном бассейне притяжения, которым при автономной работе соответствует аттрактор, показанный на рис. 1, *c*.

Как видно (рис. 2), по мере увеличения коэффициента связи колебательный процесс $x_1(t)$ до величины $\gamma \approx 0.03$, в соответствии с распределением точек, отображающих значения $[x_1]$ занимает оба бассейна притяжения. При превышении этого значения γ колебания преимущественно находятся в отрицательном бассейне притяжения. При достижении значения $\gamma \approx 0.048$ происходит переход к регулярным колебаниям, которым соответствует так называемый большой предельный цикл.

Анализ бифуркационной диаграммы для изменения максимальных значений колебательного процесса $x_2(t)$ в зависимости от γ показывает, что колебательный процесс $x_2(t)$ реализуется только в одном (отрицательном) бассейне притяжения. При достижении значения $\gamma \approx 0.048$ также происходит переход к большому предельному циклу. При этом изменение максимальных зна-

чений разности колебательных процессов подсистем в зависимости от параметра связи свидетельствует об отсутствии синхронизма взаимодействующих хаотических колебаний. Колебания, которым соответствует большой предельный цикл, синхронизированы.

Бифуркационные диаграммы изменения максимальных значений колебательных процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в зависимости от коэффициента связи γ , когда (при $B_1 = B_2 = 1.3$) в обеих подсистемах реализованы асимметричные характеристики нелинейных элементов, имеют вид, аналогичный представленному на рис. 2. При $\beta_1 = 0.2$ и $\beta_2 = -0.3$ автономное возбуждение колебаний $x_1(t)$ происходит в положительном бассейне притяжения, а колебаний $x_2(t)$ — в отрицательном. В соответствии с выбранными величинами параметров подсистем аттрактор первого генератора при $\gamma = 0$ имел вид, показанный на рис. 1, *b*, а аттрактор второго генератора — вид, иллюстрируемый рис. 1, *с*. По мере увеличения коэффициента связи максимальные значения колебательного процесса $x_1(t)$ до величины $\gamma \approx 0.01$ отображались распределением точек, свидетельствующим о том, что колебания занимают один (положительный) бассейн притяжения. При превышении этого значения γ колебания реализуются в обоих бассейнах притяжения. При достижении значения $\gamma \approx 0.066$ происходит переход к регулярным колебаниям, которым соответствует большой предельный цикл. Бифуркационная диаграмма для изменения $[x_2]$ в зависимости от γ при $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = -0.3$ свидетельствовала о том, что колебательный процесс $x_2(t)$ реализуется в одном (отрицательном) бассейне притяжения до значения $\gamma \approx 0.01$. Затем колебания занимают оба бассейна притяжения. При достижении значения $\gamma \approx 0.006$ происходит переход к большому предельному циклу. Как и в случае, иллюстрируемом рис. 2, синхронизация колебаний реализуется только при переходе к колебаниям, которым соответствует большой предельный цикл.

На рис. 3 приведены характерные аттракторы, рассчитанные в интервале времени $t \in [1200, 2400]$, реализующиеся при взаимодействии колебаний в рассмотренных режимах связанной системы. Аттрактор, представленный на рис. 3, *a*, соответствует колебаниям, реализующимся при параметрах, соответствующих значению $\gamma = 0.04$ на диаграмме рис. 2. Из сравнения рис. 3, *a* с рис. 1, *a* следует, что колебательный процесс $x_1(t)$, реализующийся при $\gamma = 0$, при введении связи, определяемой значением $\gamma = 0.04$, как бы „перетягивается“ в отрицательный бассейн притяжения: колебания в основном находятся в отрицательном бассейне притяжения. При этом, как показывают расчеты, колебания $x_2(t)$ также возникают и в положительном бассейне притяжения. В обоих случаях заметно большее по сравнению с автономным режимом перемешивание фазовых траекторий.

Аттрактор, иллюстрируемый рис. 3, *b*, соответствует колебательным процессам, реализующимся в случае взаимодействия колебаний $x_1(t)$ и $x_2(t)$, когда $\beta_1 = 0.2$,

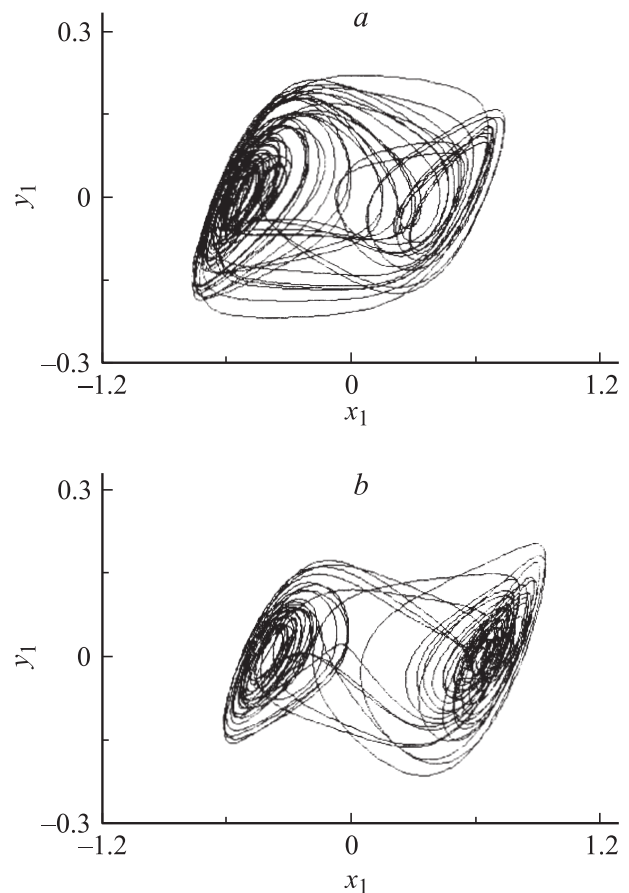


Рис. 3. Аттракторы, соответствующие колебаниям $x_1(t)$, рассчитанные при $\beta_1 = 0.03$, $\beta_2 = -0.3$ (*a*) и при $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = -0.3$ (*b*).

$\beta_2 = -0.3$, $\gamma = 0.05$. Он иллюстрирует возникновение колебаний в обоих бассейнах притяжения и большее перемешивание фазовых траекторий, когда в автономном режиме работы колебания реализуются в разных бассейнах притяжения.

Характерной особенностью связанной системы является возможность возбуждения хаотических колебаний при параметрах парциальных подсистем, при которых в автономном их режиме (при $\gamma = 0$) хаотические колебания отсутствуют. Это иллюстрируется бифуркационной диаграммой, представленной на рис. 4. При расчете диаграммы значения параметров парциальных подсистем выбраны так, что $B_1 = 1.55$, $\beta_1 = 0.2$, $B_2 = 1.5$, $\beta_2 = -0.3$. Видно, что хаотические колебания $x_1(t)$ возбуждаются лишь при достижении параметром взаимной связи значения $\gamma \approx 0.08$. Интенсивность этих колебаний, реализующихся с переключением движений между двумя бассейнами притяжения, снижается с увеличением γ . Однако при $\gamma \approx 0.22$ происходит изменение структуры колебательного процесса, характеризующееся уменьшением средней частоты переключений по мере увеличения γ .

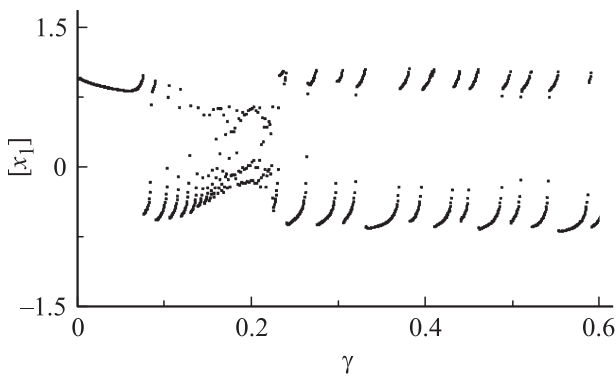


Рис. 4. Изменения максимальных значений колебательного процесса $x_1(t)$ в зависимости от коэффициента связи, когда $B_1 = 1.55$, $B_2 = 1.5$.

Расчет диаграммы изменения максимальных значений разности взаимодействующих колебательных процессов показывает, что хаотические колебания подсистем в интервале изменения параметра связи $\gamma \in [0.08, 0.22]$ не синхронизированы; точки, отображающие максимальные значения разности колебаний $x_1(t)$ и $x_2(t)$, имеют относительно большой разброс. При $\gamma > 0.22$ этот разброс точек незначителен, что свидетельствует о возникновении синхронной хаотической динамики.

Анализ фрагментов реализаций взаимно синхронизированных колебаний, стимулированных введением достаточно сильной связи между потенциально автоколебательными парциальными подсистемами, показывает, что синхронные колебания, реализующиеся, например, при $\gamma = 0.5$, имеют структуру, подобную (в смысле их переключения) структуре этих движений, наблюдающихся при хаотическом режиме автономного парциального генератора. При этом, однако, существенно медленнее нарастает амплитуда резонансных колебаний, что и приводит к снижению средней частоты переключений, наблюдающейся на диаграмме, представленной на рис. 4. Полная идентичность движений парциальных подсистем не возникает, остаются относительно слабые разностные колебания $x_1(t) - x_2(t)$, причем в моменты времени, соответствующие переключениям движений между бассейнами притяжения, возникают „всплески“ разностных колебаний.

Влияние внешнего шумоподобного сигнала

При численном анализе влияния шумоподобных колебаний на процессы в связанных подсистемах проводилось совместное решение уравнений (1), (2), (4), (5). При этом вместо первого и четвертого уравнений системы (1) использовались соотношения (3).

При уровне воздействия внешнего нерегулярного сигнала, определяемом значением $\mu = 0.03$, когда выбросы хаотических движений $\xi(t)$ почти на порядок меньше

выбросов хаотических колебаний управляемой системы, диаграмма, показанная на рис. 4, заметно меняется. В этом случае воздействие колебаний $\xi(t)$ вызывает развитие нерегулярности разброса точек, отображающих максимальные значения колебательного процесса $x_1(t)$. В то же время внешние хаотические колебания не приводят к срыву режима взаимной синхронизации: при достижении параметром связи значения $\gamma \approx 0.27$ происходит уменьшение максимальных значений разности взаимодействующих колебаний. В то же время синхронная динамика в связанной системе наступает при несколько большей связи, чем в случае отсутствия внешнего хаотического воздействия.

На рис. 5 показано изменение максимальных значений колебательного процесса $x_1(t)$ (при $\gamma = 0.5$) в зависимости от параметра μ . Видно, что повышение интенсивности воздействия шумоподобных колебаний приводит (при достижении значения $\mu \approx 0.11$) к стимулированию возбуждения колебаний с большим предельным циклом, которые при этом находятся в асинхронной динамике, создаваемой внешним хаотическим сигналом. По мере увеличения μ нарастает разброс точек, соответствующих максимальным значениям колебательного процесса $x_1(t)$, свидетельствующий о развитии принудительной хаотизации, а затем автоколебания подавляются и система переходит в режим регенеративного усиления внешних шумоподобных колебаний. Фрагменты реализаций колебаний $x_1(t)$ и разности колебательных процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$, полученные при воздействии нерегулярных колебаний $\xi(t)$, отображают сложные хаотические движения. При воздействии внешних нерегулярных колебаний происходит большее развитие хаоса и повышение частоты переключений между бассейнами притяжения. Это обусловлено тем, что внешнее воздействие способствует смене бассейна притяжения, ускоряя нарастание контурных движений. В разностных колебаниях наблюдаются выбросы в моменты переключений.

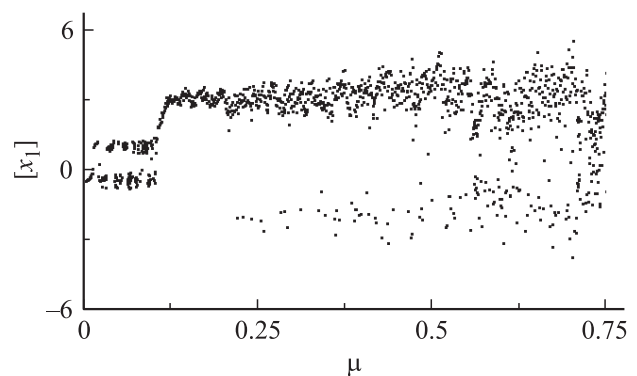


Рис. 5. Изменения максимальных значений колебательного процесса $x_1(t)$ в зависимости от параметра, определяющего уровень внешнего сигнала.

Заключение

При увеличении параметра асимметрии характеристики нелинейного элемента происходит изменение структуры аттрактора, соответствующего возбуждающимся колебаниям в автономном генераторе. Симметричный аттрактор, отображающий колебания, переключающиеся между двумя бассейнами притяжения, преобразуется в асимметричный аттрактор, после чего возникает аттрактор, соответствующий колебаниям, сосредоточивающимся в одном бассейне притяжения. Переход колебаний в положительный или отрицательный бассейн притяжения определяется знаком параметра асимметрии: при положительном параметре асимметрии колебания сосредоточиваются в положительном бассейне притяжения, а при отрицательном, наоборот, — в отрицательном.

Когда колебания одного из генераторов занимают оба бассейна притяжения, а другого — один, введение взаимной связи может переводить колебания в общий бассейн притяжения, не приводя к режиму взаимной синхронизации, а наоборот, — к асинхронной динамике, обеспечивающей большее перемешивание фазовых траекторий. При увеличении связи между подсистемами в этом случае происходит возбуждение взаимно синхронизированных колебаний, которым соответствует большой предельный цикл.

В случае автономной работы парциальных подсистем в разных бассейнах притяжения, введение взаимной связи может стимулировать возбуждение колебаний каждой из подсистем в обоих бассейнах притяжения. При этом вместо взаимной синхронизации реализуются колебания с более развитым хаосом. При достаточно сильной связи возбуждаются синхронизированные регулярные колебания.

При реализации взаимной связи между парциальными подсистемами возможно возбуждение хаотических колебаний с переключением между бассейнами притяжения, когда при автономной работе подсистем условия для возбуждения колебаний не выполняются. В этом случае могут возбуждаться взаимно синхронизированные хаотические колебания, средняя частота переключений которых значительно меньше ее значения, реализующегося при автономных колебаниях подсистем. Внешние нерегулярные осцилляции приводят к развитию большого хаоса при возбуждении автоколебаний и к увеличению частоты переключений между бассейнами притяжения. При этом возможен переход к „зашумленным“ автоколебаниям, которым соответствует большой предельный цикл, а также к гашению этих автоколебаний с установлением режима регенеративного усиления воздействующих шумоподобных колебаний.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 11-02-00179-а) и программы „Радиовидение“ ОФН РАН.

Список литературы

- [1] Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. 368 с.
- [2] Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). М.: Физматлит, 2001. 296 с.
- [3] Кальянов Э.В. // РЭ. 2002. Т. 47. № 5. С. 589–598.
- [4] Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос. Новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002. 252 с.