

01
Модель корректируемой инерциальной навигационной системы с функцией определения напряженности гравитационного поля Земли

© А.С. Девятисильный

Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН,
690041 Владивосток, Россия
e-mail: devyatis@iacp.dvo.ru

(Поступило в Редакцию 10 февраля 2011 г. В окончательной редакции 23 мая 2011 г.)

В рамках метода инерциальной навигации предложены краткое описание и результаты численного исследования модели векторной гравиметрической системы, использующей астро- и спутниковые навигационные определения.

Введение

Как известно [1,2], в алгоритм работы инерциальной навигационной системы (ИНС/INS) закладывается модель гравитационного поля Земли (GE-поля). Локальное отличие векторных величин напряженности реального и модельного полей представляется как аномалия GE-поля. Уточнение модели GE-поля в результате оценки его аномальной составляющей способствует повышению точности работы ИНС, а ее интерпретация — важная составная часть исследования геодинамических процессов и поиска полезных ископаемых (нефти, газа, угля, руд металлов). Оперативная оценка аномальных полей протяженных и/или труднодоступных географических районов (например, арктических) достигается благодаря реализации гравиметрических наблюдений на подвижных объектах [3]. При этом решаются две основные задачи — собственно гравиметрии и координатной привязки ее результатов.

В силу общности физических (теоретико-механических) представлений, лежащих в основе гравиметрии и инерциальной навигации, обе эти задачи могут быть поставлены и решены в рамках единой (замкнутой) обратной задачи, формально представляемой математической моделью ИНС, функционирующей в условиях неполной гравитационной определенности и корректируемой по внешней (дополнительной к инерциальной) информации [4].

Современная гравиметрия на авиационных и морских подвижных носителях — это скалярная гравиметрия. Вместе с тем в рамках концепции скалярности, строго говоря, невозможно избежать погрешности оценки модуля напряженности GE-поля, если только каким-либо образом не прибегать к альтернативной концепции — векторной гравиметрии. В настоящей работе в рамках последней предлагается и исследуется модель гравинерциальной навигационной системы (ГИНС/GINS) при условии доступности полной позиционной (о радиусе-векторе места носителя) информации, доставляемой навигационной спутниковой систе-

мой (НСС/NSS) типа ГЛОНАСС/GLONASS, и астроинформации — о пространственной ориентации приборной платформы, получаемой на борту носителя при визировании известных звезд.

Основные модельные представления

Переходя к формальным описаниям, отметим, что базовая модель метода инерциальной навигации (ИНМ/INM) представляется двумя группами дифференциальных уравнений — динамической и кинематической [1,2], где первая описывает траекторию, а вторая — эволюцию системы отсчета, в которой траектория рассматривается. Известно [2], что проблема оценки ориентации системы отсчета решается, если доступны визированию хотя бы две звезды, причем погрешности оценки углов ориентации и времени их корреляции могут быть весьма малы (соответственно порядка 10^{-7} рад и нескольких секунд [5]). Учитывая это, далее обратимся только к динамической группе уравнений и спутниковой позиционной информации. Тогда идеализированная модель обратной задачи, решаемой в рамках метода, может быть записана в следующем общем виде:

$$Dq = p, \quad q(0) = q_0,$$

$$Dp = G + F, \quad p(0) = p_0,$$

$$z = q, \tag{1}$$

где векторные переменные — q (радиус-вектор места носителя), p (удельный импульс или, что то же самое, абсолютная линейная скорость носителя), G (напряженность GE-поля), F (удельная сила негравитационной природы) — записываются в проекциях на оси вращающейся с абсолютной угловой скоростью $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ правой ортогональной системы отсчета $oq = oq_1q_2q_3$ с началом в центре масс Земли, осью oq_3 , направленной по радиусу-вектору местопо-

ложения носителя, и осями oq_1 и oq_2 , направленными соответственно на географические Восток и Север; T — символ транспонирования векторов и матриц; $\mathbf{D} = d/dt + \hat{\omega}$ — оператор абсолютной производной; $\hat{\omega}$ — кососимметрическая матрица, составленная из компонент вектора $\boldsymbol{\omega}$ так, что $\hat{\omega}_{ij} = e_{ikj}\omega_k$, $(i, k, j) = \overline{1, 3}$; e_{ikj} — псевдотензор Леви–Чивита; инерциальные измерения значений компонент векторов $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{F} и \mathbf{q} выполняются в приборной системе отсчета с осями, параллельными соответствующим осям системы $o\mathbf{q}$.

Далее с учетом физических реальностей, а это — наличие погрешностей в измерениях векторов $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{F} и \mathbf{q} , в определении начальных значений \mathbf{q}_0 и \mathbf{p}_0 , а также неполнота представлений о GE-поле (т.е. о векторе $\mathbf{G}(\mathbf{q})$), осуществим переход от уравнений (1) к линейным уравнениям в вариациях. В итоге получим

$$\mathbf{D}\delta\mathbf{q} = \delta\mathbf{p} - \hat{\nu}\mathbf{q}, \quad \delta\mathbf{q}(0) = \delta\mathbf{q}_0,$$

$$\mathbf{D}\delta\mathbf{q} = -\frac{\mu}{r^3}\delta\mathbf{q} + \mathbf{g} + \mathbf{f} - \hat{\nu}\mathbf{p} + \frac{3\mu\epsilon_r}{r^4}\mathbf{q}, \quad \delta\mathbf{p}(0) = \delta\mathbf{p}_0,$$

$$\dot{\mathbf{g}} = \boldsymbol{\chi}(t), \quad \mathbf{g}(0) = \mathbf{g}_0,$$

$$\delta\mathbf{z} = \delta\mathbf{q} + \boldsymbol{\epsilon}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\nu}$ и \mathbf{f} — векторы инструментальных погрешностей гироскопов и ньютонометров; $\hat{\nu}_{ij} = e_{ikj}\nu_k$, $(i, k, j) = \overline{1, 3}$; $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)^T$, $\epsilon_1 = \epsilon_{q_1} + r\beta_2$, $\epsilon_2 = \epsilon_{q_2} + r\beta_1$, $\epsilon_3 = \epsilon_r = \epsilon_{q_3}$, причем $\epsilon_{q_1}, \epsilon_{q_2}, \epsilon_r$ — погрешности определения координат носителя с помощью НСС, $r = |\mathbf{q}| = q_3$, β_1 и β_2 — угловые инструментальные погрешности астросистемы; $\delta\mathbf{q} = \mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}}$, $\delta\mathbf{p} = \mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}$, $\mathbf{g} = \mathbf{G}(\mathbf{q}) - \mathbf{G}_m(\mathbf{q})$, $\mathbf{G}_m(\mathbf{q}) = -\mu\mathbf{q}/r^3$ — центральная составляющая напряженности GE-поля; $\boldsymbol{\chi}(t)$ — скорость изменения вектора \mathbf{g} на траектории движения носителя; $\tilde{\mathbf{q}}$ и $\tilde{\mathbf{p}}$ — результат интегрирования уравнений динамической группы с использованием измеренных значений $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{F} и с замещением в модели $\mathbf{G}_m(\mathbf{q})$ значения r измеренным значением $z_3 = r + \epsilon$.

Цель решения задачи (2) — это оценки $\delta\mathbf{q}^*$, $\delta\mathbf{p}^*$, \mathbf{g}^* векторов $\delta\mathbf{q}$, $\delta\mathbf{p}$, \mathbf{g} и в конечном итоге оценки векторов \mathbf{q} , \mathbf{p} , \mathbf{G} , образуемые следующим образом: $\mathbf{q}^* = \tilde{\mathbf{q}} + \delta\mathbf{q}^*$, $\mathbf{p}^* = \tilde{\mathbf{p}} + \delta\mathbf{p}^*$, $\mathbf{G}^* = \mathbf{G}_m(\mathbf{q}^*) + \mathbf{g}^*$.

Модель (2) представляет собой систему уравнений „состояние-измерение“ [6], и задача может быть решена непосредственно, если обратиться к методу динамического обращения, реализовав его, например, с помощью алгоритма калмановского типа [7]. Наряду с этим, учитывая линейность уравнений, модель задачи весьма стандартным способом может быть приведена к системе линейных алгебраических уравнений с некоторым конечномерным оператором (матрицей) \mathbf{L} размерности $3m \times n$ ($\dim \mathbf{L} = 3m \times n$), динамически расширяемым по m по мере накопления измерений, и $n = \dim \mathbf{x}$, $\mathbf{x}^T = (\delta\mathbf{q}^T, \delta\mathbf{p}^T, \mathbf{g}^T)$; в этом случае решение задачи ин-

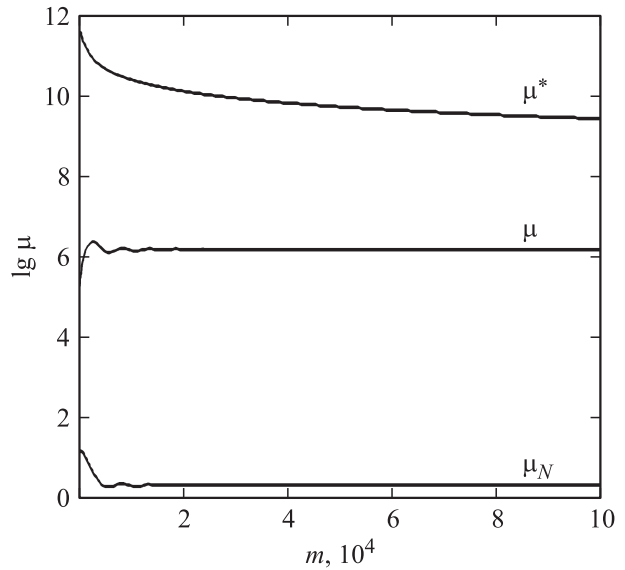


Рис. 1. Графики чисел обусловленности.

терпретируется в рамках представлений метода наименьших квадратов (МНК/LSM).

Вычислительные эксперименты

Основная цель выполненных экспериментов — верификация корректности математической постановки задачи в условиях конечной точности вычислений и измерений; достигается она при исследовании на полноту ранга матрицы \mathbf{L} (ее можно отождествлять с матрицей наблюдаемости [6]) и при непосредственном построении решения с использованием алгоритма динамического обращения Калмана [6,7].

Упомянутая здесь матрица \mathbf{L} имеет вид $\mathbf{L} = (\mathbf{H}\Phi(t_0, t_i))_{i=0}^m$, m — целое число, причем $m \geq n$; $t_i = mh$; h — шаг дискретизации задачи по времени t , $\dim \mathbf{L} = 3m \times n$; \mathbf{H} — матрица связи „состояние-измерение“, так что $\delta\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}$, $\dim \mathbf{H} = 3 \times n$; $\Phi(t_0, t_i)$ — фундаментальная матрица решения однородного дифференциального уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению в модели (2), $\dim \Phi(t_0, t_i) = n \times n$.

На рис. 1 приводятся графики значений сингулярных чисел обусловленности μ , μ_N и μ^* , где μ и μ_N — вычисленные при относительной машинной (компьютерной) точности вычислений $e_1 = 2.2 \cdot 10^{-16}$ числа обусловленности соответственно исходной (\mathbf{L}) и нормированной по столбцам ($\mathbf{N} = \mathbf{L}\mathbf{D}^{-1}$) матриц; $\mathbf{D} = \text{diag}(\|\mathbf{L}_1\|, \|\mathbf{L}_2\|, \dots, \|\mathbf{L}_n\|)$, $\|\mathbf{L}_i\|$ — евклидова норма i -го столбца матрицы \mathbf{L} ; $\mu^* = 1/(\sqrt{n}(2n-3)(12m+27) + 12m+30)e_1$ — критическое число обусловленности [8].

Условие разрешимости задачи (2) в вычислительной среде, а именно $\mu^* > \mu$ и/или $\mu^* > \mu_N$, что хорошо видно из рис. 1, выполняется. Последнее означает сходимость (по m) алгоритмов МНК и асимптотическую

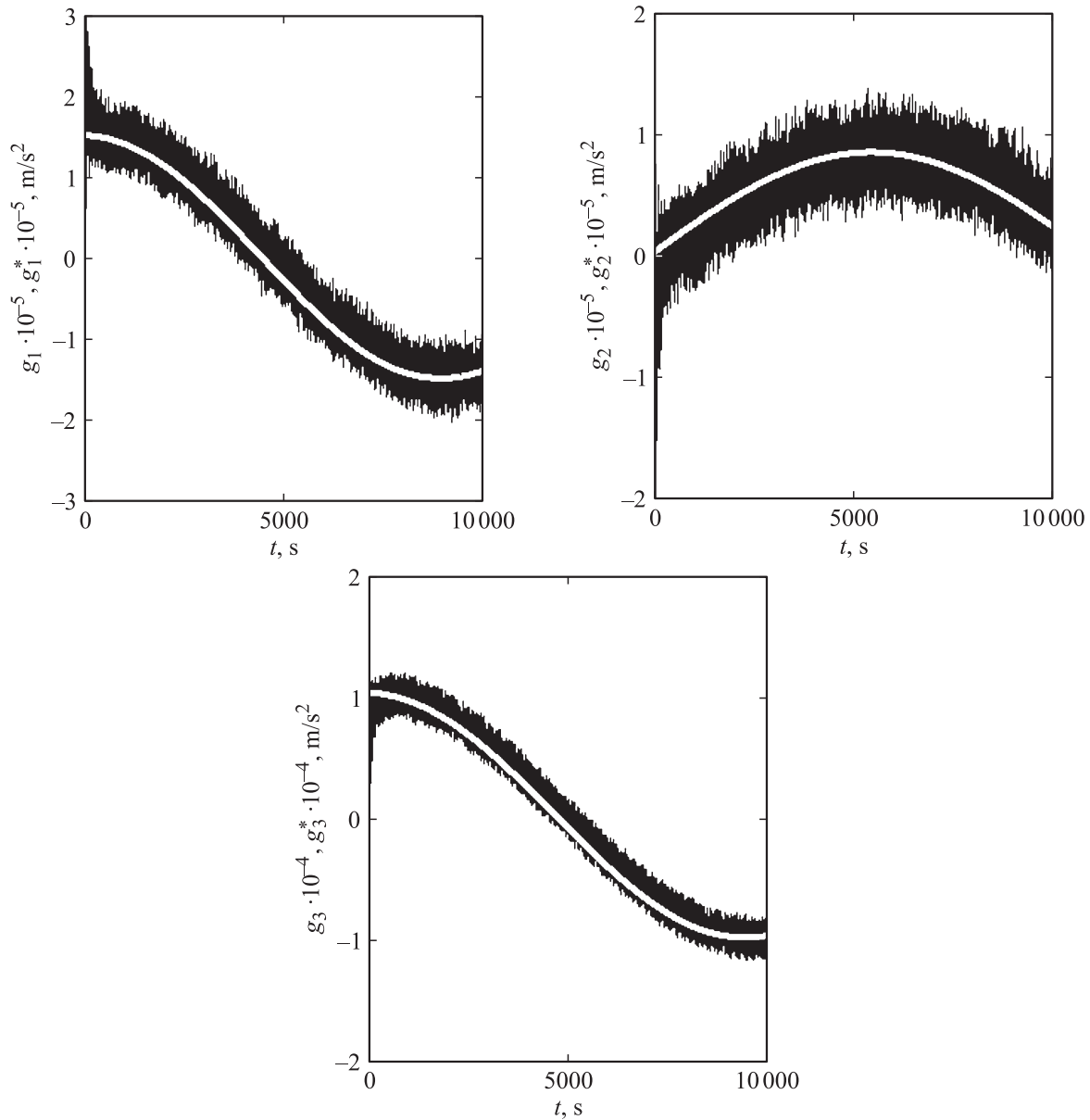


Рис. 2. Графики функций $g_i(t)$ (белые линии) и калмановских оценок $g_i^*(t)$ (черные линии), $i = \overline{1, 3}$.

устойчивость (по t) алгоритмов динамического обращения калмановского типа. Отметим, что графики рис. 1, как и рис. 2, построены для случая движения объекта по географической параллели $\varphi = 45 \text{ deg}$ в восточном направлении с относительной (к Земле) скоростью $V = 100 \text{ m/s}$, $h = 1 \text{ s}$; однако вывод о разрешимости задачи сохраняется и для других значений φ и V .

На рис. 2 представлены графики функций $g_i(t)$ (белые линии) и их калмановских оценок $g_i^*(t)$ (черные линии), $i = \overline{1, 3}$, полученных при следующих среднеквадратичных значениях компонент векторов погрешностей $\varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}$: $\sigma_\varepsilon = 5 \text{ m}$, $\sigma_f = 10^{-3} \text{ m/s}^2$, $\sigma_v = 10^{-3} \text{ deg/hour}$, $\sigma_\beta = 10^{-6} \text{ rad}$. Сравнение исходных функций с их оценками дает основание для вывода о весьма высокой эффективности рассмотренной модели ГИНС.

Заключение

В заключение напрашивается еще один вполне очевидный вывод. Если удельную силу \mathbf{F} интерпретировать как кажущееся ускорение [1], то в силу физической эквивалентности \mathbf{G} и \mathbf{F} в рамках рассмотренного вместо оценки вектора \mathbf{G} может быть решена задача оценки вектора $\mathbf{S} = \mathbf{G} + \mathbf{F}$, что, по сути, указывает на возможность полного отказа от использования ньютометров. Последнее актуально, когда конечной целью применения рассмотренной модели ГИНС является не решение задачи гравиметрии, а задачи навигации, т.е. определение только координат и скоростей носителя.

Исследование выполнено при частичной поддержке РФФИ-ДВО (грант № 09-01-98503-р_восток_a) и ДВО РАН (гранты № 09-1-П29-02, 09-III-A-03-066).

Список литературы

- [1] *Ишлинский А.Ю.* Классическая механика и силы инерции. М.: Наука, 1987. 320 с.
- [2] *Андреев В.Д.* Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы. М.: Наука, 1967. 648 с.
- [3] Гравиразведка. Справочник геофизика / Под ред. Е.А. Мудрецово́й. М.: Недра, 1981. 397 с.
- [4] *Девятисильный А.С.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 12. С. 103–105.
- [5] *Девятисильный А.С., Прудкогляд Н.А.* // Авиакосмическое приборостроение. 2007. № 11. С. 39–44.
- [6] *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с. (Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A. Topics in mathematical system theory. (McGraw-Hill, New York, 1969)).
- [7] *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В.* // Вестн. РАН. 2006. Т. 76. № 7. С. 615–624.
- [8] *Девятисильный А.С., Крыжко И.Б.* // Космические исследования. 1997. Т. 35. № 1. С. 99–101.