01;03

О роли восходящей диффузии при натекании газа в штрек

© Л.В. Танатаров, И.В. Танатаров

ННЦ НАН Украины „Харьковский физико-технический институт“,
61108 Харьков, Украина
e-mail: igor.tanatarov@gmail.com

(Поступило в Редакцию 6 мая 2010 г. В окончательной редакции 5 апреля 2011 г.)

Исследовано влияние восходящей диффузии, обусловленной распределением по глубине гидростатического давления, на натекание метана в угольный штрек. Диффузионная задача решена аналитически по методу интегральных преобразований. Показано, что интегральный поток газа экспоненциально зависит от глубины залегания штрека. Показано, что вследствие наличия конкурирующих механизмов переноса, обусловленных градиентами концентрации и давления, поток при больших временах спадает экспоненциально. Получены выражения для интегрального потока и потока в заданный момент времени. Обсуждена роль симметрии задачи о распределении напряжений в среде, окружающей штрек.

Введение

Натекание газа в полость описывается уравнением диффузии для концентрации газа в породе c

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla j = 0, \tag{1}$$

плотность диффузионного потока газа определяется выражением [1]

$$J = -D\left[\nabla c + \frac{2\Omega}{3kT\, c\nabla\sigma_{ll}}\right], \tag{2}$$

где D — коэффициент диффузии, Ω — атомный объем, k — постоянная Больцмана, T — температура (для простоты не будем учитывать ее зависимость от глубины), σ_{ll} — след тензора напряжений σ_{ik}. Первое слагаемое в квадратных скобках описывает диффузию вследствие градиента концентрации, в то время как второе, называемое „восходящей диффузией“, описывает диффузию, обусловленную механическими напряжениями.

Под штреком мы понимаем горизонтальную выработку. В отсутствие штрека, в равновесии, поток равен нулю $j = 0$, а $\sigma_{ll} = -P$, где P — гидростатическое давление, равное на глубине h величине $\rho_0 g h$, где ρ_0 — плотность породы. Тогда из (2) получаем, что равновесная концентрация газа на глубине h в отсутствие штрека равна

$$c_h = c_0 e^{\lambda}, \tag{3}$$

где $\lambda = \frac{2\Omega\rho_0 g h}{3kT}$ — безразмерная глубина (или, что то же самое, обезразмеренное равновесное давление на глубине h), а c_0 — концентрация газа на поверхности. Потоки, обусловленные градиентами концентрации и давления, компенсируют друг друга, а по абсолютной величине равны $Dc_0\lambda e^{\lambda}/h$.

Пусть теперь на глубине h был проложен штрек высоты R. Реальное время проходки штрека и характерное время выравнивания давления (происходящего со скоростью звука) много меньше, чем характерное время установления равновесного значения концентрации, поэтому можно полагать, что в момент времени $t = 0$ давление в штреке сбрасывается до нуля. При этом градиент давления в его окрестности возрастает с величины порядка $\rho_0 g$ до величины порядка $\rho_0 g\, h/R \gg \rho_0 g$, и в правой части (2) работает второе слагаемое — восходящая диффузия. По абсолютной величине поток газа равен $Dc_0\lambda e^{\lambda}/R$. При дальнейшей эволюции градиент концентрации становится порядка c_h/R, так что первое слагаемое становится тоже $\sim Dc_0\lambda e^{\lambda}/R$; потоки опять выравниваются и асимптотически достигается равновесие. Таким образом, восходящая диффузия должна вносить существенный вклад в процесс натекания газа в штрек на всех этапах эволюции.

Она обеспечивает существование стационарного распределения растворенного в породе газа. Любое изменение напряженного состояния породы, если оно уже установилось, обязательно должно привести в конечном итоге к изменению стационарного распределения концентрации растворенного газа. Скорость установления измененного стационарного распределения концентрации определяется диффузией. Общее количество газа, выделившегося в газовую среду штрека в результате такого перераспределения концентрации, от коэффициента диффузии не зависит (так как определяется только лишь термодинамикой), но количество газа, выделяющегося с единицы поверхности штрека в единицу времени, пропорционально коэффициенту диффузии. Поэтому, если в породе внезапно появляется система пор и трещин, по которым газ может проникнуть в штрек, происходит внезапный выброс газа. Объем выброшенного газа при этом определяется только термодинамикой. Именно поэтому важно определить интегральный поток, что и делается в настоящей работе.

В работе [2] было рассмотрено истечение метана в торец угольного пласта конечной длины через систему открытых пор и трещин в предположении, что весь метан содержится в этом конечном пласте. Там были найдены плотность метана и концентрация метана, растворенного в твердой фазе угольного пласта, как функции координаты и времени. Было показано, что в пренебрежении слагаемым $\sim \nabla c$ для потока при больших временах он спадает со временем степенным образом, и стационарного состояния нет. В настоящей работе используется другой подход. Метан считается растворенным во всей толще породы (в том числе и угольных пластах), окружающей штрек. Наличие трещин, пор и газовой фазы в них учитывается лишь через эффективный коэффициент диффузии [2,3], что сильно упрощает вычисления и позволяет решить полную диффузионную задачу аналитически, применяя метод интегральных преобразований. Показано, что в присутствии двух конкурирующих механизмов переноса диффузии, обусловленной градиентами концентрации и давления, поток газа при больших временах спадает экспоненциально. При этом интегральный поток конечен, а распределение концентрации стремится к некоторому равновесному.

В разд. 2 проводится оценка зависимости плотности потока газа от времени и интегрального потока в упрощенной эффективной одномерной задаче. Показано, что временные зависимости экспоненциальные, с характерным временем, которое определяется коэффициентом диффузии, но интегральный поток газа конечен и от коэффициента диффузии не зависит. В разд. 3 дается точное решение уравнений (1), (2) в одномерном случае, получено выражение для интегрального потока как функционала распределения давления вокруг штрека, которое является решением соответствующей задачи теории упругости, не сязанной с диффузионной задачей.

В последнем разделе работы решение обобщается на реальный трехмерный случай. Обсуждается роль симметрии задачи о распределении напряжений в среде, окружающей штрек, для диффузионной задачи.

1. Оценка диффузионных потоков при натекании газа в штрек

В используемом приближении $(R/h \ll 1)$ потоки газа в штрек через пол и потолок одинаковы, поэтому далее рассматриваем один из них. Диффузионный поток газа проще всего оценить следующим образом. Направим ось z вверх (к поверхности) с началом координат на глубине штрека и решим одномерную задачу, полагая $j = j(z,t)$ и $c = c(z,t)$. Полное количество газа, поступившего в штрек через единицу площади поверхности потолка, т.е. интегральный поток

$$\Psi = -\int_0^\infty dt\, j(0,t). \tag{4}$$

Поток j определяется уравнениями диффузии (1), (2), которые с учетом оценки градиента напряжений в одномерном случае принимают вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial z} = 0, \quad j = -D\left[\frac{\partial c}{\partial z} - \lambda\,\frac{c}{R}\right]. \tag{5}$$

Перепад давления и диффузия происходят в слое толщины R над потолком штрека, поэтому начальное и граничные условия к уравнению (5) при условии достаточно хорошей вентиляции штрека можно записать в виде

$$c(0,t) = c_0, \quad c(R,t) = c_0 e^{\lambda}, \quad c(z,0) = c_0 e^{\lambda}.$$

Введем безразмерные переменные $x = z/R$, $\tau = Dt/R^2$, а также новую искомую функцию

$$u(x,\tau) = (1-e^{\lambda})x + [c(x,\tau)/c_0 - 1]. \tag{6}$$

Урвнение, начальное и граничные условия для нее принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \lambda\,\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda(1-e^{\lambda}), \tag{7}$$

$$u(x,0) = (x-1)(1-e^{\lambda}),$$

$$u(0,\tau) = u(1,\tau) = 0.$$

Применив преобразование Лапласа по τ, получим уравнение для $u(x,s)$:

$$u'' - \lambda u' - su = (1-e^{\lambda})(1-\lambda/s - x), \tag{8}$$

$$u(0,s) = u(1,s) = 0,$$

где штрих обозначает производную по x. Решение этой краевой задачи получаем по методу вариации произвольной постоянной (см. Приложение I), и оно имеет вид

$$u(x,s) = \frac{e^{\lambda}-1}{\sqrt{\lambda^2+4s}}\left\{\frac{e^{k_1x}-e^{k_2x}}{e^{k_1}-e^{k_2}}\right.$$
$$\times \int_0^1 dx'\left(1-\frac{\lambda}{s}-x'\right)\left[e^{k_1(1-x')}-e^{k_2(1-x')}\right]$$
$$\left. + \int_0^x dx'\left(1-\frac{\lambda}{s}-x'\right)\left[e^{k_1(x-x')}-e^{k_2(x-x'0}\right]\right\}, \tag{9}$$

где $k_{1,2} = \lambda/2 \pm \sqrt{s+\lambda^2/4}$.

Подставляя (6) в выражение для потока в (5), получаем, что $j(\tau) \equiv -j(0,\tau) = c_0D/RJ(\tau)$, где

$$J(\tau) = e^{\lambda} - \lambda - 1 + \left.\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=0}. \tag{10}$$

Из (9) получаем

$$J(s) = (e^{\lambda}-1)\frac{\sqrt{\lambda^2+4s}}{2s}\coth\frac{\sqrt{\lambda^2+4s}}{2} - (e^{\lambda}+1)\frac{\lambda}{2s}. \tag{11}$$

Интегральный поток (4) выражается через безразмерные величины как $\Phi = c_0R\int_0^\infty d\tau\, J(\tau)$. Этот интеграл можно представить как предел $J(s)$ при $s \to 0$. Вычисляя его, имеем

$$\Psi = c_0 R \left\{ \frac{e^{\lambda}+1}{\lambda} + \frac{2}{e^{-\lambda}-1} \right\}. \tag{12}$$

Выражение для самого потока можно получить преобразованием Меллина из (11) в виде ряда по вычетам $J(s)$:

$$J(\tau) = 2(e^{\lambda}-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2 e^{-n^2\pi^2\tau}}{n^2\pi^2 + \lambda^2/4}.$$

Этот ряд быстро сходится, и, переходя к размерным переменным, можно записать главный член для диффузионного потока $j(t)$ в виде

$$j(t) \approx 2D \frac{c_0}{R} \frac{\pi^2(e^{\lambda}-1)}{\pi^2+\lambda^2/4} e^{-t\pi^2 D/R^2}. \tag{13}$$

Для штрека на глубине порядка километра можно оценить значение параметра λ, и оказывается, что $\lambda \gg 1$. В этом пределе

$$\Psi \approx c_0 R \frac{e^{\lambda}}{\lambda}, \quad j(t) \approx 8\pi^2 D \frac{c_0}{R} \frac{e^{\lambda}}{\lambda^2} e^{-t\pi^2 D/R2}, \tag{14}$$

и потоки зависят от λ экспоненциально.

Противоположный предельный случай $\lambda \ll 1$ имеет место, если глубина штрека мала. Тогда градиентом давления можно пренебречь и из (13) $j = O(\lambda) \to 0$. Здесь следует отметить, что в этом пределе мы пренебрегаем восходящей диффузией на всех этапах эволюции системы, в том числе и до прокладки штрека. Так как начальное распределение концентрации обязано компенсации потоков, обусловленных градиентами концентрации и давления, то в пределе $\lambda \ll 1$ получаем также начальные условия $c(x,0) \equiv c_0$, и поэтому естественно, что потоки обращаются в нуль.

Как видно из (12), в выражении для интегрального потока газа Ψ в отличие от $J(t)$ в выражении (13) коэффициент диффузии не присутствует. Действительно, интегральный по времени поток зависит от начального и конечного состояний системы, т.е. определяется термодинамикой, а не кинетикой процесса. От коэффициента диффузии зависит характерное время установления равновесия, т.е. время, за которое происходит выброс газа. Оно порядка R^2/D. Здесь под D следует понимать эффективный коэффициент диффузии (см. [2,3]), учитывающий диффузию по границам блоков и выход газа из блоков на эти границы. Эффективный коэффициент диффузии может отличаться на несколько порядков от обычного коэффициента диффузии газа в сплошной породе (пласте), если в ней появилась система трещин, по которой газ может попадать в штрек. Именно в этом случае и происходит аварийный выброс газа.

2. Точное решение одномерного уравнения

Можно продвинуться дальше, если не делать той качественной оценки для σ_{ll}, которая была сделана выше. Вообще говоря, рассматриваемая проблема включает в себя две задачи. Первая — нахождение распределения величины σ_{ll}, вторая — нахождение интегрального диффузионного потока как функционала от распределения σ_{ll}. При этом уравнения теории упругости, решающие первую задачу, никак не связаны с распределением концентрации газа, т.е. с уравнением диффузии. Поэтому оказывается возможным независимо решить вторую задачу и явно выписать интегральный поток газа Ψ как функционал от σ_{ll}.

Решаем одномерную задачу (1), (2), в которой $\nabla\sigma_{ll}$ считаем заданной функцией z, с граничными условиями $c|_{z=0} = c|_{z=h} = c_0$ (ось z, как и раньше, направлена вверх от уровня штрека) и начальным $c|_{t=0} = c_0 e^{\lambda(1-z/h)}$. Переходим к безразмерным переменным, полагая $x = z/h$, $\tau = tD/h^2$, $\nabla\sigma_{ll} = -\rho g p(x)$, и обозначаем $q(x) = dp/dx$. Введем также новую искомую функцию $y = c/c_0 - 1$. Уравнение, граничные и начальные условия для $y(x,\tau)$ принимают вид

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial y}{\partial x} - \lambda q(x)(y+1)\right], \tag{15}$$

$$y(0,\tau) = y(1,\tau) = 0,$$

$$y(x,0) = e^{\lambda(1-x)} - 1.$$

Приравнивая нулю выражение в квадратных скобках в правой части уравнения, получаем стационарное решение $\tilde{y} = e^{\lambda p(x)} - 1$. Ищем решение задачи (15) в виде $y = \tilde{y} + v$. Совершив преобразование Лапласа по τ, получаем уравнение для $v(x,s)$ (штрих обозначает производную по x):

$$v'' - \lambda(qv)' - sv = e^{\lambda(1-x)} - e^{\lambda p}. \tag{16}$$

Граничные условия для $v(x,s)$ — нулевые.

Как и в предыдущем рассмотренном случае, интегральный поток газа $\tilde{\Psi}$ (4) равен пределу образа Лапласа диффузионного потока $j(x,s)$ при $s \to 0$ со знаком минус. Выражая $\tilde{\Psi}$ через новые переменные и учитывая, что $p(0) = p(1) = 0$, получаем

$$\tilde{\Psi} = c_0 h \left.\frac{\partial v(x,s)}{\partial x}\right|_{z=0,s=0}. \tag{17}$$

Определитель Вронского фундаментальных решений $v_{1,2}(x)$ однородного уравнения (16), в котором $s=0$, есть $W = W(0)\exp[\lambda p(x)]$. Решение неоднородного уравнения выражается через $v_{1,2}(x)$ по методу вариации произвольной постоянной (см. Приложение I). Тогда с учетом нулевых граничных условий для $v(x)$ для интегрального потока получаем

$$\Psi = \begin{vmatrix} v_1(0) & v_2(0) \\ v_1(1) & v_2(1) \end{vmatrix}^{-1}$$

$$\times \int_0^1 dx \left[1 - e^{\lambda(1-x)-\lambda p(x)}\right] \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1(1) & v_2(1) \end{vmatrix}. \tag{18}$$

При $s = 0$ левая часть уравнения (16) представляет собой полную производную, и одно из решений (16) есть решение уравнения первого порядка $v' - \lambda q v = 0$. Тогда, вычисляя и второе, получаем

$$v_1(x) = e^{\lambda p(x)}, \quad v_2(x) = e^{\lambda p(x)} \int\limits_0^x dx' e^{-\lambda p(x')}.$$

Подставляя в (18), находим

$$\tilde{\Phi} = \frac{c_0 h}{\int\limits_0^1 dx' e^{-\lambda p(x')}} \int\limits_0^1 dx \left(e^{\lambda(1-x)} - e^{\lambda p(x)}\right) \int\limits_x^1 dx' e^{-\lambda p(x')}. \tag{19}$$

Если для оценки взять в качестве $p(x)$ кусочно-линейный „зубчик", который обращается в нуль в $x = 0$ и $x = 1$ и равен единице при $x = R/h$, то в пределе больших λ получим в точности первую формулу (14).

Как видно, интегральный поток газа конечен. Это является следствием того, что есть два механизма диффузии, действующих в разных направлениях, что и приводит к установлению равновесного состояния (с нетривиальным распределением концентрации) экспоненциальным образом. Можно показать и строго, что асимптотика плотности потока при больших временах носит экспоненциальный характер, так что эффективно равновесие устанавливается за конечное время.

Если же пренебречь одним из механизмов диффузии — обусловленной градиентом концентрации или давления, то в отсутствие конкурирующих механизмов переноса поток при больших временах будет спадать степенным образом. Если, оставив неизменным начальные условия, отбросить в уравнении слагаемое, соответствующее восходящей диффузии, то останется обычное уравнение диффузии, которое при больших временах даст $j(0,t) \sim t^{-1/2}$, причем равновесное состояние тривиально $c \equiv 0$. Вторая задача в пренебрежении обыкновенной диффузией была решена в работе [2], где было показано, что асимптотика носит такой же характер. При этом стационарного состояния не существует.

3. Трехмерная задача

Для полного решения задачи, вообще говоря, необходимо знать распределение σ_{ll}. Но это задача теории упругости, которая здесь до сих пор не рассматривалась. Эта задача в действительности существенно трехмерна, поэтому трехмерным является и уравнение диффузии для концентрации газа (1), (2).

Здесь следует отметить, что наличие градиента σ_{ll} сильно зависит от геометрии задачи. В частности, если штрек строго осесимметричен или представляет собой сферическую полость, внутри которой задано нормальное к поверхности давление, то восходящая диффузия отсутствует [4]. То же самое будет, если задавать давление на бесконечном удалении от сферической или осесимметричной полостей, а внутри этих полостей давление считать равным нулю. Таким образом, введение в уравнение симметрий, которые не соответствуют действительности, выключает механизм восходящей диффузии. Поэтому качественно вклад восходящей диффузии дает приведенный выше вывод, основанный на оценке второго слагаемого в выражении для потока в одномерном случае. Трехмерную же задачу (1), (2) следует решать для достаточно общего случая.

Подчеркнем также, что гидростатическое давление $P = -\sigma_{ll}$ (след тензора σ_{ik}), вообще говоря, нельзя отождествлять с нормальным напряжением σ_{rr} (радиальной компонентой тензора). Так, в указанных случаях сферической или цилиндрической полостей нормальное напряжение может быть отлично от нуля, в то время как гидростатическое давление $P = -\sigma_{ll} = 0$ везде, включая поверхность.

Предположим, что распределение напряжений σ_{ik} вокруг штрека нам уже известно. Если ось ξ направлена вниз от поверхности земли, то начальное условие $c|_{t=0} = c_0 e^{\lambda \xi/h}$. Будем искать решение уравнения диффузии в виде $c = \tilde{c} + \tilde{w}$, где $\tilde{c}$ — решение стационарного уравнения

$$\nabla\left[\nabla\tilde{c} - \lambda\tilde{c}\nabla p\right] = 0.$$

Здесь $p = p(\mathbf{r}) = -\sigma_{ll}(\mathbf{r})/\rho_0 g h$ — обобщение на трехмерный случай функции обезразмеренного давления $p(z)$, введенного в предыдущем разделе. Несложно убедиться, что решением является

$$\tilde{c}(\mathbf{r}) = c_0 e^{\lambda p(\mathbf{r})}.$$

Для w получаем задачу

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D\nabla[\nabla w - \lambda w \nabla p], \tag{20}$$

$$w|_{t=0} = c_0\left(e^{\lambda\xi/h} - e^{\lambda p}\right)$$

с ненулевыми краевыми условиями — на поверхности и на поверхности штрека. Выражение в квадратных скобках, умноженное на $(-D)$, дает диффузионный поток. Делая преобразования Лапласа по времени, получаем уравнение для $w(\mathbf{r}, s)$:

$$D\nabla[\nabla w - \lambda w \nabla p] - s w + c_0\left(e^{\lambda\xi/h} - e^{\lambda p}\right) = 0 \tag{21}$$

с ненулевыми граничными условиями.

В случае плоского потолка штрека $\xi = 0$ интегральный поток, так же как и раньше, выражается через решение уравнения (21) с $s = 0$:

$$\Psi = -D\frac{\partial w}{\partial z}\bigg|_{s=0,\xi=0}.$$

Если G — функция Грина уравнения с нулевыми начальными условиями

$$\Delta G - \lambda\nabla G\nabla p = \delta(\mathbf{r}),$$

то

$$\Phi = -c_0 \int d^3r' \frac{\partial G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} \left(e^{\lambda\xi/h} - e^{\lambda p}\right). \qquad (22)$$

Одним из примеров геометрии, в которой σ_{ll} отлично от нуля, является следующий. Пусть штрек имеет форму узкого диска с вертикальной осью радиуса r_0, расположенного на глубине h. Тогда задача о распределении напряжений вокруг него представляет собой задачу о распределении напряжений в окрестности дискообразной трещины. Последняя была решена в работе [5]. В полярных координатах ρ, ξ выражение для $p(\rho, \xi)$ можно привести к виду

$$p(\rho, \xi) = \frac{4(1+\sigma)}{\pi} \int\limits_0^\infty d\eta e^{-\eta \frac{\xi}{r_0}} J_0\left(\eta \frac{\rho}{r_0}\right) \left[\frac{\sin\eta}{\eta} - \cos\eta\right],$$

где σ — коэффициент Пуассона.

Более близкой к реальности кажется следующая модель: цилиндрический штрек радиуса R, проходящий горизонтально на глубине h и заканчивающийся тупиком. Задача была бы аксиально симметричной, если бы не начальное условие для концентрации, которая зависит от глубины. Если глубина залегания штрека гораздо больше его радиуса, то приближенно можно считать эту концентрацию не зависящей от координат в ближайшей окрестности штрека (порядка его радиуса). Однако оказывается (см. Приложение II), что и в этом случае σ_{ll} равно нулю. Тогда уравнение (21) в окрестности штрека принимет вид

$$\Delta w = -\frac{c_0}{D} e^{\lambda},$$

соответствующий уравнению потенциала электрического поля, порождаемого зарядами плотности $\frac{1}{4\pi}\frac{c_0}{D} e^{\lambda}$. J играет роль напряженности электрического поля. По порядку величины поток равен $2\pi\sigma$, где σ — поверхностный заряд порядка $\frac{1}{4\pi} c_0 R e^{\lambda}$, т. е. $J \sim c_0 R e^{\lambda}$.

Заключение

С помощью метода интегральных преобразований аналитически исследован процесс натекания газа в штрек и роль в нем восходящей диффузии. Показано, что в случае произвольной геометрии восходящая диффузия должна играть существенную роль на всех этапах эволюции системы, она формирует начальное распределение концентрации и асимптотику потока при больших временах. Исходя из упрощенного эффективного одномерного уравнения, получены оценки для интегрального потока газа и потока как функции времени (14). Для глубин порядка и больше километра эти величины растут с глубиной экспоненциально. Эффективный коэффициент диффузии определяет характерное время натекания газа, но не влияет на величину интегрального потока.

Выводы подтверждаются точным решением одномерного уравнения для переноса газа в породе. Получено выражение для интегрального потока как функционала распределения давления с глубиной (19). Вследствие присутствия конкурирующих механизмов переноса и потоков газа, обусловленных градиентами концентрации и давления, интегральный поток конечен, а поток как функция времени спадает экспоненциальным образом. Это происходит потому, что наличие обычной и восходящей диффузий обеспечивает существование нетривиального стационарного распределения концентрации, к которому и стремится асимптотически система. Пренебрежение одним из двух механизмов приводит к тому, что стационарное состояние отсутствует и временные асимптотики степенные.

Для трехмерного случая интегральный поток представлен как функционал решения задачи теории упругости для распределения напряжений вокруг штрека (22). Указано, что введение в задачу симметрии, не соответствующей реальной геометрии (сферической, осевой, а также для горизонтального штрека цилиндрической формы, ограниченного вертикальной плоскостью — см. Приложение II), выключает механизм восходящей диффузии, и потому точные решения диффузионной задачи имеют смысл лишь в достаточно сложной геометрии.

Приложение I

Как правило, метод вариации произвольной постоянной применяется к задаче Коши. Однако понятно, что точно так же его можно использовать и для решения краевой задачи. Пусть у нас есть краевая задача

$$y'' + \hat{p}y' = \hat{q}y = f(x),$$

$$y|_{x=0} = y_0, \quad y|_{x=L} = y_L,$$

а y_1 и y_2 — два фундаментальных решения однородного уравнения. Тогда ее решение можно записать в виде

$$y = \frac{1}{\Delta}\left\{ y_1(x) \begin{vmatrix} y_0 & y_2(0) \\ y_L & y_2(L) \end{vmatrix} - y_2(x) \begin{vmatrix} y_0 & y_1(0) \\ y_L & y_1(L) \end{vmatrix} \right\}$$

$$+ \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(0) & y_2(0) \end{vmatrix} \int\limits_0^L dx' \frac{f(x')}{W(x')} \begin{vmatrix} y_1(x') & y_2(x') \\ y_1(L) & y_2(L) \end{vmatrix}$$

$$+ \int\limits_0^x dx' \frac{f(x')}{W(x')} \begin{vmatrix} y_1(x') & y_2(x') \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix},$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(L) & y_2(L) \end{vmatrix}$, а $W(x) = W[y_1(x), y_2(x)]$ — определитель Вронского функций $y_{1,2}(x)$.

Приложение II

Нахождение σ_{ll} для штрека цилиндрической формы, ограниченного плоскостью $z = 0$, к стенкам которого приложено давление P, сводится к решению системы двух уравнений (в полярных координатах) для величин v_1 и v_2, связанных с компонентами смещения $\mathbf{u}$ как

$$v_1 \equiv \operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \tag{П.1}$$

$$v_2 \equiv (\operatorname{rot}\mathbf{u})_\varphi = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}. \tag{П.2}$$

Система имеет вид

$$\frac{\partial v_1}{\partial r} + \mu\frac{\partial v_2}{\partial z} = 0, \tag{П.3}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} - \mu\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_2)}{\partial r} = 0, \tag{П.4}$$

где $\mu = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}$, σ — коэффициент Пуассона. Координата z отсчитывается от плоскости, ограничивающей штрек (фронт выработки) в глубину пласта.

Закон Гука:

$$\sigma_{rr} = 2Gu_{rr} + \lambda v_1, \tag{П.5}$$

$$\sigma_{zz} = 2Gu_{zz} + \lambda v_1. \tag{П.6}$$

Граничные условия задачи таковы:

$$-P = \sigma_{zz} \text{ для } r < R,\ z = 0;$$

$$-P = \sigma_{rr} \text{ для } r = R,\ z < 0. \tag{П.7}$$

Пространство, в котором действуют уравнения (1), (2), разбивается на две области: область $\{(a):\ r < R,\ z > 0\}$ и область $\{(b):\ r > R,\ z \in (-\infty,\infty)\}$. Здесь R — радиус штрека. Величины, относящиеся к этим двум областям, отмечаем верхними индексами (a) и (b) соответственно. Сначала найдем величины $v_{1,2}^{(b)}(r,z)$. Для этого проведем преобразование Фурье по координате z над обеими частями уравнений (П.3)–(П.4), получаем

$$\frac{\partial v_1^{(b)}(r,k)}{\partial r} - ik\mu v_2^{(b)}(r,k) = 0,$$

$$ikv_1^{(b)}(r,k) + \mu\frac{1}{r}\frac{\partial\big(rv_2^{(b)}(r,k)\big)}{\partial r} = 0. \tag{П.8}$$

Исключая $v_2^{(b)}(r,k)$ из этих уравнений, приходим к уравнению для $v_1^{(b)}(r,k)$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_1^{(b)}}{\partial r}\right) - k^2 v_1^{(b)} = 0.$$

Решая его и выражая $v_2^{(b)}$ из (П.8), получим

$$v_1^{(b)} = B_1^{(b)}K_0(|k|r), \quad v_2^{(b)} = \frac{i|k|}{\mu k}B_1^{(b)}K_1(|k|r), \tag{П.9}$$

где $B_1^{(b)}$ есть функция k.

Теперь применим к системе (П.3)–(П.4) преобразование Фурье по z в области (a), доопределив $v_{1,2}$ нулем при $z < 0$ (см. [6]). После некоторых преобразований получим

$$v_1^{(a)} = A_1^a I_0(|k|r) + \int_r^R dr'r'\left[\frac{\partial v_1^{(a)}(r')}{\partial z} - ikv_1^{(a)}\right]\Big|_{z=0}$$
$$\times\big(I_0(|k|r')K_0(|k|r) - I_0(|k|r)K_0(|k|r')\big), \tag{П.10}$$

$$ik\mu v_2^{(a)} = -\mu v_2^{(a)}\big|_{z=0} + A_1^{(a)}I_1(|k|r)|k|$$
$$-\int_r^R dr'r'\left[\frac{\partial v_1^{(a)}(r')}{\partial z} - ikv_1^{(a)}\right]\Big|_{z=0}$$
$$\times\big(I_0(|k|r')K_1(|k|r) + I_1(|k|r)K_0(|k|r')\big). \tag{П.11}$$

Сшивая решения на границе областей (a) и (b) $v_{1,2}^{(a)}(R,k) = v_{1,2}^{(b)}(R,k)$, получаем два уравнения для определения функций $A_1^{(a)}$ и $B_1^{(b)}$. В результате получаем

$$A_1^{(a)} = \mu RK_0(|k|R)\,v_2^{(a)}(R,z)\big|_{z=0}, \tag{П.12}$$

$$B_1^{(b)} = \mu RI_0(|k|R)\,v_2^{(a)}(R,z)\big|_{z=0}. \tag{П.13}$$

Подставляя $A_1^{(a)}$ в выражения для $v_{1,2}^{(a,b)}(r,k)$ (П.10), (П.11), получим замкнутую систему для $v_{1,2}^{(a)}$; подстановка $B_2^{(b)}$ в (П.9) дает $v_{1,2}^{(b)}$.

Интегрируя по k получившееся выражение для $v_2^{(a)}(r,k)$, имеем

$$2\mu v_2^{(a)}\big|_{z=0} = \int_r^R dr'r'\left[\frac{1}{r^2}F\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},1;\frac{r'^2}{r^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{r}{2r'^3}F\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},2;\frac{r^2}{r'^2}\right)\right]v_1^{(a)}(r',z)\Big|_{z=0}.$$

Из этой формулы следует, что $v_2^{(a)}(R,z)\big|_{z=0} = 0$. Тогда $v_1^{(b)}(r,k) = v_2^{(b)}(r,k) = 0$ и соответственно равны нулю $v_{1,2}^{(b)}(r,z)$. Для $v_1^{(a)}(r,k)$ получаем

$$v_1^{(a)} = \int_r^R dr'r'\big(I_0(|k|r')K_0(|k|r) - I_0(|k|r)K_0(|k|r')\big)$$
$$\times\left[\frac{\partial v_1^{(a)}(r')}{\partial z} - ikv_1^{(a)}\right]\Big|_{z=0}. \tag{П.14}$$

Отсюда следует, что $v_1^{(a)}(R,k) = 0$, следовательно, $v_1^{(a)}(R,z)\big|_{z=0} = 0$. Из этой же формулы имеем

$$v_1^{(a)}\big|_{z=0} = \frac{1}{2}\int_r^R dr'r'\left[\frac{1}{r}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\frac{r'^2}{r^2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{r}{r'}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\frac{r^2}{r'^2}\right)\right]\frac{\partial v_1^{(a)}(r',z)}{\partial z}\Big|_{z=0}.$$

Из формулы (П.11) вытекает

$$2\pi\mu \frac{\partial v_2^{(a)}}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \int\limits_r^R dr' r' \frac{\partial v_1^a}{\partial z}\bigg|_{z=0}$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk \big[I_0(|k|r')K_1(|k|r) + I_1(|k|r)K_0(|k|r')\big].$$

Интеграл по k в правой части расходится. Для того чтобы $\frac{\partial v_2^{(a)}}{\partial z}\big|_{z=0}$ было конечным, необходимо обращение в нуль $\frac{\partial v_1^{(a)}}{\partial z}\big|_{z=0}$. В силу требования непрерывности при $r = R$ обращаются в нуль производные $\frac{\partial v_1^{(a)}}{\partial r}\big|_{r=R}$ и $\frac{\partial v_2^{(a)}}{\partial z}\big|_{r=R}$. Поскольку функция $v_1^{(a)}(r, z)$ гармоническая, она может быть равна только константе, но она равна нулю при $r = R$; следовательно равна нулю везде, что и требовалось доказать. Отметим, что этот же вывод следует из формулы (П.14).

Список литературы

[1] *Косевич А.М.* Физическая механика реальных кристаллов. Киев: Наукова думка, 1981. 327 с.

[2] *Алексеев А.Д., Василенко Т.А., Фельдман Э.П.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 4. С. 65–74.

[3] *Слезов В.В., Мчедлов-Петросян П.О., Танатаров Л.В.* // ДАН СССР. 1981. Т. 257. С. 871–875.

[4] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. М.: ГИТТЛ, 1954. 795 с.

[5] *Sheddon L.N.* // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1946. Vol. 187. P. 239–260.

[6] *Тимчмарш Е.* Введение в теорию интервалов Фурье. М.–Л.: ОГИЗ, 1948. 479 с.